

7. Ясинський В. К. Основи обчислювальних методів / В. К. Ясинський. — Чернівці : Золоті литаври, 2005. — 396 с.
8. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М. : Наука, 1980. — 518 с.
9. Григорків В. С. Оптимальне керування в економіці / В. С. Григорків. — Чернівці : ЧНУ, 2011. — 200 с.

A single-component macroeconomic growth model with endogenous technological progress taking into account consumption and investment delay was proposed. In the mathematical model it was taken into account the impact on the final output of consumption, investment in fixed assets expand, improve production efficiency, taking into account expenses on science, taxation, government spending, balance and eliminate pollution in the investment delay. The proposed model uses sufficient conditions for optimality late to study.

**Key words:** *endogenous technological progress, investment delay, optimal control, optimal process, edge process, the main process, the time switch control.*

Отримано: 20.04.2016

УДК 517.9

**І. В. Веригіна,  
О. М. Бузинний**

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

### **КОНФЛІКТНИЙ ПЕРЕРОЗПОДІЛ РЕСУРСНОГО ПРОСТОРУ: ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МІР ЗАХОПЛЕНИХ ТЕРИТОРІЙ**

Досліджується модель про конфліктний перерозподіл ресурсного простору (території) між парою опонентів у випадку нескінченного фрактального подрібнення простору. Доведено існування граничних значень мір Лебега захоплених опонентами територій, дано оцінку цих мір за допомогою функції розподілу стандартного нормального розподілу. Встановлено зв'язок між кроком подрібнення та заданою точністю наближення мір захоплених територій до своїх граничних значень. За допомогою комп'ютерного моделювання одержано графіки, що демонструють поведінку мір захоплених територій із збільшенням кроку подрібнення.

**Ключові слова:** *динамічна система конфлікту, конфліктний перерозподіл ресурсного простору, стратегії опонентів, самоподібні міри.*

**Вступ.** Теорія динамічних систем конфлікту (ДСК), розвинута у [1–3], застосовується до задачі про перерозподіл ресурсного простору. У [4] розв'язання цієї задачі запропоновано для випадку, коли початковий поділ ресурсного простору відбувається на два регіони, тобто при  $n = 2$ ,

де доводиться, що при нескінченному збільшенні кроку подрібнення існують граничні значення мір територій, захоплених опонентами. У [5] цю задачу було розв'язано у більш загальному випадку для  $n \geq 2$ . У даній роботі, як і у попередніх, пропонується ймовірнісний підхід до доведення цього факту. Новим є те, що міри захоплених територій наближаються значеннями функції розподілу стандартної нормально розподіленої величини. Застосування нерівності Беррі-Ессена (див. [9]) дозволило оцінити точність такого наближення.

Виконано комп'ютерне моделювання цієї задачі, що, з одного боку, дає можливість наочно продемонструвати та підтвердити теоретичні висновки, виконати обчислення та дати оцінку того, як швидко наближаються міри захоплених територій до своїх граничних значень. З іншого боку, саме попередні теоретичні міркування дозволили зробити комп'ютерну модель більш ефективною.

**Постановка задачі.** Розглянемо модель системи з двох протидіючих сторін, назвемо їх опонентами А та В, які взаємодіють (конфліктують) по певному правилу на спільному ресурсному просторі  $\Omega = [0, 1]$ . Нехай простір конфлікту є подрібненим на регіони ітераційним способом, який застосовується у фрактальній геометрії (див., наприклад, [1, 6]):  $\Omega = \bigcup_{i_1, \dots, i_k=1}^n \Omega_{i_1 \dots i_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ( $k$  — крок подрібнення). На кроці подрібнення  $k = 1$  простір поділений на  $n$  регіонів, міри Лебега яких  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , де  $q_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^n q_i = 1$ . При подальшому подрібненні міра Лебега  $\lambda$  регіону  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$  визначається за формулою  $\lambda(\Omega_{i_1 \dots i_k}) = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_n^{m_n}$ ,  $m_i \in \{0, 1, \dots, k\}$ ,  $\sum_{i=1}^n m_i = k$ , де  $m_i$  позначає кількість індексів в  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$  рівних  $i$ .

Розподіл присутності опонентів А та В на  $\Omega$  задається кусково-рівномірними ймовірнісними мірами  $\mu$  та  $\nu$  відповідно:

$$\mu(\Omega_{i_1 \dots i_k}) = p_{i_1 \dots i_k}, \nu(\Omega_{i_1 \dots i_k}) = r_{i_1 \dots i_k}, \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n p_{i_1 \dots i_k} = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n r_{i_1 \dots i_k} = 1.$$

Стратегія кожного з опонентів А та В фіксується числами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  та  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , де  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ ,  $0 < \alpha_i < 1$ ,  $0 < \beta_i < 1$  для всіх  $i = 1, \dots, n$ , і тоді на  $k$ -тому кроці подрібнення розподіл присутності опонентів визначається за формулами:

$$p_{i_1 \dots i_k} = \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n}, r_{i_1 \dots i_k} = \beta_1^{m_1} \beta_2^{m_2} \dots \beta_n^{m_n}. \quad (1)$$

Припускаємо, що стратегії опонентів не є тотожно рівними, тобто існують такі індекси  $i$ , що  $\alpha_i \neq \beta_i$ , тому, взагалі,  $p_{i_1 \dots i_k} \neq r_{i_1 \dots i_k}$ .

Згідно теорії динамічних систем конфлікту (див. [1–3]), якщо  $p_{i_1 \dots i_k} > r_{i_1 \dots i_k}$ , то еволюція моделі відбувається таким чином, що міра присутності опонента А у регіоні  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$  наближається до деякого ненульового значення, а міра присутності опонента В у цьому ж регіоні стає нульовою. Вважаємо, що в цьому регіоні «перемагає» опонент А і він «захоплює» цю територію. Позначимо такий регіон  $\Omega_{i_1 \dots i_k}^A$ . І навпаки, якщо  $p_{i_1 \dots i_k} < r_{i_1 \dots i_k}$ , то в цьому регіоні «перемагає» опонент В. Позначимо такий регіон  $\Omega_{i_1 \dots i_k}^B$ . У випадку  $p_{i_1 \dots i_k} = r_{i_1 \dots i_k}$  обидва опонента у результаті конфліктної взаємодії з часом втрачають свій вплив у регіоні  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$ , тоді цей регіон не буде належати жодному з опонентів. Позначимо такий регіон  $\Omega_{i_1 \dots i_k}^{A=B}$ . На кроці подрібнення  $k$  зберемо всі регіони, «захоплені» А або В, та ті, де вони обидва втрачають свій вплив. Міри цих територій позначимо:

$$T_k^A = \sum \lambda(\Omega_{i_1 \dots i_k}^A), \quad T_k^B = \sum \lambda(\Omega_{i_1 \dots i_k}^B), \quad T_k^{A=B} = \sum \lambda(\Omega_{i_1 \dots i_k}^{A=B}).$$

Поставимо питання: як змінюються розміри захоплених територій, якщо  $k$  необмежено зростає? Покажемо, що існують граничні значення:  $T^A = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A$ ,  $T^B = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B$ ,  $T^{A=B} = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k^{A=B}$ , з'ясуємо, як швидко наближаються  $T_k^A$ ,  $T_k^B$  та  $T_k^{A=B}$  до них, та які параметри на це впливають.

**Про міру Лебега захопленої території як імовірність.** Умова  $p_{i_1 \dots i_k} > r_{i_1 \dots i_k}$ , що забезпечує перемогу опонента А у регіоні  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$ , рівносильна такій умові

$$\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n} > \beta_1^{m_1} \beta_2^{m_2} \dots \beta_n^{m_n}.$$

Прологарифмуємо та поділимо на  $k$ :

$$\frac{m_1}{k} \ln \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{m_2}{k} \ln \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \dots + \frac{m_n}{k} \ln \frac{\alpha_n}{\beta_n} > 0. \quad (2)$$

Подивимось на нумерацію регіону  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$  як на випадкову послідовність індексів  $\{i_1, \dots, i_k\}$ . На кожному місці  $s$  можна очікувати появу одного з індексів  $i \in \{1, \dots, n\}$  з відповідними ймовірностями  $q_i$ :  $P\{i_s = i\} = q_i$ , тоді  $\omega_i = \frac{m_i}{k}$  є частотою появи індексу  $i$  у послідовності  $\{i_1, \dots, i_k\}$ . Позначимо:

$$\theta_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{k} \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i}.$$

Величина  $\theta_k$  є випадковою. Виконання умови (2) означає, що відбувається подія  $\{\theta_k > 0\}$ , що також означає, що регіон належить опоненту А. Таким чином, міри Лебега територій, захоплених опонентами А та В на кроці подрібнення  $k$ ,  $T_k^A$  та  $T_k^B$ , відповідно, та території, де опоненти рівносильні,  $T_k^{A=B}$ , допускають імовірнісну інтерпретацію. Тут і в подальшому, позначаємо  $P\{C\}$  — імовірність події  $C$ .

**Твердження 1 (Про міру Лебега захопленої території як імовірність).**  $T_k^A = P\{\theta_k > 0\}$ ,  $T_k^B = P\{\theta_k < 0\}$ ,  $T_k^{A=B} = P\{\theta_k = 0\}$ .

(Детальне доведення цього твердження див. [5]).

Зробимо кілька зауважень щодо введеної величини  $\theta_k$ .

Випадкова величина  $\theta_k$  є лінійною комбінацією незалежних випадкових біноміальних величин  $m_i$ . Відомо (див., наприклад [7]), що математичне сподівання таких величин  $M\{m_i\} = kq_i$ . Математичне сподівання випадкової величини  $\theta_k$ :

$$\tilde{\theta} := M\{\theta_k\} = \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i}. \quad (3)$$

Біноміально розподілені величини  $m_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , можна подати у вигляді суми бернуллієвих величин (див. [7–8]), а саме:

$$m_i = \xi_1^{(i)} + \dots + \xi_k^{(i)} = \sum_{j=1}^k \xi_j^{(i)},$$

де  $\xi_j^{(i)}$  — випадкові величини, що є індикаторами появи індексу  $i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , на місці  $j$ ,  $j = \overline{1, k}$ , у послідовності індексів  $\{i_1, \dots, i_k\}$ :

$$P\{\xi_j^{(i)} = 1\} = P\{i_j = i\} = q_i, \quad P\{\xi_j^{(i)} = 0\} = P\{i_j \neq i\} = 1 - q_i.$$

Як відомо, математичне сподівання  $M\{\xi_j^{(i)}\} = q_i$ , дисперсія  $D\{\xi_j^{(i)}\} = q_i(1 - q_i)$ . Подамо різницю  $(\theta_k - \tilde{\theta})$  через  $\xi_j^{(i)}$ :

$$\begin{aligned} \theta_k - \tilde{\theta} &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n (m_i - kq_i) \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\xi_j^{(i)} - q_i) \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (\xi_j^{(i)} - q_i) \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i}. \end{aligned} \quad (4)$$

Позначимо

$$X_j = \sum_{i=1}^n (\xi_j^{(i)} - q_i) \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i}. \quad (5)$$

Тоді (4) переписеться:

$$\theta_k - \tilde{\theta} = \frac{X_1 + \dots + X_k}{k} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_j. \quad (6)$$

Зазначимо, що величини  $X_j, j = \overline{1, k}$  є однаково розподілені, математичне сподівання  $M\{X_j\} = 0$ , дисперсія

$$D\{X_j\} = M\{X_j^2\} = \sum_{i=1}^n q_i(1-q_i) \ln^2 \frac{\alpha_i}{\beta_i}.$$

Введемо позначення:

$$S^2 = \sum_{i=1}^n q_i(1-q_i) \ln^2 \frac{\alpha_i}{\beta_i}. \quad (7)$$

Тоді  $M\{X_j^2\} = S^2$ .

Третій абсолютний момент цих величин є скінченним:

$$M\{|X_j|^3\} = \rho \leq (nQl)^3 < +\infty, \quad (8)$$

де  $Q = \max_i \{q_i, (1-q_i)\}$ ,  $l = \max_i \left\{ \left| \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right| \right\}$ .

Зауважимо, що величини  $\tilde{\theta}, S, \rho$ , які задаються формулами (3), (7), (8) не залежать від кроку подрібнення  $k$ , а фіксуються заданим початковим розподілом  $\Omega$  на регіони та обраними стратегіями опонентів А та В.

**Наближення  $T_k^A$  значеннями функції розподілу стандартної нормально розподіленої величини.** При великих  $k$  біноміальні величини  $m_i$  поводять себе як нормально розподілені. Випадкова величина  $\theta_k$  як лінійна комбінація  $m_i$  при великих  $k$  також буде поводити себе як нормально розподілена. Тоді значення  $T_k^A$  можна оцінити відповідними значеннями функції розподілу стандартної нормально розподіленої випадкової величини  $F_{0,1}(x) = 0.5 + \Phi(x)$ , де

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$  — табульована функція Лапласа. Нагадаємо

основні властивості функції  $\Phi(x)$ :  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ ,  $\Phi(+\infty) = 0.5$ ,  $\Phi(-\infty) = -0.5$ .

Наступна теорема показує, як оцінити  $T_k^A$  значеннями  $F_{0,1}(x)$  та точність такої оцінки.

**Теорема 1.** Існує деяка константа  $W < +\infty$  така, що для всіх  $k$

$$\left| T_k^A - \left( 0.5 + \Phi \left( \frac{\tilde{\theta}\sqrt{k}}{S} \right) \right) \right| \leq \frac{W}{\sqrt{k}}. \quad (9)$$

**Доведення.** Згідно з твердженням 1:

$$T_k^A = P\{\theta_k > 0\} = P\left\{ \frac{(\theta_k - \tilde{\theta})\sqrt{k}}{S} > -\frac{\tilde{\theta}\sqrt{k}}{S} \right\}. \quad (10)$$

Величина  $\frac{(\theta_k - \tilde{\theta})\sqrt{k}}{S}$  є центрованою, її дисперсія дорівнює 1.

Нехай випадкові величини  $X_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , задано рівностями (5).

Нехай  $F_k(x)$  — функція розподілу випадкової величини

$$X = \sum_{j=1}^k \frac{X_j}{S\sqrt{k}}. \text{ Ці величини задовольняють умовам застосування нері-}$$

вності Беррі-Ессеєна (див. [10, с. 608–609]). Тоді для всіх  $k$  та  $x$ :

$$\left| F_k(x) - F_{0,1}(x) \right| \leq \frac{3\rho}{S^3\sqrt{k}} = \frac{W}{\sqrt{k}}. \quad (11)$$

Враховуючи (8):  $W \leq \frac{3(nQl)^3}{S^3} < +\infty$ . Функція розподілу випад-

кової величини

$$X = \sum_{j=1}^k \frac{X_j}{S\sqrt{k}} : F_k(x) = P\{X < x\} = P\left\{ \frac{X_1 + \dots + X_k}{S\sqrt{k}} < x \right\}.$$

Враховуючи (6) перепишемо:

$$F_k(x) = P\left\{ \frac{k(\theta_k - \tilde{\theta})}{S\sqrt{k}} < x \right\} = P\left\{ \frac{\sqrt{k}(\theta_k - \tilde{\theta})}{S} < x \right\}.$$

Підставимо  $x = \frac{-\tilde{\theta}\sqrt{k}}{S}$ :

$$F_k\left( \frac{-\tilde{\theta}\sqrt{k}}{S} \right) = P\left\{ \frac{\sqrt{k}(\theta_k - \tilde{\theta})}{S} < \frac{-\tilde{\theta}\sqrt{k}}{S} \right\} = 1 - P\left\{ \frac{\sqrt{k}(\theta_k - \tilde{\theta})}{S} > \frac{-\tilde{\theta}\sqrt{k}}{S} \right\}.$$

Згідно з (10):

$$F_k \left( \frac{-\tilde{\theta}\sqrt{k}}{S} \right) = 1 - T_k^A.$$

Підставляючи у нерівність (11) маємо:

$$\left| 1 - T_k^A - F_{0,1} \left( -\frac{\tilde{\theta}\sqrt{k}}{S} \right) \right| \leq \frac{W}{\sqrt{k}}.$$

Звідки і отримаємо твердження теореми, нерівність (9).

Отже  $T_k^A$  можна наближати значеннями функції розподілу стандартної нормальної величини

$$T_k^A \approx 1 - F_{0,1} \left( -\frac{\tilde{\theta}\sqrt{k}}{S} \right) = 0.5 + \Phi \left( \frac{\tilde{\theta}\sqrt{k}}{S} \right). \quad (12)$$

Похибка такого наближення не перевищує величини  $\frac{W}{\sqrt{k}}$ , тобто з ростом  $k$  зменшується. Нерівність (9) також дозволяє знайти граничне значення  $T_k^A$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Про граничні значення мір Лебега захоплених територій.**

**Теорема 2.** Якщо  $\tilde{\theta} > 0$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = T^A = 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B = T^B = 0$ .

Якщо  $\tilde{\theta} < 0$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = T^A = 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B = T^B = 1$ .

Якщо  $\tilde{\theta} = 0$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = T^A = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B = T^B = 1/2$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^{A=B} = T^{A=B} = 0.$$

**Доведення.** Перепишемо (9):

$$0.5 + \Phi \left( \frac{\tilde{\theta}}{S} \sqrt{k} \right) - \frac{W}{\sqrt{k}} < T_k^A < 0.5 + \Phi \left( \frac{\tilde{\theta}}{S} \sqrt{k} \right) + \frac{W}{\sqrt{k}}. \quad (13)$$

Якщо  $k \rightarrow \infty$ , тоді  $\frac{W}{\sqrt{k}} \rightarrow 0$ .

При  $\tilde{\theta} > 0$   $\Phi \left( \frac{\tilde{\theta}}{S} \sqrt{k} \right) \rightarrow \Phi(+\infty) = 0.5$ , отже існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = T^A = 1.$$

При  $\tilde{\theta} < 0$   $\Phi \left( \frac{\tilde{\theta}}{S} \sqrt{k} \right) \rightarrow \Phi(-\infty) = -0.5$ , отже існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = T^A = 0.$$

При  $\tilde{\theta} = 0$   $\Phi\left(\frac{\tilde{\theta}}{S}\sqrt{k}\right) = \Phi(0) = 0$ , отже існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = T^A = \frac{1}{2}.$$

Якщо розподіли опонентів А та В поміняти місцями, то поміняє знак величина  $\tilde{\theta}$ . Отже можна сформулювати аналогічні твердження щодо граничних значень міри території, що контролюється В. При  $\tilde{\theta} > 0$  існує границя  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B = T^B = 0$ . При  $\tilde{\theta} < 0$  існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B = T^B = 1.$$

Якщо  $\tilde{\theta} = 0$  з нерівності (13) випливає існування границі

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B = T^B = \frac{1}{2}.$$

Оскільки для кожного  $k$  виконується  $T_k^A + T_k^B + T_k^{A=B} = 1$ , то, враховуючи попередні міркування, стверджуємо, що для всіх значень  $\tilde{\theta}$  існує границя  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^{A=B} = T^{A=B} = 0$ .

Теорему доведено.

Зауважимо, що у [5] отримано трохи інше доведення цієї ж теореми.

**Швидкість наближення мір Лебега захоплених територій до своїх граничних значень.** Поставимо задачу: для довільного  $\varepsilon > 0$  знайти таке  $k(\varepsilon)$ , щоб для всіх  $k > k(\varepsilon)$  справджувалось

$$\left|T_k^A - T^A\right| < \varepsilon, \left|T_k^B - T^B\right| < \varepsilon, \left|T_k^{A=B} - T^{A=B}\right| < \varepsilon.$$

**Твердження 2.** У випадку  $\tilde{\theta} \neq 0$ , якщо  $k(\varepsilon)$  таке, що

$$\Phi\left(\frac{|\tilde{\theta}|}{S}\sqrt{k(\varepsilon)}\right) - \frac{W}{\sqrt{k(\varepsilon)}} > 0.5 - \varepsilon, \text{ то для всіх } k > k(\varepsilon) \text{ справджується}$$

$$\left|T_k^A - T^A\right| < \varepsilon, \left|T_k^B - T^B\right| < \varepsilon, \left|T_k^{A=B} - T^{A=B}\right| < \varepsilon.$$

**Доведення.** Нехай  $\tilde{\theta} > 0$ . Оскільки вираз  $0.5 + \Phi\left(\frac{\tilde{\theta}}{S}\sqrt{k}\right) - \frac{W}{\sqrt{k}}$

при  $k \rightarrow \infty$  монотонно зростає, прямуючи до 1, то для довільного  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке  $k(\varepsilon)$ , що для всіх  $k > k(\varepsilon)$

$$0.5 + \Phi\left(\frac{\tilde{\theta}}{S}\sqrt{k(\varepsilon)}\right) - \frac{W}{\sqrt{k(\varepsilon)}} > 1 - \varepsilon \text{ або}$$



$$\Phi\left(\frac{\tilde{\theta}}{S}\sqrt{k(\varepsilon)}\right) - \frac{W}{\sqrt{k(\varepsilon)}} > 0.5 - \varepsilon. \quad (14)$$

Тоді, враховуючи ліву частину нерівності (13), вірно  $T_k^A > 1 - \varepsilon$ . У випадку, коли  $\tilde{\theta} < 0$  права частина нерівності (13) прямує до 0. Знайдемо таке  $k(\varepsilon)$ , щоб права частина нерівності (13) була менше за  $\varepsilon$ :

$$0.5 + \Phi\left(\frac{\tilde{\theta}}{S}\sqrt{k(\varepsilon)}\right) + \frac{W}{\sqrt{k(\varepsilon)}} < \varepsilon,$$

або

$$-\Phi\left(\frac{|\tilde{\theta}|}{S}\sqrt{k(\varepsilon)}\right) + \frac{W}{\sqrt{k(\varepsilon)}} < \varepsilon - 0.5,$$

або

$$\Phi\left(\frac{|\tilde{\theta}|}{S}\sqrt{k(\varepsilon)}\right) - \frac{W}{\sqrt{k(\varepsilon)}} > 0.5 - \varepsilon, \quad (15)$$

тоді для всіх  $k > k(\varepsilon)$  вірно  $T_k^A < \varepsilon$ .

Порівняємо нерівності (14) для випадку  $\tilde{\theta} > 0$  та (15) для випадку  $\tilde{\theta} < 0$ . Враховуючи симетричність ситуації з  $T_k^B$ , стверджуємо, що: для довільного  $\varepsilon > 0$ , якщо знайдено таке  $k(\varepsilon)$ , щоб виконувалась нерівність (15), тоді для всіх  $k > k(\varepsilon)$  буде виконуватись  $|T_k^A - T^A| < \varepsilon$ ,  $|T_k^B - T^B| < \varepsilon$ .

У випадку  $\tilde{\theta} = 0$  нерівність (13) перепишеться:  $0.5 - \frac{W}{\sqrt{k}} < T_k^A < 0.5 + \frac{W}{\sqrt{k}}$ . Тому при  $\frac{W}{\sqrt{k}} < \varepsilon$  виконується  $|T_k^A - 0.5| < \varepsilon$ ,  $|T_k^B - 0.5| < \varepsilon$ .

**Комп'ютерне моделювання задачі.** Нехай подрібнення простору  $\Omega$  проведено при  $n = 2$ :  $\Omega = \bigcup_{i_1, \dots, i_k=1}^2 \Omega_{i_1 \dots i_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Стратегії опонентів А та В задаються числами  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = 1 - \alpha$ ,  $\beta_1 = \beta$ ,  $\beta_2 = 1 - \beta$ , так, що  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $\alpha \neq \beta$ . Тоді згідно з формулою (2):

$\tilde{\theta} = q_1 \ln \frac{\alpha}{\beta} + q_2 \ln \frac{1-\alpha}{1-\beta}$ . Для цього випадку було створено дві

комп'ютерні моделі: модель 1 (явна) та модель 2 (стохастична).

У явній моделі для кожного фіксованого  $k$  (попередньо від  $k=1$  до  $k=24$ ) було виконано описане вище подібнення відрізка  $\Omega = [0,1]$ . Для кожного регіону  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$  було знайдено значення мір присутності опонентів згідно з формулами (1). З'ясовано, ким з опонентів «контролюється» цей регіон, та безпосередньо пораховано

$$T_k^A = \sum \lambda(\Omega_{i_1 \dots i_k}^A), T_k^B = \sum \lambda(\Omega_{i_1 \dots i_k}^B) \text{ та } T_k^{A=B} = \sum \lambda(\Omega_{i_1 \dots i_k}^{A=B}).$$

Стохастичну модель створено, базуючись на Твердженні 1. Для фіксованого значення  $k$  моделюється випадкова послідовність індексів довжиною  $k$ :  $\{i_1, \dots, i_k\}$ . На кожному місці  $s$  поява індексу 1 або 2 відбувається з ймовірностями  $q_1$  та  $q_2$ , відповідно,  $q_1 + q_2 = 1$ . Ведеться підрахунок  $m$ -числа появи індексу  $i=1$  та значення величини

$$\theta_k = \frac{m}{k} \ln \frac{\alpha}{\beta} + \frac{k-m}{k} \ln \frac{1-\alpha}{1-\beta}.$$

(до  $N=10^6$ ) можна знайти статистичну ймовірність того, що величина  $\theta_k$  більше або менше, або дорівнює 0:  $P\{\theta_k > 0\} = T_k^A$ ,  $P\{\theta_k < 0\} = T_k^B$ ,  $P\{\theta_k = 0\} = T_k^{A=B}$ .

Аналогічно працюють ці моделі і для  $n > 2$ .

За допомогою комп'ютерного моделювання отримано наступні результати.

1. Проілюстровано графічно поведінку  $T_k^A$ ,  $T_k^B$  та  $T_k^{A=B}$  при збільшенні  $k$ . Модель підтверджує результат, сформульований у теоремі 1.
2. Виконано порівняння  $T_k^A$  із відповідними значеннями функції розподілу стандартної нормально розподіленої випадкової величини. Згідно з (12):  $T_k^A \approx 0.5 + \Phi\left(\frac{\tilde{\theta}\sqrt{k}}{S}\right)$ . Тут  $\tilde{\theta}$ ,  $S$  задаються формулами (3), (7).
3. Оцінено швидкість наближення  $T_k^A$ ,  $T_k^B$  та  $T_k^{A=B}$  до своїх граничних значень. А саме: для заданого  $\varepsilon > 0$  знайдено такий крок подібнення  $k(\varepsilon)$ , що для всіх  $k > k(\varepsilon)$  виконується  $|T_k^A - T^A| < \varepsilon$ ,  $|T_k^B - T^B| < \varepsilon$ ,  $|T_k^{A=B} - T^{A=B}| < \varepsilon$ .

Розрахунки зроблено для декількох прикладів.

**Приклад 1.**  $n = 2$ ,  $q_1 = q_2 = 0.5$ ,  $\alpha_1 = 0.6$ ,  $\alpha_2 = 0.4$ ,  $\beta_1 = 0.3$ ,  $\beta_2 = 0.7$ . У цьому випадку значення параметрів  $\tilde{\theta} = 0.0668$ ,  $S = 0.4454$ ,  $\frac{\tilde{\theta}}{S} = 0.15$ .

У наступній таблиці наведено результати роботи двох описаних моделей. *Стохастична* модель повторювалась тричі. Зауважимо, що для цього прикладу для всіх  $k$   $T_k^{A=B} = 0$ .

Таблиця 1

*Порівняння значень мір захоплення територій  $T_k^A$  та  $T_k^B$  у явній та стохастичній моделях для Прикладу 1*

$k$	Явна Модель 1	Стохастична Модель 2 $N = 10^6$	Стохастична Модель 2 $N = 10^6$ (повтор)	Стохастична Модель 2 $N = 10^6$ (повтор)
12	$T_k^A = 0.6128$ $T_k^B = 0.3862$	$T_k^A = 0.6119$ $T_k^B = 0.3881$	$T_k^A = 0.6120$ $T_k^B = 0.3880$	$T_k^A = 0.6129$ $T_k^B = 0.3871$
16	$T_k^A = 0.5984$ $T_k^B = 0.4016$	$T_k^A = 0.6010$ $T_k^B = 0.3990$	$T_k^A = 0.5983$ $T_k^B = 0.4017$	$T_k^A = 0.5982$ $T_k^B = 0.4018$
20	$T_k^A = 0.7483$ $T_k^B = 0.2517$	$T_k^A = 0.7460$ $T_k^B = 0.2540$	$T_k^A = 0.7477$ $T_k^B = 0.2523$	$T_k^A = 0.7486$ $T_k^B = 0.2514$
24	$T_k^A = 0.7294$ $T_k^B = 0.2706$	$T_k^A = 0.7292$ $T_k^B = 0.2708$	$T_k^A = 0.7298$ $T_k^B = 0.2702$	$T_k^A = 0.7298$ $T_k^B = 0.2702$
100	—	$T_k^A = 0.8647$ $T_k^B = 0.1453$	$T_k^A = 0.8644$ $T_k^B = 0.1356$	$T_k^A = 0.8445$ $T_k^B = 0.1555$
400	—	$T_k^A = 0.9837$ $T_k^B = 0.0163$	$T_k^A = 0.9843$ $T_k^B = 0.0157$	$T_k^A = 0.9844$ $T_k^B = 0.0156$

Результати обчислень проілюстровано графіком. На графіку верхня зігзагоподібна лінія відповідає  $T_k^A$ , нижня  $T_k^B$ , також зображено відповідну поведінку функції розподілу стандартної нормально розподіленої величини  $F_{0,1}(x)$ .

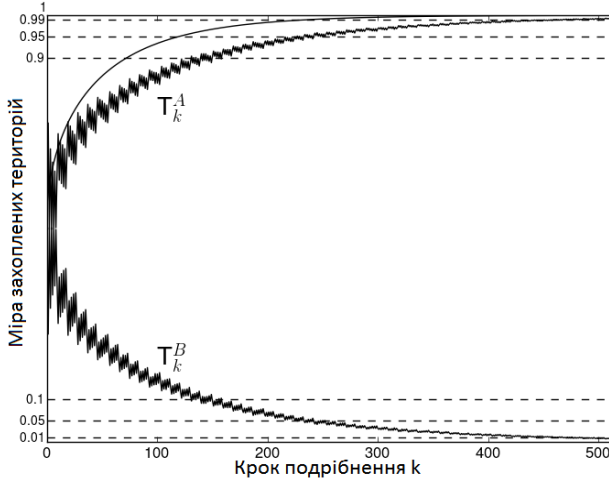


Рис. 1. Приклад 1. Графіки поведінки  $T_k^A, T_k^B$  в залежності від  $k$

**Приклад 2.**  $n = 4, q_1 = 0.1, q_2 = 0.2, q_3 = 0.3, q_4 = 0.4, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.2, \alpha_3 = 0.3, \alpha_4 = 0.4, \beta_1 = \beta_2 = 0.3, \beta_3 = \beta_4 = 0.2$ .

У цьому випадку  $\tilde{\theta} = 0.2079, S = 0.5336, \frac{\tilde{\theta}}{S} = 0.39$ .

У наступній таблиці наведено результати роботи двох моделей. Стохастична модель повторювалась двічі.

Таблиця 2

Порівняння значень мір захоплених територій  $T_k^A, T_k^B$  та  $T_k^{A=B}$  у явній та стохастичній моделях для Прикладу 2

$k$	Явна Модель 1	Стохастична Модель 2 $N = 10^6$	Стохастична Модель 2 $N = 10^6$ (повтор)
8	$T_k^A = 0.8264$ $T_k^B = 0.1582$ $T_k^{A=B} = 0.0154$	$T_k^A = 0.8258$ $T_k^B = 0.1586$ $T_k^{A=B} = 0.0156$	$T_k^A = 0.8265$ $T_k^B = 0.1582$ $T_k^{A=B} = 0.0153$
10	$T_k^A = 0.8561$ $T_k^B = 0.1339$ $T_k^{A=B} = 0.0100$	$T_k^A = 0.8560$ $T_k^B = 0.1341$ $T_k^{A=B} = 0.0099$	$T_k^A = 0.8566$ $T_k^B = 0.1335$ $T_k^{A=B} = 0.0099$

Продовження таблиці 2

12	$T_k^A = 0.8794$ $T_k^B = 0.1147$ $T_k^{A=B} = 0.0059$	$T_k^A = 0.8791$ $T_k^B = 0.1150$ $T_k^{A=B} = 0.0059$	$T_k^A = 0.8793$ $T_k^B = 0.1147$ $T_k^{A=B} = 0.0060$
24	_____	$T_k^A = 0.9508$ $T_k^B = 0.0484$ $T_k^{A=B} = 0.0008$	$T_k^A = 0.9510$ $T_k^B = 0.0482$ $T_k^{A=B} = 0.0008$
48	_____	$T_k^A = 0.9898$ $T_k^B = 0.0102$ $T_k^{A=B} = 0$	$T_k^A = 0.9897$ $T_k^B = 0.0103$ $T_k^{A=B} = 0$
100	_____	$T_k^A = 0.9996$ $T_k^B = 0.0004$ $T_k^{A=B} = 0$	$T_k^A = 0.9996$ $T_k^B = 0.0004$ $T_k^{A=B} = 0$

Результати проілюстровано графіком. На графіку крапками зображено значення  $T_k^A$ ,  $T_k^B$ ,  $T_k^{A=B}$ , також суцільною лінією показано значення функції розподілу стандартної нормально розподіленої величини  $F_{0,1}(x)$ .

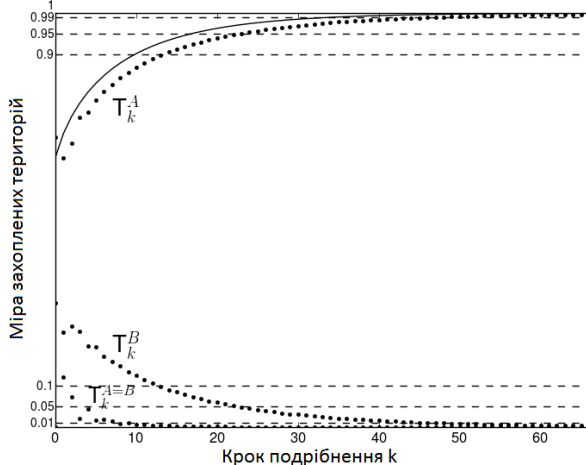


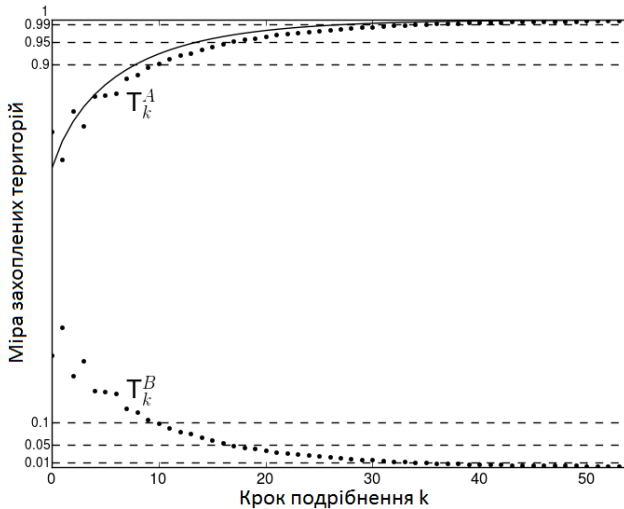
Рис. 2. Приклад 2. Графіки поведінки  $T_k^A$ ,  $T_k^B$ ,  $T_k^{A=B}$  в залежності від  $k$

Порівняння роботи двох моделей *явної* та *стохастичної* дає змогу зробити висновки, що результати *стохастичної моделі* мають достатню точність ( два — три знаки після коми можна вважати достовірними). *Явна* модель хоча і є точною, але застосування цієї моделі потребує колосального об'єму оперативної пам'яті. Точність *стохастичної* моделі можна покращити, збільшивши кількість повторів  $N$ . Крім того, робота цієї моделі дозволила провести обчислення для великих значень  $k$ , до  $k = 400$  та вище, це впливає тільки на час роботи програми. У наступних прикладах при дослідженні поведінки системи застосовуємо тільки *стохастичний* підхід. Наступні два приклади проілюструємо графіками.

**Приклад 3.**  $n = 4, q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0.25, \alpha_1 = \alpha_2 = 0.2, \alpha_3 = \alpha_4 = 0.3, \beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0.15, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.55$ .

У цьому випадку  $\tilde{\theta} = 0.1950, S = 0.4531, \frac{\tilde{\theta}}{S} = 0.43$ .

На графіку крапками зображено значення  $T_k^A, T_k^B$ , також суцільною лінією показано значення функції розподілу стандартної нормально розподіленої величини  $F_{0,1}(x)$ .  $T_k^{A=B} = 0$ .



**Рис. 3.** Приклад 3. Графіки поведінки  $T_k^A, T_k^B$  в залежності від  $k$

**Приклад 4.**  $n = 4, q_1 = 0.1, q_2 = 0.4, q_3 = 0.4, q_4 = 0.1, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.2, \alpha_3 = 0.3, \alpha_4 = 0.4, \beta_1 = 0.4, \beta_2 = 0.3, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.1$ .

У цьому випадку  $\tilde{\theta} = 0, S = 0.6518$ .

На графіку зігзагоподібна лінія показує поведінку  $T_k^A$ , що наближається до  $\frac{1}{2}$  ( $T_k^B$  також наближається до  $\frac{1}{2}$ , на графіку не показано).  $T_k^{A=B}$  прямує до нульового значення.

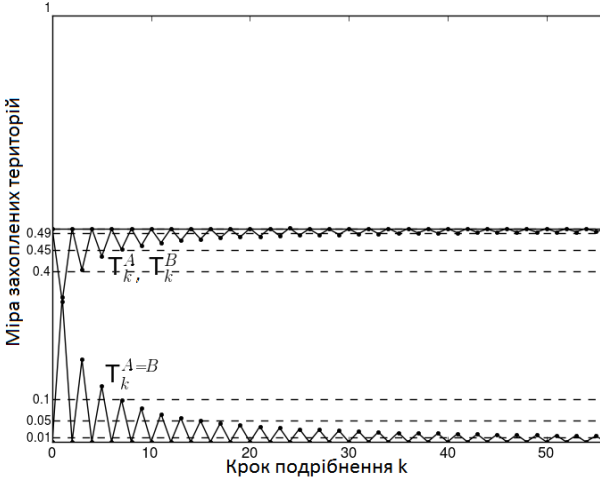


Рис. 4. Приклад 4. Графіки поведінки  $T_k^A, T_k^{A=B}$  в залежності від  $k$ .

**Оцінка швидкості наближення мір територій до своїх граничних значень.** За допомогою комп'ютерного моделювання для довільного  $\varepsilon > 0$  знайдено таке  $k(\varepsilon)$ , щоб для всіх  $k > k(\varepsilon)$  справджувалося

$$\left| T_k^A - T^A \right| < \varepsilon, \left| T_k^B - T^B \right| < \varepsilon, \left| T_k^{A=B} - T^{A=B} \right| < \varepsilon.$$

Результати знаходження кроку подрібнення  $k(\varepsilon)$  за заданим  $\varepsilon$  наведено у таблиці 3 для прикладів 1–4.

Таблиця 3

*Оцінка швидкості наближення мір територій до своїх граничних значень*

№	Приклади	Параметри $\tilde{\theta}, S, \tilde{\theta}/S$	$\varepsilon$	$k(\varepsilon)$
1	$n = 2,$ $q_1 = q_2 = 0.5,$ $\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.4$ $\beta_1 = 0.3, \beta_2 = 0.7$	$\tilde{\theta} = 0.0668$ $S = 0.4454$ $\tilde{\theta}/S = 0.15$	0.1	159
			0.05	253
			0.01	497

Продовження таблиці 3

2	$n = 4$ , $q_1 = 0.1, q_2 = 0.2, q_3 = 0.3, q_4 = 0.4$ $\alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.2, \alpha_3 = 0.3, \alpha_4 = 0.4$ $\beta_1 = \beta_2 = 0.3, \beta_3 = \beta_4 = 0.2$	$\tilde{\theta} = 0.2079$ $S = 0.5336$ $\tilde{\theta}/S = 0.39$	0.1	14
			0.05	23
			0.01	48
3	$n = 4$ , $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0.25$ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.2, \alpha_3 = \alpha_4 = 0.3$ $\beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0.15, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.55$	$\tilde{\theta} = 0.1950$ $S = 0.4531$ $\tilde{\theta}/S = 0.43$	0.1	12
			0.05	20
			0.01	38
4	$n = 4$ , $q_1 = 0.1, q_2 = 0.4, q_3 = 0.4, q_4 = 0.1$ $\alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.2, \alpha_3 = 0.3, \alpha_4 = 0.4$ $\beta_1 = 0.4, \beta_2 = 0.3, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.1$	$\tilde{\theta} = 0$ $S = 0.6518$ $\tilde{\theta}/S = 0.43$	0.1	2
			0.05	6
			0.01	38

Значення параметрів  $\tilde{\theta}$ ,  $S$ , які однозначно визначаються початковими стратегіями та розподілом  $\Omega$  на регіони, впливають на швидкість наближення  $T_k^A, T_k^B$  та  $T_k^{A=B}$  до своїх граничних значень. Ця швидкість тим більша, чим більшим є відношення  $\lambda = \tilde{\theta}/S$ .

**Висновки.** Досліджено модель про конфліктний перерозподіл ресурсного простору (території) між парою опонентів у випадку нескінченного фрактального подрібнення простору. На кожному кроці подрібнення розглянуто міри Лебега територій, що контролюються кожним з опонентів, та для них запропоновано ймовірнісну інтерпретацію, а саме: ці міри виражено через функцію розподілу деякої випадкової величини, що є лінійною комбінацією біноміально розподілених величин. Отримано наближення цих мір значеннями функції розподілу стандартної нормально розподіленої величини. Оцінено точність такого наближення. Показано, наприклад, що модуль різниці між мірою захопленої опонентом території та відповідними значеннями функції стандартного нормального розподілу із збільшенням кроку подрібнення зменшується пропорційно оберненій величині корня квадратного з кроку подрібнення. Доведено існування граничних значень мір захоплених опонентами територій при нескінченному збільшенні кроку подрібнення. Показано, що існує тільки три можливі граничні значення цих мір: 1, 0 або  $\frac{1}{2}$ . За допомогою комп'ютерного моделювання для декількох прикладів виконано обчислення значень захоплених територій та одержано графіки, що де-



монструють поведінку мір захоплених територій із збільшенням кроку подрібнення. Результати комп'ютерного моделювання підтверджують сформульовані раніше теоретичні висновки. Також комп'ютерна модель дозволяє встановити зв'язок між кроком подрібнення та заданою точністю наближення мір захоплених територій до своїх граничних значень. Показано, що швидкість наближення цих мір до своїх граничних значень залежить тільки від певних параметрів, що визначаються початковими стратегіями опонентів.

### Список використаних джерел:

1. Koshmanenko V. The infinite direct products of probability measures and structural similarity / V. Koshmanenko // Meth. Funct. Anal. and Top. — 2011. — Vol. 17, № 1. — P. 20–28
2. Кошманенко В. Д. Спектральна теорія динамічних систем конфлікту / В. Д. Кошманенко. — К. : Наук. думка, 2016. — 287 с.
3. Koshmanenko V. Dynamical systems of conflict in terms of structural measures / V. Koshmanenko, I. Verygina // Meth. Funct. Anal. and Topology. — 2016. — Vol. 22. — № 1.
4. Веригіна І. В. Порівняння стратегій пари опонентів у задачі «захоплення» території / І. В. Веригіна. — К. : Доповіді НАН України, 2016 (у редакції)
5. Кошманенко В. Д. Задача про оптимальну стратегію в моделях конфліктного перерозподілу ресурсного простору / В. Д. Кошманенко, І. В. Веригіна // Укр. мат. журн. — К. (у редакції)
6. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід в дослідженнях сингулярних розподілі / М. В. Працьовитий. — К. : Нац. пед. ун-т, 1998. — 292 с.
7. Смирнов Н. В. Курс теории вероятностей и математической статистики / Н. В. Смирнов, И. В. Барковский. — М. : Наука, 1965. — 511 с.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2-х т. / В. Феллер. — М. : Мир, 1984. — Т. 1. — 527 с.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2-х т. / В. Феллер. — М. : Мир, 1984. — Т. 2. — 752 с.

The model of conflict redistribution of a resource space (territory) between a pair of opponents is discussed in the case of infinite fractal division of space. The existence of limit Lebesgue's measure of occupied territories is proved and the estimation of these measures in terms of standard normal distribution function is given. The connection between a step of division and the exactness of approaching of measures for occupied territories to its limit values is obtained. Using computer modeling we get graphs which demonstrate the measure's behavior of the occupied territories under increasing the division step.

**Key words:** *dynamical conflict systems, conflict redistribution of a resource space, strategies of opponents, self-similar measures.*

Отримано: 16.03.2016