ОПТИКА, ЛАЗЕРИ, КВАНТОВА ЕЛЕКТРОНІКА

ПОЛЯРИЗАЦІЙНА СТРУКТУРА КОНОСКОПІЧНИХ КАРТИН ПЛАНАРНИХ НЕМАТИЧНИХ ТА ХОЛЕСТЕРИЧНИХ РІДКОКРИСТАЛІЧНИХ КОМІРОК

Р.Г. ВОВК, О.Д. КИСЕЛЬОВ

Інститут фізики НАН України
(Просп. Науки, 46, Київ 03028; e-mail: roman.vovk@gmail.com)

УДК 535.372

Теоретично досліджено поляризаційні розподіли світла в коноскопічних картинах планарних нематичних та холестеричних рідкокристалічних (РК) комірок. Геометрію поляризаційних структур описано за допомогою поляризаційних сингулярностей: C-точок (точок з циркулярною поляризацією) і L-ліній (ліній, вздовж яких поляризація лінійна). Розглянуто умови формування поляризаційних сингулярностей (C-точок) в ансамблі коноскопічних картин, параметризованих азимутом поляризації і еліптичністю падаючої світлової хвилі. Показано, що характерною особливістю цих умов є селективність за поляризаційними параметрами.

1. Вступ

В останні роки значно підвищився інтерес до поляризаційної оптики анізотропних середовищ, що, зокрема, пов'язано з широким використанням рідкокристалічних технологій [1, 2]. Рідкі кристали (РК) являють собою анізотропні середовища, анізотропія яких визначається їх орієнтаційною структурою, чутливою до зовнішніх полів та граничних умов [3]. Саме оптичні властивості РК визначають їх технологічну важливість.

Коноскопія давно і успішно використовується для вивчення орієнтаційної структури РК [4–6]. Як відомо, коноскопічний метод полягає в дослідженні РК зразка в розбіжних пучках у системі схрещених поляризаторів. У результаті на виході з коноскопа можна спостерігати коноскопічну картину, яка утворюється за рахунок інтерференції чотирьох поляризованих власних мод РК комірки. Але при використанні системи схрещених поляризаторів губиться значна частина інформації про стан поляризації світла, яка може бути корисною, наприклад, для розробки нових і вдосконалення існуючих методів ідентифікації орієнтаційних структур в анізотропних середовищах. Таким чином, виникає проблема дослідження поляризаційних розподілів світла, які лежать в основі коноскопічних картин.

Такі розподіли можна назвати *поляризаційно розділеними коноскопічними картинами*, геометричним зображенням яких є поле поляризаційних еліпсів на площині спостереження [7]. У наших попередніх роботах [7, 8] для характеризації геометрії поляризаційно розділених коноскопічних картин використовувалися поляризаційні сингулярності C-точки (точки, в яких поляризація світла циркулярна) і L-лінії (ліній, вздовж яких поляризація світла лінійна). Саме поляризаційні сингулярності є стійкими топологічними дефектами [9] і важливими елементами, які характеризують геометрію неоднорідно поляризованих світлових полів [10, 11].

Найбільш детально геометрію поляризаційно розділених коноскопічних картин було досліджено у випадку гомеотропно орієнтованого нематичного РК [8], коли орієнтаційна структура характеризується циліндричною симетрією з віссю обертання вздовж нормалі до комірки. У роботі [8], змінюючи поляризаційні параметри (азимут поляризації і еліптичність падаючої хвилі), вдалося теоретично і експериментально дослідити поведінку C-точок у відповідному ансамблі поляризаційно розділених коноскопічних картин гомеотропної комірки нематика. Теоретичний аналіз також дозволив отримати сценарії

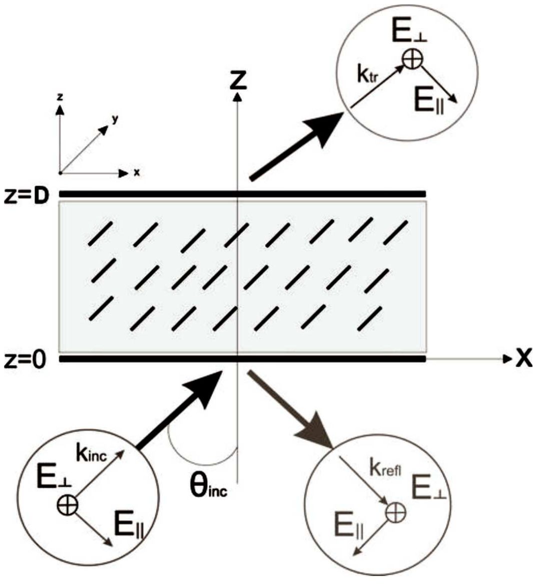


Рис. 1. Геометрія НРК комірки у площині падіння

народження та анігіляції C-точок у таких поляризаційних розподілах.

Звісно, що наступним кроком має бути дослідження поляризаційно розділених коноскопічних картин РК з іншими орієнтаційними структурами. Слід очікувати, що найбільш важливу роль будуть відігравати ефекти, пов'язані з порушенням циліндричної симетрії гомеотропної конфігурації. З метою дослідження таких ефектів у цій роботі розглянемо інший граничний випадок, коли оптична вісь анізотропного середовища є планарно орієнтованою. Зокрема, теоретично вивчимо поляризаційно розділені коноскопічні картини планарно орієнтованих нематичних та холестеричних РК комірок, а також визначимо умови виникнення C-точок у таких поляризаційних розподілах.

2. Теорія

Розглянемо нематичну РК (НРК) комірку товщиною D, що розташована між підкладками з нормаллю вздовж осі z: $z = 0$ і $z = D$, рис. 1. У випадку планарно орієнтованого нематика РК директор $\widehat{\mathbf{d}}$, що визначає орієнтацію оптичної осі НРК, лежить у площині підкладки і має такий вигляд:

$$\hat{\mathbf{d}} = d_x\,\hat{\mathbf{x}} + d_y\,\hat{\mathbf{y}} = \cos\phi_\mathrm{d}\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi_\mathrm{d}\,\hat{\mathbf{y}}, \tag{1}$$

де ϕ_d — азимутальний кут директора. Цей кут є сталою для однорідної планарної НРК орієнтаційної структури, тоді як рівноважна конфігурація директора в холестеричному РК описується рівнянням (1) з азимутальним кутом $\phi_\mathrm{d} = qz + \phi_0$, де $q = 2\pi/P$ і P – хвильове число і крок холестеричної спіралі відповідно [3]. Звісно, якщо крок холестеричної спіралі прямує до нескінченності, то в цьому випадку $\phi_\mathrm{d} = \phi_0$, і тому планарно орієнтований нематичний РК можна розглядати як холестерик з нескінченним кроком.

Для переважної більшості відомих нематиків, анізотропія одновісна і діелектричний тензор НРК має загальний вигляд [3]:

$$\varepsilon = \varepsilon_\perp I_3 + \Delta\varepsilon\,\widehat{\mathbf{d}} \otimes \widehat{\mathbf{d}} \tag{2}$$

де $\Delta\varepsilon = \varepsilon_\| - \varepsilon_\perp$ і I_n одинична $n \times n$ матриця. Власні значення тензора [3] дають звичайний та надзвичайний показники заломлення, $n_o = \sqrt{\mu\varepsilon_\perp}$ і $n_e = \sqrt{\mu\varepsilon_\|}$, де μ магнітна проникність НРК.

Далі будемо вважати, що зовнішнє середовище є ізотропним з діелектричною константою ϵ_m і магнітною проникністю μ_m. На рис. 1 показано, що є дві плоскі хвилі в напівпросторі $z \le 0$: *падаюча хвиля* $\{\mathbf{E}_\mathrm{inc}, \mathbf{H}_\mathrm{inc}\}$ і *відбита хвиля* $\{\mathbf{E}_\mathrm{refl}, \mathbf{H}_\mathrm{refl}\}$. *Пропущена хвиля* $\{\mathbf{E}_\mathrm{tr}, \mathbf{H}_\mathrm{tr}\}$ і *відбита хвиля* збуджуються падаючою хвилею і поширюються в паралельному напрямку в напівпросторі $z \ge D$. Таким чином, поле поза коміркою є таким:

$$\mathbf{E}|_{z<0} = \mathbf{E}_\mathrm{inc}(\hat{\mathbf{k}}_\mathrm{inc})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_\mathrm{inc}\cdot\mathbf{r})} + \mathbf{E}_\mathrm{refl}(\hat{\mathbf{k}}_\mathrm{refl})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_\mathrm{refl}\cdot\mathbf{r})}, \tag{3a}$$

$$\mathbf{E}|_{z>D} = \mathbf{E}_\mathrm{tr}(\hat{\mathbf{k}}_\mathrm{tr})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_\mathrm{tr}\cdot\mathbf{r})}, \tag{3b}$$

де, внаслідок граничних умов неперервності тангенціальних компонент електричного та магнітного полів, хвильові вектори $\mathbf{k}_\mathrm{inc}$, $\mathbf{k}_\mathrm{refl}$ і $\mathbf{k}_\mathrm{tr}$ лежать у площині падіння (координатна площина x–z) і мають такий вигляд:

$$\mathbf{k}_\alpha = k_\mathrm{vac}\mathbf{q}_\alpha = k_\mathrm{m}\hat{\mathbf{k}}_\alpha = k_x\,\hat{\mathbf{x}} + k_z^{(\alpha)}\,\hat{\mathbf{z}}, \tag{4}$$

де $\alpha \in \{\mathrm{inc}, \mathrm{refl}, \mathrm{tr}\}$, $k_\mathrm{m}/k_\mathrm{vac} = n_\mathrm{m} = \sqrt{\mu_\mathrm{m}\epsilon_\mathrm{m}}$ — показник заломлення зовнішнього середовища і $k_\mathrm{vac} = \omega/c = 2\pi/\lambda$ — хвильове число у вакуумі. Компоненти хвильових векторів виражаються через кут падіння θ_inc таким чином:

$$k_x = k_\mathrm{m}\sin\theta_\mathrm{inc} \equiv k_\mathrm{vac}\,q_x, \tag{5}$$

$$k_z^{(\mathrm{inc})} = k_z^{(\mathrm{tr})} = -k_z^{(\mathrm{refl})} = k_\mathrm{m}\cos\theta_\mathrm{inc} \equiv k_\mathrm{vac}\,q_\mathrm{m}, \tag{6}$$

$$q_x = n_\mathrm{m}\sin\theta_\mathrm{inc}, \quad q_\mathrm{m} = \sqrt{n_\mathrm{m}^2 - q_x^2}. \tag{7}$$

Векторні амплітуди електричного поля плоских хвиль є

$$\mathbf{E}_\alpha(\hat{\mathbf{k}}_\alpha) = E_\parallel^{(\alpha)}\big(k_z^{(\alpha)}\,\hat{\mathbf{x}} - k_x\,\hat{\mathbf{z}}\big)k_{\mathrm{m}}^{-1} + E_\perp^{(\alpha)}\hat{\mathbf{y}}, \tag{8}$$

де $E_\parallel^{(\alpha)}$ і $E_\perp^{(\alpha)}$ — компоненти електричного поля, які паралельні і перпендикулярні площині падіння відповідно.

Електромагнітне поле падаючої, пропущеної та відбитої хвиль, що поширюються в зовнішньому середовищі, має загальний вигляд

$$\{\mathbf{E},\mathbf{H}\} = \{\mathbf{E}(z),\mathbf{H}(z)\}\,\mathrm{e}^{i(k_x x-\omega t)}. \tag{9}$$

Використовуючи співвідношення (9), можна також отримати рівняння для тангенціальних компонент електромагнітного поля всередині анізотропного шару в матричній формі [12]:

$$-i\partial_\tau \mathbf{F} = \boldsymbol{\mathcal{M}}\cdot\mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix}\boldsymbol{\mathcal{M}}_{11} & \boldsymbol{\mathcal{M}}_{12}\\ \boldsymbol{\mathcal{M}}_{21} & \boldsymbol{\mathcal{M}}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_P\\ \mathbf{H}_P\end{pmatrix}, \quad \tau\equiv k_{\mathrm{vac}}z, \tag{10}$$

де $\mathbf{E}_P = (E_x, E_y)^T$ і $\mathbf{H}_P = (H_y, -H_x)^T$.

Загальні вирази для 2×2 матриць $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{ij}$, що характеризують блочну структуру матриці $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, наведено у роботах [7, 8]. Для діелектричного тензора (2) і директора (1) матриці $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{ij}$ мають вигляд

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_{12} = \mu\boldsymbol{\mathcal{I}}_2 - \frac{q_x^2}{\varepsilon_\perp}\,\mathrm{diag}(1,0), \quad \boldsymbol{\mathcal{M}}_{ii} = 0, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_{21} = -\frac{q_x^2}{\mu}\,\mathrm{diag}(0,1) + \varepsilon_c\boldsymbol{\mathcal{I}}_2 +$$

$$+\frac{\Delta\varepsilon}{2}\begin{pmatrix}\cos(2\phi_{\mathrm{d}}) & \sin(2\phi_{\mathrm{d}})\\ \sin(2\phi_{\mathrm{d}}) & -\cos(2\phi_{\mathrm{d}})\end{pmatrix}, \tag{12}$$

де $\varepsilon_c = (\varepsilon_\parallel + \varepsilon_\perp)/2$.

Як розв'язок граничної задачі отримаємо лінійні співвідношення між компонентами падаючої, пропущеної та відбитої хвиль:

$$\begin{pmatrix}E_\parallel^{(\mathrm{tr})}\\ E_\perp^{(\mathrm{tr})}\end{pmatrix} = \boldsymbol{\mathcal{T}}\begin{pmatrix}E_\parallel^{(\mathrm{inc})}\\ E_\perp^{(\mathrm{inc})}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}E_\parallel^{(\mathrm{refl})}\\ E_\perp^{(\mathrm{refl})}\end{pmatrix} = \boldsymbol{\mathcal{R}}\begin{pmatrix}E_\parallel^{(\mathrm{inc})}\\ E_\perp^{(\mathrm{inc})}\end{pmatrix}, \tag{13}$$

де $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ — *матриця пропускання*, а $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ — *матриця відбиття*. Основна проблема полягає в обчисленні цих двох матриць.

У роботах [7, 8] показано, що для знаходження матриць $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ і $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ потрібно обчислити матрицю

$$\boldsymbol{\mathcal{W}} = \boldsymbol{\mathcal{V}}_{\mathrm{m}}^{-1}\cdot\boldsymbol{\mathcal{U}}^{-1}\cdot\boldsymbol{\mathcal{V}}_{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\mathcal{W}}_{11} & \boldsymbol{\mathcal{W}}_{12}\\ \boldsymbol{\mathcal{W}}_{21} & \boldsymbol{\mathcal{W}}_{22}\end{pmatrix} \tag{14}$$

і скористатися співвідношеннями

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{\mathcal{W}}_{11}^{-1}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\mathcal{W}}_{21}\cdot\boldsymbol{\mathcal{W}}_{11}^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{W}}_{21}\cdot\boldsymbol{\mathcal{T}}, \tag{16}$$

які пов'язують матриці пропускання і відбиття з блок-матрицями $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{11}$ і $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{21}$.

Вираз для матриці (14) включає зворотний оператор еволюції $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{U}}^{-1}(h,0) = \boldsymbol{\mathcal{U}}(0,h)$, де $h = k_{\mathrm{vac}}D$, і оператор $\boldsymbol{\mathcal{U}}(\tau,\tau_0)$ – розв'язок матричної задачі Коші:

$$-i\partial_\tau\boldsymbol{\mathcal{U}}(\tau,\tau_0) = \boldsymbol{\mathcal{M}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{U}}(\tau,\tau_0), \quad \boldsymbol{\mathcal{U}}(\tau_0,\tau_0) = \boldsymbol{\mathcal{I}}_4, \tag{17}$$

та матрицю власних векторів для зовнішнього середовища

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{m}} & -\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{m}}\\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{m}} & \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{m}}\end{pmatrix} \tag{18}$$

яка характеризується двома діагональними 2×2 матрицями $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{m}} = \mathrm{diag}(q_{\mathrm{m}}/n_{\mathrm{m}}, 1)$ і $\mu_{\mathrm{m}}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{m}} = \mathrm{diag}(n_{\mathrm{m}}, q_{\mathrm{m}})$, де $\boldsymbol{\sigma}_3 = \mathrm{diag}(1,-1)$.

Відомо, що отримати аналітичні вирази для оператора еволюції і матриці пропускання холестеричного РК можливо тільки у випадку нормального падіння світла на РК комірку, коли $q_x = 0$. У випадку ж похилого падіння з $q_x \neq 0$ систему рівнянь (17) можна розв'язати лише чисельно. Тому наведемо аналітичні результати лише для матриці пропускання нематичного РК.

Для власних хвиль електромагнітного поля в НРК означимо матрицю власних значень

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \mathrm{diag}(q_e, q_o), \tag{19}$$

$$q_e = \sqrt{n_e^2 - q_x^2(1+u_a d_x^2)}, \quad q_o = \sqrt{n_o^2 - q_x^2}, \tag{20}$$

де $u_a = \Delta\epsilon/\epsilon_\perp$ параметр анізотропії НРК зразка, і дві блок-матриці власних векторів є такими:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mu\begin{pmatrix}d_x[1-q_x^2/n_o^2] & d_y q_o\\ d_y & -d_x q_o\end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix}d_x q_e & d_y n_o^2\\ d_y q_e & -d_x[n_o^2 - q_x^2]\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Тоді для матриці (14) маємо такий вираз:

$$\boldsymbol{\mathcal{W}} = N_{\mathrm{m}}^{-1}\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{\mathcal{I}}_2, \boldsymbol{\sigma}_3) \cdot \tilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}} \cdot \mathrm{diag}(\boldsymbol{\mathcal{I}}_2, \boldsymbol{\sigma}_3), \tag{23}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}_+ & \boldsymbol{\mathcal{A}}_- \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_- & \boldsymbol{\mathcal{A}}_+ \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathrm{d}} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}_+^T & -\boldsymbol{\mathcal{A}}_-^T \\ -\boldsymbol{\mathcal{A}}_-^T & \boldsymbol{\mathcal{A}}_+^T \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{W}}_- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\mathcal{W}}_+ \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{W}}_\pm = \exp[\pm i\boldsymbol{\mathcal{Q}}h] \cdot \boldsymbol{\mathcal{N}}^{-1}, \tag{25}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_\pm = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{m}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{H}} \pm \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{m}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{N}} = \mathrm{diag}(N_e, N_o), \tag{26}$$

$$N_e = \frac{2q_e\mu}{n_o^2}(n_o^2 - q_x^2 d_x^2), \quad N_o = 2q_o\mu(n_o^2 - q_x^2 d_x^2), \tag{27}$$

де $N_{\mathrm{m}} = 2q_{\mathrm{m}}/\mu_{\mathrm{m}}$.

Підставимо рівняння (23)–(27) у співвідношення (15), (16) і отримаємо такі вирази для матриць пропускання і відбиття:

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = N_{\mathrm{m}}\tilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{11}^{-1}, \quad \boldsymbol{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \tilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{21} \cdot \tilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{11}^{-1}, \tag{28}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{11} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_+ \cdot \boldsymbol{\mathcal{W}}_- \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}_+^T - \boldsymbol{\mathcal{A}}_- \cdot \boldsymbol{\mathcal{W}}_+ \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}_-^T, \tag{29}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{21} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_- \cdot \boldsymbol{\mathcal{W}}_- \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}_+^T - \boldsymbol{\mathcal{A}}_+ \cdot \boldsymbol{\mathcal{W}}_+ \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}_-^T, \tag{30}$$

Слід відзначити, що матриця пропускання $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ розрахована у площині падіння. Вона визначає матрицю пропускання коноскопічних картин $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$, яка в циркулярному базисі описується співвідношенням [7, 8]:

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{T}}}(\rho, \phi) = \exp(-i\phi\,\boldsymbol{\sigma}_3)\boldsymbol{\mathcal{T}}_c(\rho, \phi_{\mathrm{d}} - \phi)\exp(i\phi\,\boldsymbol{\sigma}_3), \tag{31}$$

$$\rho = r\tan\theta_{\mathrm{inc}}, \quad \phi = \phi_{\mathrm{inc}}, \tag{32}$$

де $\boldsymbol{\mathcal{T}}_c = \boldsymbol{\mathcal{C}}\boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{\mathcal{C}}^\dagger$, $\boldsymbol{\mathcal{C}} = 2^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ і r – апертурно залежний масштабний коефіцієнт. На площині спостереження коноскопічної картини ρ і ϕ є полярними координатами (декартові координати: $x = \rho\cos\phi$ і $y = \rho\sin\phi$), які визначаються кутом падіння θ_{inc} і азимутальним кутом площини падіння, ϕ_{inc}.

Важливо відзначити, що в центрі коноскопічної картини ($\rho = 0$), якому відповідає випадок нормального падіння ($\theta_{\mathrm{inc}} = 0$), матриця пропускання (31) не залежить від азимутального кута площини падіння ϕ. Використовуючи аналітичні результати для матриць пропускання НРК і ХРК комірок при $q_x = 0$, можна показати, що

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{T}}}\Big|_{\rho=0} = \boldsymbol{\mathcal{T}}_c(0, \phi_{\mathrm{d}}). \tag{33}$$

3. Поляризаційно розділені коноскопічні картини

Матриця пропускання (31) визначає розподіл циркулярних компонент пропущеної хвилі у площині спостереження:

$$\begin{pmatrix} E_+^{(\mathrm{tr})}(\rho, \phi) \\ E_-^{(\mathrm{tr})}(\rho, \phi) \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{\mathcal{T}}}(\rho, \phi) \begin{pmatrix} E_+^{(\mathrm{inc})} \\ E_-^{(\mathrm{inc})} \end{pmatrix}, \tag{34}$$

де $E_\pm^{(\mathrm{inc,\,tr})} = 2^{-1/2}\big(E_\parallel^{(\mathrm{inc,\,tr})} \mp iE_\perp^{(\mathrm{inc,\,tr})}\big)$. Зокрема, рівняння (34) дозволяє обчислити поляризаційно розділену коноскопічну картину у вигляді поля поляризаційних еліпсів, що визначається розподілом поляризаційних параметрів (азимута поляризації, $\phi_p^{(\mathrm{tr})}$, і еліптичності, $\varepsilon_{\mathrm{ell}}^{(\mathrm{tr})}$) пропущеної хвилі у площині спостереження. Ці параметри можна легко знайти із рівнянь

$$2\phi_p = \arg(E_+^* E_-) = \arctan\left[\frac{S_2}{S_1}\right], \tag{35}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{ell}} = \frac{|E_+| - |E_-|}{|E_+| + |E_-|} = \tan\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{S_3}{S_0}\right)\right], \tag{36}$$

де $E_\pm = |E_\pm|\exp(i\phi_\pm)$; S_0, S_1, S_2 і S_3 є параметрами Стокса [13], для яких співвідношення

$$S_0 = |E_+|^2 + |E_-|^2 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}, \tag{37a}$$

$$S_1 = 2\,\mathrm{Re}(E_+^* E_-) = S_0\cos 2\chi_p\cos 2\phi_p, \tag{37b}$$

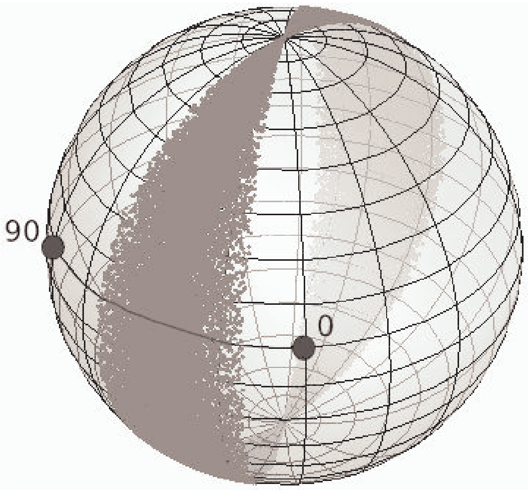
$$S_2 = 2\,\mathrm{Im}(E_+^* E_-) = S_0\cos 2\chi_p\sin 2\phi_p, \tag{37c}$$

$$S_3 = |E_+|^2 - |E_-|^2 = S_0\sin 2\chi_p \tag{37d}$$

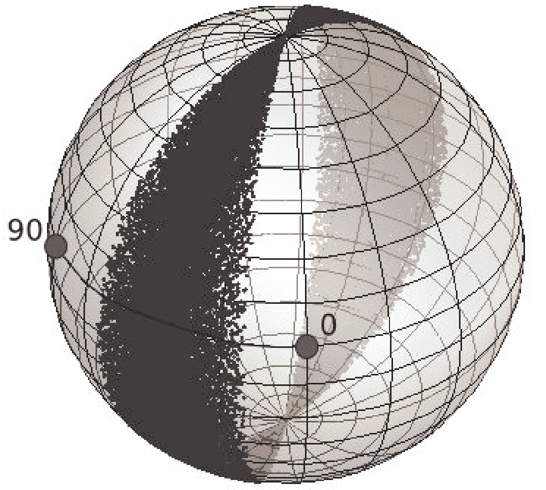
визначають сферу Пуанкаре, параметризовану за допомогою азимута поляризації, $(0 < \phi_p \le \pi)$, і кута еліптичності, $(-\pi/4 \le \chi_p \le \pi/4)$. При $E_\pm = E_\pm^{(\mathrm{inc})}$ ($E_\pm = E_\pm^{(\mathrm{tr})}$) рівняння (35) і (36) дають азимут поляризації $\phi_p^{(\mathrm{inc})}$ ($\phi_p^{(\mathrm{tr})}$) і еліптичність $\varepsilon_{\mathrm{ell}}^{(\mathrm{inc})}$ ($\varepsilon_{\mathrm{ell}}^{(\mathrm{tr})}$) падаючої (пропущеної) хвилі.

Якщо $|E_\nu| = 0$, то хвиля є циркулярно поляризованою, і її фаза ϕ_ν разом з азимутом поляризації ϕ_p невизначені. Тому така поляризаційна сингулярність може розглядатися як фазова сингулярність комплексного поля Стокса, ($S = S_1 + iS_2 = E_+^* E_-$). Точки з $|E_\nu| = 0$, де $\varepsilon_{\mathrm{ell}} = -\nu$, будемо називати *$C_\nu$-точками.*

У випадку лінійної поляризації, $|E_+| = |E_-|$, і знак поляризації не визначений. Криві лінійної поляризації – *L-лінії.* У випадкових неоднорідно поляризованих світлових полях L-лінії розділяють області з лівою і правою поляризаціями [10].



а



б

Рис. 2. Стани поляризації падаючої світлової хвилі, що індукують ліві (*а*) та праві (*б*) C-точки в поляризаційно розділених коноскопічних картинах планарно орієнтованого нематика. Параметри розрахунку: нематичний РК Е7 ($n_o = 1,54$, $n_e = 1,72$), $n_m = 1,5$, товщина комірки $D = 100$ мкм, апертура світлового пучка 30°, $\phi_\mathrm{d} = 0$. Направлення зміни азимута поляризації і його значення зображено на сферах

3.1. Планарна орієнтація

Розглянемо умови виникнення C_ν-точок у поляризаційно розділених коноскопічних картинах планарної нематичної РК комірки. Оскільки матриця пропускання $\tilde{\boldsymbol{T}}(\rho, \phi)$ залежить від двох кутів падіння світлової хвилі на комірку, то можна припусти, що тільки світлові хвилі з певним станом поляризації можуть індукувати C_ν-точки. Щоб знайти такі стани поляризації світлових хвиль, розв'яжемо зворотну задачу пропускання світла. Знаючи стан поляризації світла в C_ν-точці і матрицю пропускання для комірки, можна отримати стан поляризації падаючої світлової хвилі, яка індукує поляризаційну сингулярність. Для цього підставимо в рівняння (34) вектор циркулярних компонент пропущеної хвилі, який для правої C-точки має вигляд $(1,0)^T$, а для лівої $(0,1)^T$. Змінюючи кути падіння θ_inc і ϕ_inc (або ρ і ϕ), отримуємо стани поляризації для падаючої хвилі, що індукують C_ν-точки, які будемо зображати точками на сфері Пуанкаре.

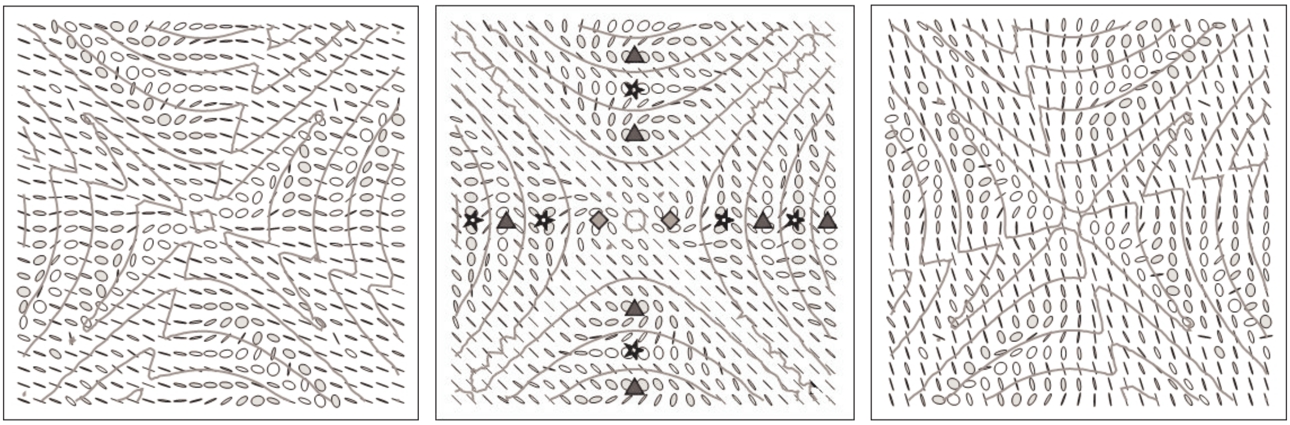
На рис. 2, на сфері Пуанкаре (азимут поляризації відображають паралелі, а еліптичність – меридіани сфери), представлено області станів поляризації падаючої хвилі, за яких поляризаційно розділена коноскопічна картина містить хоча б одну C_ν-точку. Параметри розрахунку наведено у підписі до рис. 2. З рис. 2 видно, що на відміну від гомеотропно орієнтованого НРК, для якого відповідною областю є повністю заповнена сфера Пуанкаре, для планарної орієнтації директора існує суттєва залежність умов формування C-точок від азимутального кута поляризації падаючої хвилі $\phi_p^{(\mathrm{inc})}$. Сфери Пуанкаре, наведені на рис. 2, розраховані для випадку коли $\phi_\mathrm{d} = 0$. Якщо змінювати значення кута ϕ_d, то області будуть рухатись за сферою уздовж паралелей.

Попередній висновок також підтверджують кутові поляризаційні розподіли планарно орієнтованого НРК, показані на рис. 3. Зокрема на рис. 3,*б* в поляризаційно розділеній коноскопічній картині присутні C-точки, які формують правильну геометричну структуру. Також треба зазначити, що, як і в поляризаційно розділених коноскопічних картинах гомеотропно орієнтованого нематичного РК, існують ефекти структурної нестійкості перетинів L-ліній і чергування знака топологічного індексу C-точок [8].

3.2. Холестерична спіраль

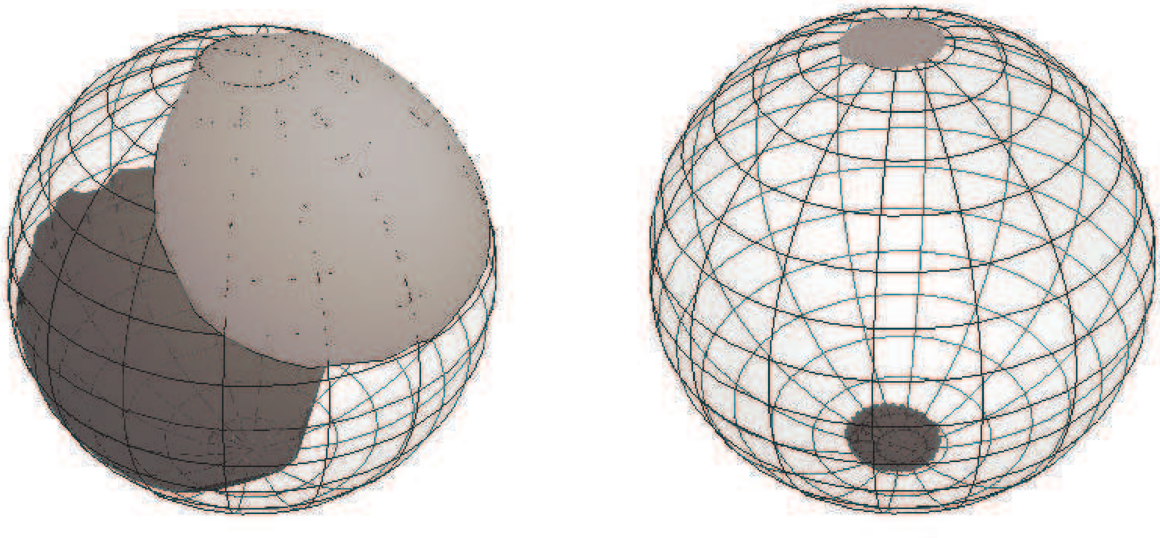
Цікаво дослідити, що буде відбуватися з областями, які індукують C-точки, (рис. 2) у ХРК комірці за рахунок появи хіральності, що приводить до формування гелікоїдальної структури директора з відмінним від нуля хвильовим числом ХРК спіралі, $q \neq 0$, та скінченим значенням кроку спіралі, $P = 2\pi/q$. Оскільки планарно орієнтований нематичний РК можна розглядати як холестерик з нескінченним кроком, то для зручності будемо задавати крок холестеричної спіралі кратний товщині РК комірки D.

На рис. 4 представлено області на сферах Пуанкаре, які індукують C-точки у поляризаційно роз-



а б в

Рис. 3. Поляризаційно розділені коноскопічні картини планарно орієнтованої комірки нематика для лінійно поляризованої падаючої хвилі. Параметри розрахунку наведено на рис. 2. C-точки типу *star, monstar* і *lemon* [10] позначено, відповідно, зірочками, трикутниками і ромбами. L-лінії позначено темними лініями. Праву поляризацію позначено світлими еліпсами, ліву – темними: *а* – $\phi_p^{\rm inc} = 20°$; *б* – $\phi_p^{\rm inc} = 45°$; *в* – $\phi_p^{\rm inc} = 75°$



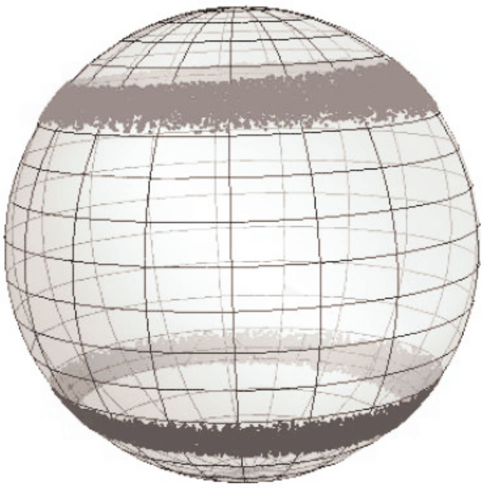
а б

Рис. 4. Стани поляризації падаючої світлової хвилі, що індукують C-точки в поляризаційно розділених коноскопічних картинах холестеричного РК. Параметри розрахунку: нематичний РК E7 з хіральною добавкою ($n_o = 1,54$, $n_e = 1,72$), $n_m = 1,5$, товщина комірки $d = 100$ мкм, апертура світлового пучка 30°. Сірим кольором позначено області, що індукують праві C-точки, темно-сірим – ліві. Крок холестеричної спіралі: *а* – $P = 250$; *б* – $P = 200$ мкм

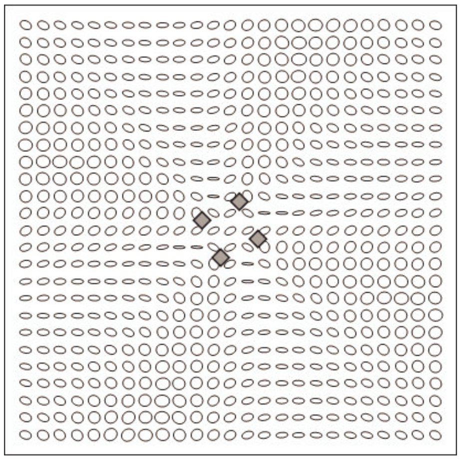
ділених коноскопічних картинах холестеричного РК. У першому випадку, (рис. 4,*а*), коли крок холестеричної спиралі дорівнює $P = 250$ мкм, вже виникає ситуація, коли певні стани поляризації індукують тільки праві або тільки ліві C-точки. Як і для НРК комірки, у цьому випадку ще залишається залежність від азимутального кута $\phi_p^{\rm (inc)}$, але також виникає залежність від еліптичності $\varepsilon_{\rm ell}^{\rm (inc)}$ падаючої хвилі.

Далі, при зменшенні кроку холестеричної спіралі до $P = 200$ мкм, (рис. 4,*б*), тобто коли виникає один напіввиток спіралі, і області, які індукують C-точки, сповзають до полюсів сфери. Коли у комірці виникають два напіввитка спіралі, $P = 100$ мкм, то області на сфері Пуанкаре являють собою два окремих пояси (див. рис. 5,*а*).

У цих випадках видно, що коли в комірці вже сформувалися цілі напіввитки холестеричної спіралі, то



а



б

Рис. 5. Стани поляризації падаючої світлової хвилі, що індукують C-точки (a) та типова поляризаційно розділена коноскопічна картина холестеричного РК (*б*) ($\varepsilon_{ell}^{\rm inc} = 0,7$, $\phi_p^{\rm inc} = 20°$). Параметри розрахунку: нематичний РК Е7 з хіральною добавкою ($n_o = 1,54$, $n_e = 1,72$), $n_m = 1,5$, товщина комірки $D = 100$ мкм, апертура світлового пучка 30°. Сірим кольором позначено області, що індукують праві C-точки, темно-сірим – ліві. C-точки типу *Lemon* відзначені ромбами. Крок холестеричної спіралі: *а* – $P = 100$; *б* – $P = 100$ мкм

відповідні області на сфері Пуанкаре падаючої хвилі стають циліндрично симетричними, і, таким чином, залежність умов появи C-точок від азимута поляризації $\phi_p^{(\rm inc)}$ повністю зникає. Тому поява C-точок у поляризаційно розділеній коноскопічній картині цілком визначається значенням еліптичності $\varepsilon_{\rm ell}^{(\rm inc)}$ падаючої хвилі.

Для холестеричного РК поляризаційно розділена коноскопічна картина має вигляд, представлений на рис. 5,*б*. Видно, що ця картина містить поляризаційні еліпси одного знака, тобто в таких поляризаційних розподілах C-точки і L-лінії існують окремо.

4. Висновки

Характерною особливістю поляризаційно розділених коноскопічних картин планарної нематичної і холестеричної РК комірок є селективність умов формування C-точок за поляризаційними параметрами падаючої світлової хвилі.

Для планарно орієнтованого НРК показано, що поява C-точок залежить лише від азимутального кута поляризації $\phi_p^{(\rm inc)}$, у той же час еліптичність падаючої хвилі майже не впливає на їх формування. Причому на сфері Пуанкаре області індукуючих C-точки станів поляризації обертаються навколо осі S_3 при зміні азимутального кута директора. Це вказує на те, що селективність по азимутальному куту пов'язана з порушенням циліндричної симетрії гомеотропної конфігурації.

У ХРК комірках рівноважною є неоднорідна гелікоїдальна конфігурація, де директор обертається навколо нормалі до комірки. Коли число напіввитків ХРК спіралі більше одиниці, ці обертання "відновлюють" циліндричну симетрію, і відповідні області на сфері Пуанкаре падаючої хвилі також стають циліндрично симетричними. У цьому випадку вирішальним фактором, який визначає появу C-точок, є еліптичність падаючої хвилі, $\varepsilon_{\rm ell}^{(\rm inc)}$. Причому області станів поляризації падаючої хвилі, які індукують C-точки протилежного знака спіральності, не перетинаються. Очевидно, вказані особливості можна вважати ефектами хіральності ХРК.

На завершення зазначимо, що детальне дослідження перетворень поляризаційно розділених коноскопічних картин НРК і ХРК комірок при зміні поляризаційних параметрів падаючої хвилі вказує на універсальність біфуркаційних ефектів, досліджених в роботі [8] для гомеотропної структури. Результати цих досліджень буде опубліковано окремо.

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки УНТЦ гранта № 4687.

1. P. Yeh and C. Gu, *Optics of Liquid Crystal Displays* (Wiley, New York, 1999).
2. V.G. Chigrinov, *Liquid Crystal Devices: Physics and Applications* (Artech House, Boston, 1999).
3. P.G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals* (Clarendon Press, Oxford, 1993).
4. G. Baur, V. Wittwer, and D.W. Berreman, Phys. Lett. A **56**, 142 (1976).
5. L.H. Brett and H.H. Winter, Appl. Opt. **40**, 2089 (2001).
6. Yu.A. Nastishin, O.B. Dovgyi, and O.G. Vlokh, Ukr. J. Phys. Opt. **2**, N 2, 98 (2001).
7. A.D. Kiselev, J. Phys.: Condens. Matter, **19**, 246102 (2007).
8. A.D. Kiselev, R.G. Vovk, R.I. Egorov, and V.G. Chigrinov, Phys. Rev. A **78**, 033815 (2008).
9. N.D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **51**, 591 (1979).
10. J.F. Nye, *Natural Focusing and Fine Structure of Light: Caustics and Wave Dislocations* (Institute of Physics, Bristol, 1999).
11. J.F. Nye, Proc. R. Soc. London, Sect. A **389**, 279 (1983).
12. D.W. Berreman, J. Opt. Soc. Am. **62**, 502 (1972).
13. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon Press, Oxford, 1980).

Одержано 09.10.09

ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ СТРУКТУРА КОНОСКОПИЧЕСКИХ КАРТИН ПЛАНАРНЫХ НЕМАТИЧЕСКИХ И ХОЛЕСТЕРИЧЕСКИХ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ЯЧЕЕК

Р.Г. Вовк, А.Д. Киселев

Р е з ю м е

Теоретически исследованы распределения поляризации света в коноскопических картинах планарной нематической и холестерической жидкокристаллических (ЖК) ячеек. Геометрия поляризационных структур описана с помощью поляризационных сингулярностей: C-точек (точки циркулярной поляризации) и L-линий (линии линейной поляризации). Рассмотрены условия формирования поляризационных сингулярностей (C-точек) в ансамбле коноскопических картин, параметризованных азимутом поляризации и эллиптичностью падающей световой волны. Показано, что характерной особенностью этих условий является селективность по поляризационным параметрам.

POLARIZATION STRUCTURE OF CONOSCOPIC PATTERNS FOR PLANAR NEMATIC AND CHOLESTERIC LIQUID-CRYSTAL CELLS

R.G. Vovk, A.D. Kiselev

Institute of Physics, Nat. Acad. of Sci. of Ukraine
(*46, Nauky Ave., Kyiv 03680, Ukraine;*
e-mail: roman.vovk@gmail.com)

S u m m a r y

The distributions of light polarization in conoscopic patterns obtained for planar nematic and cholesteric liquid-crystal cells have been studied theoretically. The geometry of polarization patterns is characterized in terms of polarization singularities, such as C-points (points corresponding to circular polarization) and L-lines (lines corresponding to linear polarization of light). The conditions required for the formation of polarization singularities (C-point) in a conoscopic pattern ensemble parametrized by the polarization azimuth and the ellipticity of incidence light have been considered. The selectivity with respect to polarization parameters has been found to be a characteristic feature of those conditions.