

УДК 532.135:[532.584+591.111.4]

О. О. Мельник, канд. фіз.-мат. наук,

В. П. Лісовська, канд. фіз.-мат. наук

Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана, м. Київ

МАГНІТОРЕОЛОГІЯ РОЗВЕДЕНИХ СУСПЕНЗІЙ У КРОВІ

У рамках структурно-феноменологічного підходу отримані реологічні рівняння стану розведеної суспензії у крові недеформівних осесиметричних магніточутливих частинок. Як реологічна модель несучої рідини та гідродинамічна модель зважених частинок використовуються рідина В. К. Стокса з моментними напруженнями та тривісна гантель, відповідно. На основі отриманих результатів досліджено вплив зовнішнього магнітного поля на реологічну поведінку суспензії, що розглядається.

Ключові слова: *реологічне рівняння, суспензія у крові, зважені частинки.*

Вступ. У роботі вивчається можливість керування за допомогою зовнішнього магнітного поля реологічними властивостями розведеної суспензії у крові, яка утворюється при доданні до неї недеформівних видовжених частинок із сталим магнітним моментом. Для цього в межах структурно-феноменологічного підходу [1, 2] одержано реологічні рівняння такої суспензії, які використовуються для вивчення її реологічної поведінки у простій зсувній течії при наявності поперечного магнітного поля.

Суспензії у крові недеформівних частинок, у тому числі таких, які виготовлені з використанням магнітних носіїв [3, 4], можуть утворюватися при доданні безпосередньо до кровотоку частинок лікарських речовин для адресної доставки до ураженого органу; частинок субстанцій, непрозорих для рентгенівських променів, які використовуються для візуалізації кровоносних судин; ферро- або феррімагнітних частинок з високою теплоємністю, які переносяться кров'ю до певного органу для наступної теплової дії на нього при лікуванні ракових захворювань, тощо. Суспензії у крові виникають також за межами організму, а саме, в апаратах для очищення крові; у різних приладах, які використовуються для вивчення крові, зокрема, при доданні до зразків крові частинок з магнітним колоїдом, розміщених в їхніх полімерних матрицях, для покращення біохімічних або біомедичних аналізів [3] тощо.

Як реологічна та гідродинамічна моделі крові і частинок, зважених у ній, у даній роботі використовується рідина В. К. Стокса з моментними напруженнями [5] і тривісна гантель, відповідно.

Реологічна модель розведеної суспензії тривісних гантельних частинок. В роботі припускається, що характерний розмір недеформованих частинок суспензії набагато більший порівняно з характерними розмірами формених елементів крові, — еритроцитів, лейкоцитів і тромбоцитів. Це дозволяє розглядати взаємодію зважених частинок з кров'ю як гідродинамічну взаємодію з суцільним середовищем.

Сумарний об'єм еритроцитів крові приблизно у 50 разів перевищує об'єм лейкоцитів і тромбоцитів [6], тому реологічну поведінку крові визначає концентрація і механічні властивості тільки еритроцитів [6].

Висока концентрація еритроцитів — близько 46% — у крові людини приводить до того, що в ній, як і в будь-якій концентрованій суспензії, між форменими елементами, крім центральної, виникає нецентральна взаємодія. Як наслідок, між елементами мікроструктури крові повинні діяти пари сил, а напружений стан крім в'язких напружень повинен визначатися моментними напруженнями. Це пояснює вибір у даній роботі, як і в роботі [7], рідини В. К. Стокса з моментними напруженнями [5] для реологічного моделювання крові.

Теорія В. К. Стокса [5] — найпростіше узагальнення ньютонівської теорії в'язкої рідини, яке враховує наявність моментних напружень у градієнтних течіях рідин. В'язкі і моментні напруження τ_{ij} і M_{ij} в реологічній моделі В. К. Стокса [5] повністю визначаються полем швидкості v_i

$$\tau_{(ij)} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij}, \quad (1)$$

$$\mu_{ij} = 4\eta K_{ij} + 4\eta' K_{ji}. \quad (2)$$

У реологічних рівняннях (1), (2) $\tau_{(ij)}$ — симетрична частина тензора напружень τ_{ij} ; μ_{ij} — девіаторна частина тензора моментних напружень M_{ij} ; p — тиск; μ, η, η' — реологічні сталі; d_{ij} — тензор швидкостей деформації, $d_{ij} = (1/2)(v_{i,j} + v_{j,i})$; K_{ij} — тензор градієнта швидкостей мікрообертання частинок рідини, який визначається як градієнт вектора вихору швидкості $\omega_i = (1/2)\varepsilon_{irs}v_{s,r}$, $K_{ij} = \omega_{j,i}$; δ_{ij} , ε_{ijk} — символи Кронекера і Леві-Чівіта.

Гідродинамічною моделлю зважених частинок у даній роботі є тривісна гантель. Це недеформована система шести точкових центрів гідродинамічної взаємодії моделі з несучою рідиною (бусинок), які знаходяться на кінцях трьох взаємно перпендикулярних осей L_1, L_2, L_3 ($L_1 \geq L_2 = L_3$) (рис. 1). Осі симетричної тривісної гантелі перетинаються в одній точці і діляться у ній навпіл.

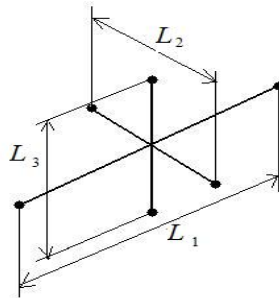


Рис. 1. Симетрична тривісна гантель — гідродинамічна модель осесиметричних дисперсних частинок суспензії

Для коефіцієнта тертя ξ центрів гідродинамічної взаємодії, які розташовані на кінцях осей тривісної гантелі, і взаємодіють із несучою рідиною, як кульки радіуса r , використовується співвідношення

$$\xi = \xi_N (1 + B), \quad (3)$$

$$B = \frac{2 + \nu}{r_0^2 + (2 + \nu)r_0} \quad (4)$$

одержане у [8] при дослідженні обтікання кульки радіуса r рідиною (1), (2). У (3) ξ_N — коефіцієнт поступального тертя кульки радіуса r у ньютонівській рідині з в'язкістю μ , $\xi_N = 6\pi\mu r$; $\nu = \eta'/\eta$; $r_0 = r/l_0$, де $l_0 = \eta/\mu$.

Феноменологічний параметр l_0 , внутрішній масштабний параметр рідини В. К. Стокса (1), (2), що входить у співвідношення (3), (4), має розмірність довжини. Згідно з [5], він є функцією розмірів елементів мікроструктури рідини, яка моделюється рівняннями (1), (2), та їх концентрації.

Цей параметр l_0 для крові визначається на основі результатів роботи [7], в якій порівнювалися між собою профілі швидкості течії Пуазейля рідини В. К. Стокса (1), (2), одержані теоретично в [5, 7], і крові при її течії по трубці [9] з діаметром $4 \cdot 10^{-5}$ м. Значення l_0 для трьох зразків крові, які відрізняються показниками гематокриту C_b , наведені у таблиці 1.

Таблиця 1

Залежність параметра l_0 від показника гематокриту крові C_b

$l_0 \cdot 106$, м	6,666	8,000	14,815
C_b , %	6	13	40

Результати тестування експериментальних даних у [7] виявилися практично нечутливими до зміни параметра $\nu = \eta'/\eta$ в його прийнятному діапазоні $-1 < \nu < 1$; теоретичні розрахунки у [7] проводилися при $\nu = 0,5$.

У роботі припускається, що зважені частинки та їх гідродинамічна модель мають сталий магнітний момент $p_i = Pn_i$, де p — величина сталого магнітного моменту; n_i — одиничний вектор, який характеризує орієнтацію осесиметричної зваженої частинки і орієнтацію осі L_1 тривісної гантелі у лабораторній системі координат. Також припускається, що суспензія є розведена настільки, що взаємодією між магнітними полями зважених частинок, як і гідродинамічною взаємодією між ними можна нехтувати.

Для отримання реологічного рівняння стану суспензії, що розглядається, використовується структурно-феноменологічний підхід. На першому (структурному) етапі при вивченні взаємодії окремої модельної мікрочастинки з несучою рідиною отримується визначальне рівняння для вектора n_i , який характеризує орієнтацію зваженої частинки

$$\dot{n}_i = \omega_{ik}n_k + \lambda(d_{ik}n_k - d_{km}n_kn_mn_i) + \frac{P}{W}(H_i - H_kn_kn_i), \quad (5)$$

де W — коефіцієнт обертального тертя тривісної гантелі у рідині В. К. Стокса, $W = (1/2)\xi L_2^2(\tilde{p}^2 + 1)$, $\lambda = (\tilde{p}^2 - 1)/(\tilde{p}^2 + 1)$, $\tilde{p} = L_1/L_2$, ω_{ik} — тензор вихору швидкості.

Також на цьому етапі отримується вираз для швидкості дисипації механічної енергії в одиниці об'єму суспензії

$$\Phi = \Phi_0 + n_0 \frac{\xi L_2^2}{2} \left[d_{ij}d_{ij} + (\tilde{p}^2 + 1)\langle N_i N_i \rangle + \right. \\ \left. + (\tilde{p}^2 - 1)d_{ij}d_{jk}\langle n_i n_k \rangle - 2(\tilde{p}^2 - 1)d_{ik}\langle N_i n_k \rangle \right], \quad (6)$$

де Φ_0 — швидкість дисипації механічної енергії в одиниці об'єму суспензії за відсутності зважених частинок; n_0 — кількість зважених частинок в одиниці об'єму суспензії; Φ_p — швидкість дисипації механічної енергії при обтіканні 6 бусинок модельної частинки; $\langle \rangle$ — символ осереднення за допомогою функції розподілу F кутових положень вектора n_i , яка визначається рівнянням $\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_i}(F\dot{n}_i) = 0$.

У роботі також припускається, що зважені частинки є набагато меншими, ніж характерний розмір області течії суспензії. Це дозволяє

моделювати таку суспензію при її вивченні у межах структурно-феноменологічного підходу [1, 2] структурним континуумом з двома внутрішніми мікропараметрами — одиничним вектором n_i , який характеризує орієнтацію зваженої частинки, і вектором $N_i = \dot{n}_i - \omega_{ik}n_k$, який характеризує її кутову швидкість відносно несучої рідини; тут крапка над n_i означає локальне диференціювання за часом.

Вид і структура отриманого на першому етапі виразу для швидкості дисипації механічної енергії в одиниці об'єму суспензії (6) дозволяє на другому етапі побудувати феноменологічне рівняння для тензора напружень у суспензії

$$T_{ij} = t_{ij} + n_0 \langle \sigma_{ij} \rangle, \quad (7)$$

а також записати за допомогою цього рівняння феноменологічний вираз для швидкості дисипації механічної енергії в одиниці об'єму суспензії

$$\Phi = \Phi_0 + n_0 \langle \sigma_{ij} \rangle d_{ij} + n_0 \langle N_i \varepsilon_{ijk} n_j M_k^{(hf)} \rangle.$$

У (7) t_{ij} — тензор напружень у несучій рідині суспензії за відсутності зважених частинок; $n_0 \langle \sigma_{ij} \rangle$ — напруження, спричинене присутністю n_0 зважених частинок в одиниці об'єму суспензії.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & (a_0 + a_1 d_{km} n_k n_m) \delta_{ij} + (a_2 + a_3 d_{km} n_k n_m) n_i n_j + \\ & + a_4 d_{ij} + a_5 d_{ik} n_k n_j + a_6 d_{jk} n_k n_i + a_7 n_i N_j + a_8 n_j N_i, \end{aligned}$$

де a_i ($i = \overline{0,8}$) — сталі феноменологічні коефіцієнти.

При порівнянні структурного і феноменологічного виразів для швидкості дисипації механічної енергії в одиниці об'єму суспензії на третьому етапі визначаються невідомі реологічні сталі a_i ($i = \overline{0,8}$) реологічного рівняння для напруження (7) і отримується остаточний вигляд реологічного рівняння стану розведеної суспензії тривісних гантелей при наявності зовнішнього магнітного поля

$$\begin{aligned} T_{ij} = & t_{ij} + n_0 \frac{W}{\tilde{p}^2 + 1} d_{ij} + n_0 \lambda^2 W d_{km} \langle n_k n_m n_i n_j \rangle + \\ & + 2n_0 \frac{W\lambda}{\tilde{p}^2 + 1} \left(d_{ik} \langle n_k n_j \rangle + d_{jk} \langle n_k n_i \rangle \right) + n_0 \frac{P}{\tilde{p}^2 + 1} H_j \langle n_i \rangle - \\ & - n_0 \frac{P\tilde{p}^2}{\tilde{p}^2 + 1} H_i \langle n_j \rangle + n_0 \lambda P H_k \langle n_k n_i n_j \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

W — єдиний реологічний параметр у (5), (8), який характеризує взаємодію зважених частинок з несучою рідиною, яка моделюється рі-

диною В. К. Стокса з моментними напруженнями (1), (2). Згідно з рівняннями (3), (4) врахування моментних напружень, які виникають у несучій рідині, веде до зростання коефіцієнта обертального тертя зважених частинок $W = W_N(1+B)$, порівняно з величиною

$W_N = \frac{\xi_N L_2^2}{2} (\tilde{p}^2 + 1)$ у суспензії, несуча рідина якої моделюється ньютонівською рідиною з в'язкістю μ .

Оцінимо аналітично радіус r бусинок гантелі через осьове відношення еліпсоїда обертання з рівності $W_N = W_{NE}$. Тут W_{NE} — коефіцієнт обертального тертя еліпсоїда обертання з віссю симетрії $2a = L_1$ і екваторіальним діаметром $2b = L_2 = L_3$, який є гідродинамічно еквівалентним тривісній гантелі з осями $L_1 \geq L_2 = L_3$ (рис. 1), як моделі зважених частинок суспензії у ньютонівській несучій рідині з в'язкістю μ . Враховуючи, що коефіцієнт обертального тертя W_{NE} одновісного еліпсоїда у ньютонівській рідині визначається співвідношенням

$$W_{NE} = \frac{4}{3} ab^2 \pi \mu f(\tilde{p}),$$

$$f(\tilde{p}) = \frac{4(\tilde{p}^4 - 1)}{\tilde{p}^2 \left[\frac{2\tilde{p}^2 - 1}{2\tilde{p}\sqrt{\tilde{p}^2 - 1}} \ln \frac{\tilde{p} + \sqrt{\tilde{p}^2 - 1}}{\tilde{p} - \sqrt{\tilde{p}^2 - 1}} - 1 \right]},$$

радіус r бусинок гантельних зважених частинок визначається виразом

$$r = \frac{L_1 f(\tilde{p})}{18(\tilde{p}^2 + 1)}.$$

Значимо, що еліпсоїд обертання це найбільш поширена гідродинамічна модель зважених частинок у суспензіях з ньютонівською несучою рідиною.

При такому виборі радіуса r бусинок гантелі отримується визначальне рівняння для тензора напружень у суспензії, що розглядається, у формі

$$\begin{aligned} T_{ij} = & t_{ij} + V\mu(1+B) \frac{f(\tilde{p})}{\tilde{p}^2 + 1} d_{ij} + V\mu(1+B)\lambda^2 f(\tilde{p}) d_{km} \langle n_k n_m n_i n_j \rangle + \\ & + 2V\mu(1+B)\lambda \frac{f(\tilde{p})}{\tilde{p}^2 + 1} (d_{ik} \langle n_k n_j \rangle + d_{jk} \langle n_k n_i \rangle) + n_0 \frac{P}{\tilde{p}^2 + 1} H_j \langle n_i \rangle - \\ & - n_0 \frac{P\tilde{p}^2}{\tilde{p}^2 + 1} H_i \langle n_j \rangle + n_0 P \lambda H_k \langle n_k n_i n_j \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

У (9) V — об'ємна концентрація зважених частинок, $V = n_0 (4/3) \pi a b^2$; параметр B , визначений формулою (4), має вигляд

$$B = \frac{2 + \nu}{(L_1/l_0)^2 [A(\tilde{p})]^2 + (2 + \nu)(L_1/l_0)A(\tilde{p})}, \quad A(\tilde{p}) = \frac{f(\tilde{p})}{18(\tilde{p}^2 + 1)}.$$

Значення параметра l_0 , які представлені у таблиці 1, дозволяють використати (9) як реологічне рівняння для напружень у суспензії недеформівних симетричних частинок у крові.

Магнітореологічна поведінка розведеної суспензії тривісних гантелей у крові. Отримуючи рівняння (5), (9), ми припустили, що швидкість несучої рідини в околі зваженої частинки є лінійною функцією координат. Тому при течіях суспензії у крові у великих та середніх судинах та каналах різних пристроїв поза організмом людини, які використовуються для дослідження крові, зважені частинки локально розташовані у простих зсувних течіях. Тому у даній роботі розглядається динаміка зважених частинок та напруження в суспензії у простій зсувній течії: $v_x = 0$, $v_y = Kx$, $v_z = 0$; $K = const$ при наявності зовнішнього магнітного поля: $H_x = H$, $H_y = H_z = 0$; $H = const$ для дослідження впливу моментних напружень, які виникають у крові, та обертальної в'язкості крові на реологічну поведінку суспензії у крові. Магніточутливість крові не враховується.

При дослідженні динаміки видовжених зважених частинок у простій зсувній течії отримано, що зважені частинки стаціонарно зависають без обертання в площинах, перпендикулярних до осі Oz при $\alpha \leq \alpha_{cr}$, де

$$\alpha = \frac{KW}{PH}; \quad \alpha_{cr} = \frac{2}{1 - \lambda}.$$

У цьому випадку зважені частинки орієнтуються під кутом φ до площини xOz

$$\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{1 + 2\alpha^2 \lambda (\lambda + 1)} - 1}{2\alpha \lambda}.$$

При $\alpha > \alpha_{cr}$ зважені частинки обертаються у площинах, перпендикулярних до осі Oz , з кутовою швидкістю

$$\dot{\varphi} = K \left[\frac{1}{2}(1 + \lambda \cos 2\varphi) - \frac{1}{\alpha} \sin \varphi \right].$$

З урахуванням встановленої динаміки тривісних гантелей для суспензії в крові знайдені залежності характеристичної в'язкості

$\nu \equiv \frac{\mu_a - \mu}{\mu V}$ та різниць нормальних напружень $\sigma_1 \equiv \frac{T_{yy} - T_{zz}}{n_0 PH}$ та $\sigma_2 \equiv \frac{T_{xx} - T_{zz}}{n_0 PH}$ від $\alpha_N = KW_N / (PH)$.

На рисунках 2–5 показані реологічні характеристики ν, σ_1, σ_2 як функції параметра α_N для розведеної суспензії осесиметричних недеформівних частинок у крові при різних значеннях видовженості \tilde{p} зважених частинок та різних значеннях гематокриту C_b крові.

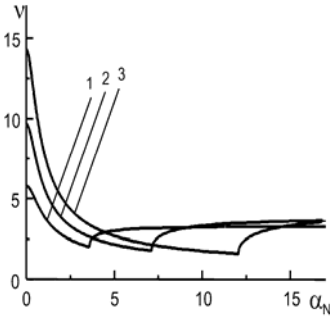


Рис. 2. Залежність ν від α_N при $C_b = 40\%$; криві 1–3 відповідають видовженості зважених частинок суспензії $\tilde{p} = 2, 3, 4$.

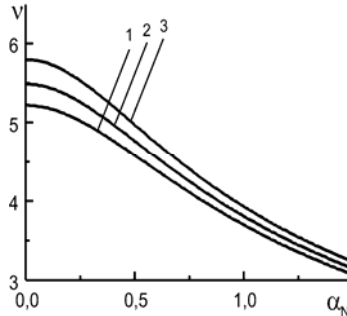


Рис. 3. Залежність ν від α_N при $\tilde{p} = 2$; криві 1–3 відповідають показникам гематокриту крові $C_b = 6\%, 13\%, 40\%$

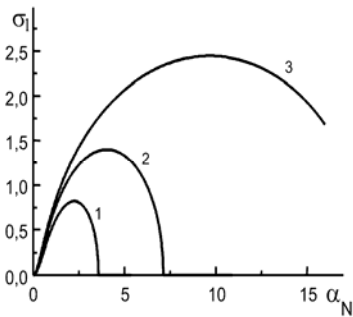


Рис. 4. Залежність σ_1 від α_N при $C_b = 40\%$; криві 1–3 відповідають видовженості зважених частинок суспензії $\tilde{p} = 2, 3, 4$.

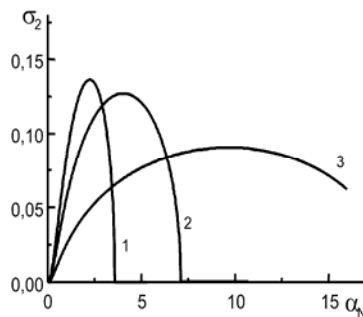


Рис. 5. Залежність σ_2 від α_N при $C_b = 40\%$; криві 1–3 відповідають видовженості зважених частинок суспензії $\tilde{p} = 2, 3, 4$.

Псевдопластична поведінка суспензії у крові, тобто зменшення ν зі збільшенням α_N , що спостерігається на (Рис. 2, 3), має місце при неперервній зміні стаціонарного кута зависання зважених частинок. Проте існує критичне значення $(\alpha_N)_{cr} = \frac{\alpha_{cr}}{1+B}$, коли стаціонарне зависання частинок перестає спостерігатися і починається обертальний рух зважених частинок. Ділатантна поведінка суспензії у крові, тобто збільшення ν зі зростанням α_N , яке спостерігається на кожній з кривих (Рис. 2), відповідає обертальній динаміці зважених частинок.

Висновки. Представлені розрахунки показують, що врахування моментних напружень у градієнтних течіях крові, як несучої рідини суспензії, приводить до зростання ефективної в'язкості μ_a суспензії та різниць нормальних напружень $T_{yy} - T_{zz}$ та $T_{xx} - T_{zz}$, порівняно із суспензією з ньютонівською несучою рідиною. Отримані результати виявляють зміни реологічних характеристик крові при доданні до неї у малих кількостях ліків або частинок, які використовуються для візуалізації течії крові. Теоретично виявлено, що присутність зважених частинок у крові змінює не тільки в'язкість крові і, як наслідок, течію крові у судинах, але і тиск крові на стінки судин в результаті існування ненульових різниць нормальних напружень (ефекта Вайссенберга) у створеній суспензії.

Залежність ефективної в'язкості суспензії від інтенсивності зовнішнього магнітного поля дозволяє, крім того, контролювати значення ефективної в'язкості суспензії у крові і, таким чином, контролювати течію крові у судинах та в каналах пристроїв, які використовуються при вивченні крові поза організмом людини.

Список використаних джерел:

1. Шмаков Ю. И. Структурно — континуальный подход в реологии полимерных материалов / Ю. И. Шмаков, Е. Ю. Таран // Инж. — физ. журн. — 1970. — Т. 18, № 6. — С. 1019–1024.
2. Таран Е. Ю. Реологическое уравнение состояния разбавленных суспензий жестких гантелей с шариками на концах / Е. Ю. Таран // Прикл. Механика. — 1977. — Т. 13. № 4. — С. 110–115.
3. Magnetic manipulation instrumentation for medical physics research / G. T. Gillies, R. C. Ritter, W. C. Broadus [et al.] // Rev. Sci. Instrum. — 1994. — Vol. 65. — P. 533–562.
4. Scientific and clinical applications of magnetic carriers / [edited by U. Höfely et al.]. — New York : Plenum Press, 1997. — 652 p.
5. Stokes V. K. Couple stresses in fluids / V. K. Stokes // Phys. Fluids. — 1966. — Vol. 9. — P. 1709–1715.
6. Левтов В. А. Реология крови / В. А. Левтов, С. А. Регирер, Н. Х. Шадрина. — М. : Медицина, 1982. — 272 с.

7. Valanis K. C. Poiseuille flow of fluid with couple stress with applications to blood flow / K. C. Valanis, C. T. Sun // *Biorheology*, — 1969. — Vol. 6. — P. 85–97.
8. Stokes V. K. Effects of couple stresses in fluids on the creeping flow past a sphere / V. K. Stokes // *Phys. Fluids*. — 1971. — Vol. 14. — P. 1580–1582.
9. Bugliarello G. The profile velocity and other characteristics of blood flow in a non-uniform shear field / G. Bugliarello, C. Kapur, G. Hsiao // *Proc. 4th Inter. Congr. on Rheol.* — New York, 1965. — P. 351–370.

The rheological equation for a dilute suspension of rigid axisymmetric elongated particles possessing a permanent magnetic moment with blood as a carrier fluid are derived within the frames of a structure-phenomenological approach. The V. K. Stokes fluid with couple stresses and the uniaxial dumbbell are used as the rheological and hydrodynamic models of blood and suspended particles, respectively. The influence of an external magnetic field on a rheological behaviour of the suspension under study is examined.

Key words: *rheological equation, suspension in blood, suspended particles.*

Отримано: 19.04.2016

УДК 519.9

О. П. Нечуйвітер, д-р фіз.-мат. наук,

К. В. Кейта, аспірант

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

ОБЧИСЛЕННЯ 2 D ІНТЕГРАЛІВ ВІД ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ КУСКОВО-СТАЛОЇ ІНТЕРЛІНАЦІЇ

У статті розглядаються кубатурні формули обчислення 2 D інтегралів від тригонометричних функцій з використанням інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на лініях.

Ключові слова: *інтерлінації функцій, кубатурна формула, інтеграли від тригонометричних функцій.*

Вступ. На даний час є математичні моделі, зокрема в цифровій обробці сигналів, комп'ютерній та сейсмічній томографії, які використовують нові інформаційні оператори. Так в теорії наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних побудовані кубатурні формули наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій на класі Ліпшиця, Гьольдера, класі диференційованих функцій. В якості даних такі кубатурні формули використовують не лише значення функції у вузлових точках, а також сліди функції на лініях. Сучасні математичні моделі