УДК 330.101:519.863

М. В. Бойчук, канд. фіз.-мат. наук,
О. Ю. Вінничук, канд. економ. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОПРОДУКТОВОЇ МАКРОЕКОНОМІКИ ЗРОСТАННЯ З ЕНДОГЕННИМ НАУКОВО-ТЕХНІЧНИМ ПРОГРЕСОМ ІЗ УРАХУВАННЯМ СПОЖИВАННЯ ТА ІНВЕСТИЦІЙНОГО ЗАПІЗНЕННЯ

Запропонована модель однопродуктової макроекономіки зростання з ендогенним технічним прогресом із урахуванням споживання та інвестиційного запізнення. В економіко-математичній моделі врахований вплив на кінцевий випуск продукції споживання, капіталовкладення в розширення основних фондів, покращення виробництва з урахуванням ефективності затрат «на науку», оподаткування, урядових витрат, сальдо та ліквідації забруднення навколишнього середовища при інвестиційному запізненні. Для дослідження запропонованої моделі використовуються достатні умови оптимальності із запізненням.

При дослідженні запропонованої економіко-математичної моделі проведено опис оптимальних процесів, причому, побудовано алгоритм побудови оптимального процесу при виборі економічного режиму серед крайових режимів на початковій стадії, а також алгоритм побудови оптимального процесу при виборі економічного режиму серед магістральних режимів на початковій стадії протікання економічного процесу.

Ключові слова: *ендогенний науково-технічний прогрес, інвестиційне запізнення, оптимальне керування, оптимальний процес, крайовий процес, магістральний процес, момент перемикання керування.*

Вступ. У макроекономічному моделюванню особливе місце належить моделям економічного зростання, історія яких починається з 30-х років минулого сторіччя. Автори моделей макроекономіки зростання, ясна річ, не претендували на створення всеохоплюючої та універсальної теорії дослідження економічного зростання і вибору оптимального варіанту розвитку економіки. Кожна теорія або модель мають відповідні припущення та абстракції, які дозволяють виділити і вивчити найбільш суттєві фактори економічного зростання, спланувати і спрогнозувати взаємозв'язки між макроекономічними показниками тощо.

Застосування теорії динамічної оптимізації в економіці дозволяє побудувати бажане керування економічною системою, тобто керування, за допомогою якого можна в тій чи іншій мірі впливати на її поведінку. Перехід керованої системи від одного стану в інший може здійснюватися багатьма способами. Тому виникає питання про вибір такого шляху, який з деякої точки зору виявиться найбільш вигідним. Оптимальний розв'язок при цьому повинен давати граничні можливості економіки, знання яких дозволить ставити реальні цілі та правильно формулювати задачі керування економічною системою.

Постановка проблеми. Вплив науково-технічного прогресу на характер зростання в економічній системі виявляється в різних формах, зокрема при дослідженні неавтономних систем, тобто змінних у часі макровиробничих функцій. У даній статті побудовано і досліджено економіко-математична модель, де вплив наукових досліджень на виробництво запрограмований в самій системі, тобто в моделі з внутрішнім (ендогенним) врахуванням науково-технічного прогресу у вигляді динаміки руху. Тому актуальним, як у теоретичному, так практичному плані є вплив наукових досліджень на виробництво в самій ендогенній системі, тобто з урахуванням впливу науково-технічного прогресу на економічну систему у вигляді динаміки руху.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У праці [1] запропонована модель однопродуктової економіки зростання з ендогенним врахуванням науково-технічного прогресу без інвестиційного запізнення. Проте в ній не враховано споживання та дослідження проведено з використанням необхідних умов оптимальності (принципу Понтрягіна), а в роботі [2] побудовано модель однопродуктової економіки зростання з ендогенним врахуванням науково-технічного прогресу з урахуванням споживання без інвестиційного запізнення та проведено дослідження з допомогою достатніх умов оптимальності.

Постановка завдання. Запропонувати модель однопродуктової макроекономіки зростання з ендогенним науково-технічним прогресом із врахуванням споживання та інвестиційного запізнення і дослідити її з використанням достатніх умов оптимальності.

Виклад основного матеріалу. Спочатку формалізуємо економіко-математичну модель однопродуктової макроекономіки зростання із інвестиційним запізненням.

Математична модель. Сформулюємо основні припущення для побудови економіко-математичної моделі.

Припущення 1. Робоча сила (трудові ресурси) підпорядковані експоненціальному закону $L\left(t-\tau\right)=L_0 e^{n\left(t-t_0-\tau\right)}$ у момент часу $t-\tau$ ($t\in\left[t_0,T\right]$, T — горизонт планування) із відомим сталим темпом зростання робочої сили $n>0$ та початковим станом робочої сили $L_0>0$.

Припущення 2. Валова (проміжна) продукція X у момент часу $t-\tau$ розпадається на кінцевий випуск продукції Y і виробниче споживання W [3, с. 27–29]:

$$X(t-\tau)=Y(t-\tau)+W(t-\tau),\ t\in[t_0,T]. \tag{1}$$

Припущення 3. Нехай виробниче споживання W прямо пропорційне валовій продукції X із сталим коефіцієнтом $a\in(0;1)$:

$$W(t-\tau)=aX(t-\tau),\ t\in[t_0,T]. \tag{2}$$

Тоді кінцевий випуск продукції Y прямо пропорційний валовій продукції X із коефіцієнтом $(1-a)$:

$$Y(t-\tau)=(1-a)X(t-\tau),\ t\in[t_0,T]. \tag{3}$$

Припущення 4. Кінцевий випуск продукції Y розпадається на невиробниче споживання (споживання) C, на $Cost_{tax}$ капіталовкладення (валові інвестиції) в розширення основних фондів (нагромадження капіталу) I_{ac}, на покращення виробництва при науково-технічному прогресі як ефективність затрат «на науку» I_s, на оподаткування $Cost_{tax}$, на урядові витрати $Gov_{\exp}$, на сальдо (експорт мінус імпорт) S та на ліквідацію забруднення P [3, с. 27–29]:

$$\begin{gathered}Y(t-\tau)=C(t-\tau)+I_{ac}(t-\tau)+I_s(t-\tau)+Cost_{tax}(t-\tau)+\\+Gov_{\exp}(t-\tau)+S(t-\tau)+P(t-\tau),\ t\in[t_0,T].\end{gathered} \tag{4}$$

Припущення 5. Нехай сумарні витрати на оподаткування $Cost_{tax}$, на урядові витрати $Gov_{\exp}$, на сальдо S та на ліквідацію забруднення P прямо пропорційні кінцевому випуску продукції Y із сталим коефіцієнтом $b\in(0;1)$:

$$Cost_{tax}(t-\tau)+Gov_{\exp}(t-\tau)+S(t-\tau)+P(t-\tau)=bY(t-\tau),\ t\in[t_0,T]. \tag{5}$$

Тоді на сумарні затрати на споживання C, на нагромадження капіталу (інвестиції) I_{ac} та на ефективність витрат «на науку» (інвестиції «в науку») I_s припадає:

$$\begin{gathered}I_{ac}(t-\tau)+I_s(t-\tau)+C(t-\tau)=(1-b)Y(t-\tau)=\\=(1-a)(1-b)X(t-\tau),\ t\in[t_0,T].\end{gathered} \tag{6}$$

Припущення 6. Нехай інвестиції на нагромадження капіталу I_{ac} прямо пропорційні частині кінцевої продукції $(1-b)Y$ із змінним у часі t коефіцієнтом $u\in[0;1]$:

$$\begin{gathered}I_{ac}(t-\tau)=u(t-\tau)(1-b)Y(t-\tau)=\\=(1-a)(1-b)u(t-\tau)X(t-\tau),\ t\in[t_0,T].\end{gathered} \tag{7}$$

Тоді на сумарні затрати на споживання та інвестиції в науку I_s припадає:

$$\begin{aligned} &I_s(t-\tau)+C(t-\tau)=(1-u)(1-b)Y(t-\tau)= \\ &=(1-a)(1-b)\left[1-u(t-\tau)\right]X(t-\tau),\ t\in\left[t_0,T\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Припущення 7. Нехай споживання C прямо пропорційно частині кінцевої продукції $(1-b)(1-u)Y$ із відомим коефіцієнтом (нормою споживання) кусково-диференційованим на $t \geq t_0$ $s \in [0;1]$ залежним від часу $t-\tau$:

$$\begin{aligned} &C(t-\tau)=s(t-\tau)\left[1-u(t-\tau)\right](1-b)Y(t-\tau)= \\ &=(1-a)(1-b)s(t-\tau)\left[1-u(t-\tau)\right]X(t-\tau),\ t\in\left[t_0,T\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Тоді на інвестиції в науку припадає:

$$\begin{aligned} &I_s(t-\tau)=(1-b)\left[1-s(t-\tau)\right]\left[1-u(t-\tau)\right]Y(t-\tau)= \\ &=(1-a)(1-b)\left[1-s(t-\tau)\right]\left[1-u(t-\tau)\right]X(t-\tau),\ t\in\left[t_0,T\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Припущення 8. Динаміка руху капіталу описується диференціальною моделлю:

$$\dot{K}(t)=-\mu K(t)+I_{ac}(t-\tau),\ t\in\left[t_0,T\right]. \tag{11}$$

при початковій умові з передісторією:

$$K(y)=K_0(y),\ y\in\left[t_0-\tau,t_0\right], \tag{12}$$

де $\mu(0;1)$ — норма амортизації (амортизаційних відрахувань) капіталу, $\dot{K}\equiv dK/dt$ — чисті інвестиції — прибуток, K_0 — кусково-диференційована на $\left[t_0-\tau,t_0\right]$ функція.

Припущення 9. Величина валової продукції X визначається:

$$X=A(Q)F(K,L), \tag{13}$$

де $F(K,L)$ — неокласична макровиробнича (виробнича) функція, яка залежить від капіталу K і робочої сили L.

Функція (13) має такі властивості: двічі неперервно-диференційована по $K \geq 0$ і $L \geq 0$; монотонно зростаюча по $K>0$ і по $L>0$ ($F'_K>0$, $F'_L>0$); увігнута по $K \geq 0$ і $L \geq 0$ ($F''_{K^2}<0$, $F''_{L^2}<0$), $F(0,0)=F(K\geq 0,0)=F(0,L\geq 0)=0$, $\lim\limits_{K\to\infty}F(K,L)=\infty$, $\lim\limits_{L\to\infty}F(K,L)=\infty$, $\lim\limits_{K\to 0}F'_K(K,L)=\infty$, $\lim\limits_{K\to\infty}F'_K(K,L)=0$, $\lim\limits_{L\to 0}F'_L(K,L)=\infty$, $\lim\limits_{L\to\infty}F'_L(K,L)=0$; однорідна степеня $\nu\in(0;2)$: $F(K,L)=L^{\nu}F(K/L,1)\equiv L^{\nu}f(k)$, $k=K/L$ — фондомісткість, а $f(k\geq 0)\geq 0$ — питома макровиробнича функція — двічі неперервно-диференційована, монотонно зростаюча

($f'\left(k>0\right)>0$), увігнута ($f''\left(k>0\right)<0$) і $f\left(0\right)=0$ [3, с. 6-7]; Q — загальний обсяг інвестицій у науково-технічний прогрес; $A\left(Q\right)$ — мультиплікатор науково-технічного прогресу, величина якого свідчить про ефективність затрат «на науку» та задовольняє умови: $A\left(Q\geq 0\right)>0$ — двічі неперервно-диференційована, монотонно зростаюча $A'\left(Q>0\right)>0$, увігнута $A''\left(Q>0\right)<0$, $\lim\limits_{Q\to 0}A'\left(Q\right)=\infty$, $\lim\limits_{Q\to\infty}A'\left(Q\right)=0$ [1, с. 263].

Припущення 10. Вважатимемо, що приріст загального обсягу інвестицій у науково-технічний прогрес рівний інвестиціям в науку:

$$\begin{aligned}\dot{Q}\left(t\right)=I_s\left(t-\tau\right)=\left(1-b\right)\left[1-s\left(t-\tau\right)\right]\left[1-u\left(t-\tau\right)\right]Y\left(t-\tau\right)=\\ =\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left[1-s\left(t-\tau\right)\right]\left[1-u\left(t-\tau\right)\right]\times\\ \times A\left(Q\left(t-\tau\right)\right)L^{\nu}\left(t-\tau\right)f\left(k\left(t-\tau\right)\right),\ t\in\left[t_0,T\right]\end{aligned}\tag{14}$$

із відомою початковою умовою з передісторією

$$Q\left(y\right)=Q_0\left(y\right),\ y\in\left[t_0-\tau,t_0\right],\tag{15}$$

Q_0 — кусково-диференційована на $\left[t_0-\tau,t_0\right]$ функція.

Припущення 11. На кінцевий стан капіталу K при невідомому часі T накладається обмеження $K\left(T\right)=K_T$.

На основі припущень 1–11 рівняння динаміки капіталу K та загального обсягу інвестицій у науково-технічний прогрес Q набувають вигляду:

$$\begin{cases}\dot{K}\left(t\right)=-\mu K\left(t\right)+\left(1-a\right)\left(1-b\right)u\left(t-\tau\right)L^{\nu}\left(t-\tau\right)f\left(k\left(t-\tau\right)\right),\\ \dot{Q}\left(t\right)=\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left[1-s\left(t-\tau\right)\right]\left[1-u\left(t-\tau\right)\right]\times\\ \times A\left(Q\left(t-\tau\right)\right)L^{\nu}\left(t-\tau\right)f\left(k\left(t-\tau\right)\right)\end{cases}\tag{16}$$

із початковими умовами з передісторіями

$$K\left(y\right)=K_0\left(y\right),\ Q\left(y\right)=Q_0\left(y\right),\ y\in\left[t_0-\tau,t_0\right]\tag{17}$$

та обмеженням на керування за нормою нагромадження капіталу

$$0\leq u\left(t-\tau\right)\leq 1,\ t\in\left[t_0,T\right].\tag{18}$$

Динамічну систему (16)–(17) запишемо в питомих показниках: $k=K/L$, $q=Q/L$, $k_0=K_0/L_0$, $q_0=Q_0/L_0$, $k_T=K_T/L_0$, $F\left(K,L\right)=$ $=L^{\nu}F\left(K/L,1\right)\equiv L^{\nu}f\left(k\right)$.

Із використанням рівностей $\dot{K}/L=\dot{k}-nk$, $\dot{Q}/L=\dot{q}-nq$ $\left[\left(\dot{K/L}\right)=L^{-2}\left(\dot{K}L-K\dot{L}\right),\left(\dot{Q/L}\right)=L^{-2}\left(\dot{Q}L-Q\dot{L}\right),\dot{L}=nL\right]$ одержимо:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = -(\mu+n)k(t) + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0-\tau)-n\tau}u(t-\tau)\times \\ \times A\Big(Q(t-\tau)f\big(k(t-\tau)\big)\Big), \\ Q(t-\tau) = L_0 q(t-\tau)e^{n(t-t_0-\tau)}, \\ \dot{q}(t) = -nq(t) + (1-a)(1-b)\big[1-s(t-\tau)\big]\big[1-u(t-\tau)\big]\times \\ \times L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0-\tau)-n\tau}A\Big(Q(t-\tau)f\big(k(t-\tau)\big)\Big), \\ 0 \le u(t-\tau) \le 1,\ t \ge t_0,\ \ k(y) = k_0(y),\ \ q(y) = q_0(y), \\ y \in [t_0-\tau, t_0],\ k(T) \ge k_T. \end{cases} \tag{19}$$

Задача полягає в тому, щоб знайти оптимальне керування за нормою нагромадження капіталу $u_{on}(t-\tau)$ та відповідні оптимальні траєкторії за питомим капіталом $k_{on}(t)$ і питомим обсягом інвестицій в технічний прогрес $q_{on}(t)$, $t \in [t_0, T]$, які б мінімізували найменший час:

$$T - t_0 = \int_{t_0}^{T} dt \to \min_{u} \tag{20}$$

та задовольняли обмеження (19), де T — шуканий кінцевий момент часу.

Зауважимо, що в цій задачі оптимального керування на швидкодію керуванням виступає норма накопичення капіталу u, а фазовими траєкторіями — фондомісткість (питомий капітал) k і питомий обсяг інвестицій у науково-технічний прогрес.

Дослідження економіко-математичної моделі. Для дослідження задачі оптимального керування на швидкодію (19)-(20) використаємо достатні умови оптимальності [4, с. 117–119, с. 158] без випадкових процесів (при $b(\cdot) \equiv 0$), за якими запишемо рівняння Беллмана (з незалежними змінними) та з крайовою умовою

$$\begin{cases} \inf_u R\Big(t, k(t), \varphi_1(t), q(t), \varphi_2(t), u(t-\tau), \nu\Big) \equiv \\ \equiv \inf_u \Big\{\partial\nu/\partial t + \partial\nu/\partial k\Big[-(\mu+n)k + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}\times \\ \times A(\varphi_2)u(\varphi_2)f(\varphi_1)e^{(\nu-1)n(t-t_0-\tau)-n\tau}\Big] + \partial\nu/\partial q\Big[-nq + (1-a)(1-b)\times \\ \times L_0^{\nu-1}A(\varphi_2)f(\varphi_1)(1-s)(1-u)e^{(\nu-1)n(t-t_0-\tau)-n\tau}\Big] + 1\Big\} = 0, \\ \varphi_1(t) \equiv k(t-\tau),\quad \varphi_2(t) \equiv q(t-\tau),\ \ t \ge t_0, \end{cases} \tag{21}$$

$$V\left(T,k_T,q\left(T\right),\varphi_1\left(T\right),\varphi_2\left(T\right)\right)=0\,,\ \forall\ \varphi_1\left(T\right)\ge 0\,,\ \varphi_2\left(T\right)\ge 0\,. \quad (22)$$

де шукана функція $V\left(t,k,q,\varphi_1,\varphi_2\right)$ — неперервно-диференційована один раз по t та двічі по k і q при всіх кусково-неперервних на $t\ge t_0$ функціях $\varphi_1\left(t\right)\ge 0$, $\varphi_2\left(t\right)\ge 0$, причому в рівнянні Беллмана φ_1 та φ_2 виступають деякими параметрами.

Оптимізуємо функцію R.

Функція R лінійна за керуванням u та найменшого значення отримує

$$u_{край}\left(t-\tau\right)=\begin{cases}1,\ \text{якщо}\ \psi\left(t,k,q\right)<0,\\ 0,\ \text{якщо}\ \psi\left(t,k,q\right)>0,\\ \text{довільне з}\ \left[0;1\right],\ \text{якщо}\ \psi\left(t,k,q\right)=0,\end{cases} \quad (23)$$

де $\psi\left(t,k,q\right)=\partial V/\partial k-\left[1-s\left(t-\tau\right)\right]\partial V/\partial q$, причому $\partial V/\partial k$ характеризує норму нагромадження капіталу, а $\left[1-s\left(t-\tau\right)\right]\partial V/\partial q$ — норму ефективності капіталовкладень у науково-технічний прогрес. Невідому функцію V будемо шукати у вигляді

$$V\left(t,k,q,\varphi_1,\varphi_2\right)=k^2+q^2+l\left(k+q\right)-\left\{k_T^2+q^2\left(T\right)+l\left[k_T+q\left(T\right)\right]\right\},\ t\ge t_0, \quad (24)$$

де стала l підлягає визначенню (вибору).

Підставимо (24) в рівняння Беллмана (22) і функцію $\psi\left(t,k,q\right)$.

Зауважимо, що

$$\psi\left(t,k,q\right)=2k-2\left[1-s\left(t-\tau\right)\right]q+ls\left(t-\tau\right)=0\,,\ t\ge t_0 \quad (25)$$

є особливим випадком і в площині kOq характеризує особливу пряму лінію (особлива пряма). Під особливою прямою $\psi\left(t,k,q\right)=0$ керування за нормою нагромадження капіталу $u_{край}\left(t-\tau\right)=1$, $t\ge t_0$ ($\psi\left(t,k,q\right)<0$), а над особливою прямою ($\psi\left(t,k,q\right)>0$) керування $u_{край}\left(t-\tau\right)=0,\ t\ge t_0$.

Розглянемо особливий випадок (особлива пряма) $\psi\left(t,k,q\right)=0$. Запишемо рівняння Беллмана (22) при $\varphi_1\left(t\right)\equiv k\left(t-\tau\right)$ і $\varphi_2\left(t\right)=L_0q\left(t-\tau\right)e^{n\left(t-t_0\right)}$:

$$-\left[2k\left(t\right)+l\right]\left(\mu+n\right)k\left(t\right)+\left[2q\left(t\right)+l\right]\left\{-nq\left(t\right)+\left(1-a\right)\left(1-b\right)\times\right.$$
$$\left.\times L_0^{\nu-1}\left[1-s\left(t-\tau\right)\right]e^{\left(\nu-1\right)\left(t-t_0-\tau\right)-n\tau}f\left(k\left(t-\tau\right)\right)A\left(L_0q\left(t-\tau\right)e^{n\left(t-t_0-\tau\right)}\right)\right\}+1=0, \quad (26)$$
$$t\ge t_0,\ k\left(y\right)=k_0\left(y\right),\ q\left(y\right)=q_0\left(y\right),\ y\in\left[t_0-\tau,t_0\right]$$

Одержимо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь (25)–(26) для визначення кусково-диференційованих на $t \geq t_0$ оптимізаційних величин $\tilde{k}(t)$ і $\tilde{q}(t)$, $t \geq t_0$ та яку можна розв'язати сумісним використанням методу кроків [5, с. 17] та одного з числових методів розв'язання системи нелінійних рівнянь [6].

Суть методу кроків: за $k_0(t)$ і $q_0(t)$, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ із системи (25)–(26) знаходимо $k_1(t)$ і $q_1(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, а за $k_1(t)$ і $q_1(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ визначаємо $k_2(t)$ і $q_2(t)$, $t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ і т.д. Тоді розв'язком системи (25)–(65) є:

$$\tilde{k}(t) = \begin{cases} k_1(t) \text{ при } t \in [t_0, t_0 + \tau], \\ k_2(t) \text{ при } t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau], \\ \ldots \end{cases} \quad \tilde{q}(t) = \begin{cases} q_1(t) \text{ при } t \in [t_0, t_0 + \tau], \\ q_2(t) \text{ при } t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau], \\ \ldots \end{cases}$$

За знайденими оптимізаційними величинами $\tilde{k}(t)$ і $\tilde{q}(t)$, $t \geq t_0$ визначаємо кусково-неперервні на $t \geq t_0$ магістральні керування за нормою нагромадження капіталу $u_{маг}^{(1)}(t-\tau)$ і $u_{маг}^{(2)}(t-\tau)$ із динамік питомого капіталу та питомого обсягу інвестицій у науково-технічний прогрес (19):

- із рівняння динаміки питомого капіталу:

$$u_{маг}^{(1)}(t-\tau) = \left[\dot{\tilde{k}}(t) + (\mu + n)\tilde{k}(t)\right](1-a)^{-1}(1-b)^{-1} L_0^{1-\nu} e^{(1-\nu)n(t-t_0-\tau)+n\tau} \times \\ \times A^{-1}\left(L_0 \tilde{q}(t-\tau) e^{n(t-t_0-\tau)}\right) f^{-1}\left(\tilde{k}(t-\tau)\right), \; t \geq t_0; \tag{27}$$

- із рівняння динаміки питомого обсягу інвестицій у науково-технічний прогрес:

$$u_{маг}^{(2)}(t-\tau) = 1 - \left[\dot{\tilde{q}}(t) + n\tilde{q}(t)\right](1-a)^{-1}(1-b)^{-1}\left[1 - s(t-\tau)\right]^{-1} L_0^{1-\nu} \times \\ \times e^{(1-\nu)n(t-t_0-\tau)+n\tau} A^{-1}\left(L_0 \tilde{q}_0(t-\tau) e^{n(t-t_0-\tau)}\right) f^{-1}\left(\tilde{k}(t-\tau)\right), \; t \geq t_0. \tag{28}$$

Вибором сталої l можна домогтися того, щоб $u_{маг}^{(1)} \in [0;1]$ і $u_{маг}^{(2)} \in [0;1]$. Відповідні кусково-диференційовані на $t \geq t_0$ крайові $k_{край}^{(i)}(t)$ та $q_{край}^{(i)}(t)$, $t \geq t_0$, $i = 1,2$ та кусково-диференційовані на $t \geq t_0$ магістральні траєкторії визначаються методом Рунге-Кутта [7, с. 167–181] із відповідних початкових задач із предісторіями (19) при

$u\left(t-\tau\right)=u_{край}^{(i)}\left(t-\tau\right)$ та $u\left(t-\tau\right)=u_{маг}^{(i)}\left(t-\tau\right)$, $t\geq t_0$. Причому, $u_{край}^{(1)}\left(t-\tau\right)=0$ та $u_{край}^{(2)}\left(t-\tau\right)=1$, $t\geq t_0$. Таким чином, отримали два крайових $\Pi_{край}^{(i)}=\left\{k_{край}^{(i)}\left(t\right),\, q_{край}^{(i)}\left(t\right),\, u_{край}^{(i)}\left(t-\tau\right),\, t\geq t_0\right\}$, $i=1,2$ та два магістральних $\Pi_{маг}^{(i)}=\left\{k_{маг}^{(i)}\left(t\right),\, q_{маг}^{(i)}\left(t\right),\, u_{маг}^{(i)}\left(t-\tau\right),\, t\geq t_0\right\}$, $i=1,2$ процеси для вибору пріоритетного із них на початковій стадії протікання економічного процесу, тобто отримали чотири економічних режими: два крайових і два магістральних.

Алгоритм побудови оптимального процесу при виборі економічного режиму серед крайових процесів на початковій стадії

1. Виберемо один із двох крайових режимів

$$\Pi_{край}=\left\{k_{край}\left(t\right),\, q_{край}\left(t\right),\, u_{край}\left(t-\tau\right),\, t\geq t_0\right\}:$$

- при $\psi\left(t,k_{край},q_{край}\right)=2k_{край}\left(t\right)-2s\left(t-\tau\right)q_{край}\left(t\right)+ls\left(t-\tau\right)<0$, $t\in\left[t_0-\tau,t_0\right]$ крайове керування $u_{край}\left(t-\tau\right)=1,\;\; t\geq t_0$;
- при $\psi\left(t,k_{край},q_{край}\right)>0$, $t\in\left[t_0-\tau,t_0\right]$ крайове керування $u_{край}\left(t-\tau\right)=0,\;\; t\geq t_0$.

2. Для вибраного крайового режиму $\Pi_{край}$ при крайовому керуванні $u_{край}\left(t-\tau\right)$, $t\geq t_0$ економічна система буде рухатися по крайовим траєкторіям $k_{край}\left(t\right)$ і $q_{край}\left(t\right)$, $t\geq t_0$ до зустрічі з особливою прямою $\psi\left(t,k,q\right)=0$, $t\geq t_0$. Момент часу $t=\zeta_1$ зустрічі з особливою прямою буде моментом перемикання керування та визначається ζ_1 із рівняння одним із числових методів [7, с. 29–40; 8, с.17–75]:

$$2k_{край}\left(t\right)-2s\left(t-\tau\right)q_{край}\left(t\right)+ls\left(t-\tau\right)=0,\; t\geq t_0.$$

У цей момент $t=\zeta_1$ система сходить із крайових траєкторій і починає рухатися по вибраному магістральному режимі (процесу) $\Pi_{маг}=\left\{k_{маг}\left(t\right),q_{маг}\left(t\right),u_{маг}\left(t-\tau\right),\, t\geq t_0\right\}$, де кусково-диференційовані на $t\geq\zeta_1$ магістральні траєкторії $k_{маг}$ і $q_{маг}$ є розв'язками динамік питомого капіталу і питомого обсягу інвестицій у прогрес системи (19) при початкових умовах із передісторіями $k\left(y\right)=k_{край}\left(y\right)$ і $q\left(y\right)=$ $=q_{край}\left(y\right)$, $y\in\left[\zeta_1-\tau,\zeta_1\right]$. Цю початкову задачу із передісторіями можна розв'язати сумісним використанням методу кроків [5, с. 167–181]. Рух по магістральним траєкторіям (по особливій прямій) означає, що лише на особливій прямій $\psi(t,k,q)=0$ норма ефективності накопичення капіталу дорівнює нормі ефективності капіталовкладень у науку. Коли рух по особливій прямій $\psi(t,k,q)=0$ (по магістралях) закінчується, тобто сходить із особливої прямої, то цей момент ζ_2 (як крайній правий момент) є моментом перемикання керування та визначається з рівняння одним із числових методів [7, с. 29–40; 8, с. 17–75, 6]:

$$2k_{маг}(t)-2s(t-\tau)q_{маг}(t)+ls(t-\tau)=0\,,\ t>\zeta_1\,.$$

Відзначимо, що на часовому відрізку $[\zeta_1,\zeta_2]$ це рівняння перетворюється в тотожність. Можливий випадок, коли цей відрізок є точкою, тобто $\zeta_1=\zeta_2$.

3. При сходженні з особливої прямої $\psi(t,k,q)=0$ у момент ζ_2 (з магістральних траєкторій) система дальше рухається по новому крайовому режимі $\Pi^{(н)}_{край}=\left\{k^{(н)}_{край}(t),\,q^{(н)}_{край}(t),\,u_{край}(t-\tau)=1,\ t\ge\zeta_2\right\}$, де кусково-диференційовані на $t\ge\zeta_2$ крайові траєкторії $k^{н}_{маг}$ і $q^{н}_{маг}$ є розв'язками рівнянь динамік питомого капіталу k і питомого обсягу інвестицій у науково-технічний прогрес q при $u(t-\tau)=$ $=u_{край}(t-\tau)=1,\ \ t\ge\zeta_2$ та початковий умовах із передісторіями $k(y)=k_{маг}(y)$ і $q(y)=q_{маг}(y)$, $y\in[\zeta_2-\tau,\zeta_2]$. Рух по цим крайовим траєкторіям відбувається до кінцевого моменту часу T , який є розв'язком нелінійного рівняння $k^{(н)}_{край}(T)=k_T$ та який можна визначити одним із числових методів [7, с. 29-40; 8, с.17-75, 6].

4. Оптимальним процесом $\Pi_{оп}=\left\{k_{оп}(t),\,q_{оп}(t),u_{оп}(t-\tau)\right\}$, $t\in[t_0,T]$ згідно з результатами [4, с. 117–119, 158; 9, с. 185–192] є склейка у момент перемикання керування ζ_1 вибраного крайового процесу $\Pi_{край}=\left\{k_{край}(t),\ q_{край}(t),\ u_{край}(t-\tau)=1,\ t\in[t_0,\zeta_1]\right\}$ із вибраним магістральним процесом $\Pi_{маг}=\left\{k_{маг}(t),q_{маг}(t),u_{маг}(t-\tau),\right.$ $\left.t\in[\zeta_1,\zeta_2]\right\}$ та склейка у момент перемикання керування ζ_2 цього магістрального процесу з новим крайовим процесом

$$\Pi^{(н)}_{край}=\left\{k^{(н)}_{край}(t),\,q^{(н)}_{край}(t),\,u_{край}(t-\tau)=1,\ t\in[\zeta_2,T]\right\},$$

тобто

$$k_{on}(t)=\begin{cases} k_{край}(t) \text{ при } t\in[t_0,\zeta_1], \\ k_{маг}(t) \text{ при } t\in[\zeta_1,\zeta_2], \\ k_{край}^{(н)}(t) \text{ при } t\in[\zeta_2,T], \end{cases} \quad q_{on}(t)=\begin{cases} q_{край}(t) \text{ при } t\in[t_0,\zeta_1], \\ q_{маг}(t) \text{ при } t\in[\zeta_1,\zeta_2], \\ q_{край}^{(н)}(t) \text{ при } t\in[\zeta_2,T], \end{cases}$$

$$u_{on}(t-\tau)=\begin{cases} u_{край}(t-\tau) \text{ при } t\in[t_0,\zeta_1], \\ u_{маг}(t-\tau) \text{ при } t\in[\zeta_1,\zeta_2], \\ u_{край}(t-\tau) \text{ при } t\in[\zeta_2,T], \end{cases} \quad t\in[t_0,T].$$

Причому, оптимальне керування за нормою накопичення капіталу u_{on} є кусково-неперервною функцією на $[t_0,T]$, а оптимальні траєкторії за питомим капіталом k_{on} і за питомим обсягом інвестицій у науково-технічний прогрес q_{on} — кусково-диференційованими функціями на $[t_0,T]$. Вихід із алгоритму.

Алгоритм побудови оптимального процесу при виборі економічного режиму серед магістральних процесів на початковій стадії

1. Виберемо магістральний режим (процес)

$$\Pi_{маг}=\left\{k_{маг}(t),\, q_{маг}(t),\, u_{маг}(t-\tau),\, t\ge t_0\right\}$$

серед двох магістральних режимів. При цьому економічна система рухається по особливій прямій $\psi(t,k,q)=0$.

2. Момент ζ, коли економічна система сходить із особливої прямої $\psi(t,k,q)=0$, є моментом перемикання керування як правий крайній момент знаходження економічної системи на особливій прямій $\psi(t,k,q)=0$. Визначається ζ із нелінійного рівняння $2k_{маг}(t)-2s(t-\tau)q_{маг}(t)+ls(t-\tau)=0$, $t>t_0$ та є найбільшим розв'язком цього рівняння.

3. Після сходження (тобто при $t>\zeta$) економічна система рухається по новим крайовим траєкторіям крайового режиму $\Pi_{край}^{(н)}=$ $=\left\{k_{край}^{(н)}(t),\, q_{край}^{(н)}(t),\, u_{край}(t-\tau)=1,\ t\ge\zeta\right\}$ при крайовому керуванні $u_{край}(t-\tau)=1$, $t>\zeta$, де крайові траєкторії $k_{край}^{(н)}(t)$ і $q_{край}^{(н)}(t)$, $t\ge\zeta$ є кусково-диференційованими на $t\ge\zeta$ розв'язками рівнянь динамік питомого капіталу k і питомого обсягу інвестицій у науково-технічний прогрес q системи (19) при крайовому керуванні $u_{край}(t-\tau)=1$, $t\ge\zeta$

та початкових умовах із передісторіями $k(y)=k_{маг}(y)$ і $q(y)=q_{маг}(y)$, $y\in[\zeta-\tau,\zeta]$. Економічна система рухається до моменту часу T, яке є розв'язком нелінійного рівняння $k_{край}(T)=k_T$ та яке можна розв'язати одним із числових методів [7, с. 29–40; 8, с.17–75, 6].

4. Оптимальним процесом $П_{оп}=\{k_{оп}(t),q_{оп}(t),u_{оп}(t-\tau)\}$, $t\in[t_0,T]$ згідно з результатами є склейка у момент перемикання керування ζ вибраного магістрального процесу $П_{маг}$ і нового крайового процесу $П_{край}^{(н)}$, тобто

$$k_{оп}(t)=\begin{cases}k_{маг}(t) \text{ при } t\in[t_0,\zeta],\\ k_{край}^{(н)}(t) \text{ при } t\in[\zeta,T],\end{cases}\quad q_{оп}(t)=\begin{cases}q_{маг}(t) \text{ при } t\in[t_0,\zeta],\\ q_{край}^{(н)}(t) \text{ при } t\in[\zeta,T],\end{cases}$$

$$u_{оп}(t-\tau)=\begin{cases}u_{край}(t-\tau) \text{ при } t\in[t_0,\zeta],\\ u_{край}(t-\tau) \text{ при } t\in[\zeta,T],\end{cases}\quad t\in[t_0,T].$$

Причому, оптимальне керування за нормою накопичення капіталу $u_{оп}$ є кусково-неперервною функцією на $[t_0,T]$, а оптимальні траєкторії за питомим капіталом $k_{оп}$ і за питомим обсягом інвестицій у науково-технічний прогрес $q_{оп}$ — кусково-диференційованими функціями на $[t_0,T]$. Вихід із алгоритму.

Вище описане сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай економічні показники економіко-математичної моделі (19)–(20) задовольняють умови:

1) $a\in(0;1)$, $b\in(0;1)$, $\nu\in(0;2)$, $n>0$, $t_0\ge 0$, $T>t_0$, $\tau\ge 0$, $\mu\in(0;1)$, $L_0>0$ — сталі;
2) функції: $s\in(0;1)$ — кусково-диференційована на $t\ge t_0$, а k_0 і q_0 — кусково-диференційовані на $[t_0-\tau,t_0]$;
3) макровиробнича функція $f(k\ge 0)\ge 0$ — двічі неперервно-диференційована, монотонна зростаюча, вгнута та $\lim\limits_{k\to 0}f'(k)=\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}f'(k)=0$.
4) мультиплікатор науково-технічного прогресу $A(Q\ge 0)>0$ як функція двічі неперервно-диференційована, монотоння зростаюча, вгнута та $\lim\limits_{Q\to 0}A'(Q)=\infty$ і $\lim\limits_{Q\to\infty}A'(Q)=0$.

Тоді економіко-математична модель (19)–(20) має два оптимальних процеси, що дорівнює кількості (двом) магістральним процесів. Причому, оптимальне керування за нормою нагромадження капіталу є кусково-неперервною функцією на $t \ge t_0$, а оптимальні траєкторії з питомим капіталом і за питомим обсягом інвестицій в науковий прогрес — кусково-диференційовані на $t \ge t_0$ функції.

Зауваження. Вище описана методика має місце для кусково-лінійних функцій $f(k)$ і $A(Q)$.

Висновки.

1. Запропонована модель однопродуктової макроекономіки зростання з ендогенним технічним прогресом із урахуванням споживання та інвестиційного запізнення та проведено дослідження.
2. Запропонована економіко-математична модель має два оптимальних процеси, у яких оптимальні керування за нормою нагромадження капіталу є кусково-неперервними функціями, а оптимальні траєкторії за питомим капіталом і за питомим обсягом інвестицій у науково-технічний прогрес — кусково-диференційовані функції.
3. Для запропонованої економіко-математичної моделі проведено опис структури оптимальних процесів.
4. Запропонована методика дослідження моделі однопродуктової макроекономіки зростання з ендогенним технічним прогресом із урахуванням споживання та інвестиційного запізнення доповнює методи математичного моделювання, дає можливість підвищити адекватність планування норм ефективності нагромадження капіталу і обсягу інвестицій у науково-технічний прогрес та відповідно прийняття рішень для таких економічних процесів і систем.

Список використаних джерел:

1. Пономаренко О. І. Основи математичної економіки / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. — К. : Інформтехніка, 1995. — 320 с.
2. Бойчук М. В. Моделювання однопродуктової макроекономіки зростання з ендогенним технічним прогресом з урахуванням споживання / М. В. Бойчук, А. Р. Семчук // Вісник Чернівецького торговельно-економічного інституту. — Чернівці : ЧТЕІ КНТЕУ, 2015. — Вип. ІІІ (59). Економічні науки. — С. 176–188.
3. Бойчук М. В. Моделювання та оптимізація повного циклу однопродуктової макроекономіки зростання з урахуванням екологічного фактора : монографія / М. В. Бойчук, А. Р. Семчук. — Чернівці : Місто, 2012. — 208 с.
4. Андреева Е. А. Управление системами с последействием / Е. А. Андреева, В. Б. Колмановский. — М. : Наука, 1992. — 336 с.
5. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументами / Л. Э. Эльсгольц. — М. : Наука, 1971. — 296 с.
6. Бейко И. В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации / И. В. Бейко, Б. Н. Бублик, П. Н. Зинько. — К. : Вища школа, 1983. — 512 с.

7. Ясинський В. К. Основи обчислювальних методів / В. К. Ясинський. — Чернівці : Золоті литаври, 2005. — 396 с.
8. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М. : Наука, 1980. — 518 с.
9. Григорків В. С. Оптимальне керування в економіці / В. С. Григорків. — Чернівці : ЧНУ, 2011. — 200 с.

A single-component macroeconomic growth model with endogenous technological progress taking into account consumption and investment delay was proposed. In the mathematical model it was taken into account the impact on the final output of consumption, investment in fixed assets expand, improve production efficiency, taking into account expenses on science, taxation, government spending, balance and eliminate pollution in the investment delay. The proposed model uses sufficient conditions for optimality late to study.

Key words: *endogenous technological progress, investment delay, optimal control, optimal process, edge process, the main process, the time switch control.*

Отримано: 20.04.2016

УДК 517.9

І. В. Веригіна,
О. М. Бузинний
Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

КОНФЛІКТНИЙ ПЕРЕРОЗПОДІЛ РЕСУРСНОГО ПРОСТОРУ: ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МІР ЗАХОПЛЕНИХ ТЕРИТОРІЙ

Досліджується модель про конфліктний перерозподіл ресурсного простору (території) між парою опонентів у випадку нескінченого фрактального подрібнення простору. Доведено існування граничних значень мір Лебега захоплених опонентами територій, дано оцінку цих мір за допомогою функції розподілу стандартного нормального розподілу. Встановлено зв'язок між кроком подрібнення та заданою точністю наближення мір захоплених територій до своїх граничних значень. За допомогою комп'ютерного моделювання одержано графіки, що демонструють поведінку мір захоплених територій із збільшенням кроку подрібнення.

Ключові слова: *динамічна система конфлікту, конфліктний перерозподіл ресурсного простору, стратегії опонентів, самоподібні міри.*

Вступ. Теорія динамічних систем конфлікту (ДСК), розвинута у [1–3], застосовується до задачі про перерозподіл ресурсного простору. У [4] розв'язання цієї задачі запропоновано для випадку, коли початковий поділ ресурсного простору відбувається на два регіони, тобто при $n = 2$,

