Выводы. Простота технологии синтеза Уолша-подобных симметричных систем (базисов) секвентных функций, высокие скорости спектральной обработки сигналов, обеспечиваемые предлагаемыми базисами, открывают разрабатываемым системам секвентных функций широкую перспективу применения в различных направлениях науки и техники как для целей спектрального анализа дискретных сигналов, так и криптографической защиты информации.

Список использованной литературы:

1. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 208 с.
2. Білецький А. Я., Білецький О. А., Кучер О. Г. Синтез симетричних матриць Уолша по методу спрямованої перестановки базисних функцій. *Вісник НАУ*. Київ. 2001. № 3. С. 141–146.

An algorithm for constructing discrete Walsh-like (0, 1)-sequention functions, in which the number of ones and zeros in each half of the interval determination is not necessarily the same, as is the case in conventional systems Walsh functions. We discuss the application of the system of sequention functions.

Key words: *systems of sequention function, directed search.*

Получено 30.01.2017

УДК 519.615:004.023

Л. П. Вакал*, канд. техн. наук,
Є. С. Вакал,** канд. фіз.-мат. наук, доцент

*Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ,
**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЕРЕВИЗНАЧЕНОЇ СИСТЕМИ ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

Представлено алгоритм диференціальної еволюції, адаптований для знаходження наближених розв'язків несумісних перевизначених систем трансцендентних рівнянь з використанням різних норм нев'язок.

Ключові слова: *перевизначена система, трансцендентні рівняння, норма нев'язки, диференціальна еволюція.*

Вступ. При розв'язанні широкого кола задач, пов'язаних з обробкою даних вимірювань, наприклад в радіофізиці, радіоастрономії, сейсморозвідці тощо, потрібно знайти розв'язок перевизначеної системи m трансцендентних рівнянь з n невідомими ($m > n$)

 © Л. П. Вакал, Є. С. Вакал, 2017

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \qquad \ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) в загальному випадку несумісна. Ставиться задача так визначити невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_n$, щоб норма нев'язки системи була мінімальною. Існує декілька підходів до розв'язання цієї задачі [1]. Наприклад, у методі найменших квадратів невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ визначають з умови мінімуму функції

$$S_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} f_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad (2)$$

Задача (2) може бути розв’язана різними способами [1, 2], але усі вони потребують обчислення частинних похідних функцій.

У методі вирівнювання за Чебишовим невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ визначають з умови мінімуму максимальної нев’язки

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max_{i=\overline{1,m}} \left| f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right|. \quad (3)$$

Знайти розв’язок задачі (3) в загальному випадку досить складно, хоча сама її постановка достатньо природна. Можна застосувати, наприклад, загальні методи мінімізації недиференційовних функцій. Зазначимо, що в лінійному випадку задача мінімізації функції (3) еквівалентна задачі найкращої чебишовської апроксимації функції багатьох змінних узагальненими поліномами [3], для розв’язання якої розроблено відповідні алгоритми [4–6].

Також часто для знаходження розв’язку системи (1) застосовують підхід, в якому невідомі знаходять з умови мінімуму функції

$$S_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \left| f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right|. \quad (4)$$

Для знаходження наближених розв’язків несумісної системи (1) з використанням норм нев’язок (2)–(4) у роботі розглядається метаевристичний підхід з використанням диференціальної еволюції (ДЕ) [7]. Метод ДЕ служить для знаходження глобального оптимуму недиференційовних, нелінійних функцій багатьох змінних. Він належить до групи еволюційних алгоритмів, які моделюють базові положення в теорії біологічної еволюції — процеси відбору, схрещування і мутації. На відміну від відомих методів розв’язання системи (1), які мають значну обчислювальну трудомісткість як самих розрахунків, так і підготовки даних (наприклад, обчислення похідних), метод ДЕ простий в реалізації та використанні, потребує обчислення лише значень цільової функції (критерію оптимізації), але не її похідних.

Диференціальна еволюція. Еволюційний процес в алгоритмі ДЕ організовано наступним чином. Спочатку генерується множина випадкових векторів (покоління популяції), які представляють собою можливі розв’язки задачі оптимізації. Далі формується нове покоління. Для кожного вектора старого покоління, який називається базовим, з використанням трьох інших випадкових векторів створюється мутантний вектор. Над цим вектором виконується операція схрещування, в ході якої деякі його координати заміщуються координатами базового вектора, і кращий з двох векторів — базового і пробного (отриманого після схрещування) — включається в нове покоління. З ростом числа поколінь розв’язки збігаються в деяку точку простору розв’язків, яка є глобальним оптимумом. Умовами завершення алгоритму можуть бути, наприклад, досягнення заданого значення критерію оптимізації, вичерпання максимального числа поколінь тощо.

В цілому алгоритм ДЕ представляє собою одну з можливих «неперервних» модифікацій генетичного алгоритму [8–10]. Водночас він має суттєву особливість, яка багато в чому визначає його властивості. Як джерело шуму при мутації в алгоритмі ДЕ застосовується не зовнішній генератор випадкових чисел, а «внутрішній», реалізований як різниця між випадково вибраними векторами поточної популяції. Завдяки цьому алгоритм може динамічно моделювати особливості рельєфу функції і швидко проходити складні яри, забезпечуючи ефективність навіть у випадку складного рельєфу.

Алгоритм розв’язання системи трансцендентних рівнянь. Алгоритм ДЕ, адаптований для знаходження розв'язку системи (1), складається з таких кроків.

1. Генерується початкове покоління векторів $V_i = (v_{1i}, \ldots, v_{ni})$, $i = \overline{1, Np}$, де Np — розмір популяції (один з параметрів алгоритму). Координати v_{ji} ($j = \overline{1, n}$) вектора V_i — випадкові числа з деякого заданого проміжку (за умовчанням це [–1, 1]). У подальшій еволюції простір пошуку може виходити далеко за межі цього проміжку.

2. Для базового вектора V_i ($i = \overline{1, Np}$) з поточного покоління вибирається три випадкові вектори V_b, V_c, V_d ($b \neq c \neq d \neq i$) і створюється мутантний вектор $\tilde{V}_b$ за правилом

$$\tilde{V}_b = V_b + Fm\,(V_c - V_{d)}\ ,$$

де Fm — деяка додатна дійсна стала з проміжку [0, 2], яка називається силою мутації і є параметром алгоритму. Сила мутації визначає амплітуду збурень, які вносяться у вектор V_b зовнішнім шумом.

3. Обчислюються координати u_{ji} пробного вектора U_i

$$u_{ji} = \begin{cases} \tilde{v}_{jb}, \text{ якщо } rand\left(0,1\right) \le Cr \vee j = j_{rand} \\ v_{ji}, \text{ якщо } rand\left(0,1\right) > Cr \wedge j \ne j_{rand} \end{cases}, \ j = \overline{1,n},$$

де $rand\,(0,1)$ — випадкове число з інтервалу $(0,1)$, Cr — задана ймовірність схрещування (ще один параметр алгоритму), з якою нащадок U_i спадкує спотворену мутацією генетичну ознаку від вектора V_b.

4. Для кожного вектора V_i ($i = \overline{1, Np}$) обчислюється цільова функція F. Якщо, наприклад, використовується норма (2), то обчислення виконуються за формулою

$$F(V_i) = \sum_{k=1}^{m} f_k^2\,(v_{1i}, \ldots, v_{ni}),$$

якщо застосовується чебишовська норма (3) — за формулою

$$F\left(V_i\right) = \max_{k=\overline{1,m}} \left|\, f_k\,(v_{1i}, \ldots, v_{ni}) \right|.$$

Той з векторів U_i і V_i, значення цільової функції якого менше, включається в нове покоління.

5. Алгоритм завершує еволюційний процес, якщо виконується одна з умов:

- значення цільової функції найкращого вектора покоління менше заданого ε;
- вичерпано максимальне число поколінь популяції $p_{\max}$;
- відбувається стагнація еволюційного процесу, тобто відносний розкид значень цільової функції в популяції менше заданого δ

$$\max_{i=\overline{1,Np}} F\left(V_i\right) - \min_{i=\overline{1,Np}} F\left(V_i\right) < \delta \min_{i=\overline{1,Np}} F\left(V_i\right).$$

За умовчанням $\varepsilon = 10^{-12}$, $p_{\max} = 200$, $\delta = 10^{-4}$. Якщо жодна з перелічених умов не виконується, відбувається перехід до п. 2.

Враховуючи стохастичний характер алгоритму, для отримання прийнятного результату потрібно зробити декілька його запусків.

Результати обчислювального експерименту. Для перевірки ефективності алгоритму ДЕ виконано обчислювальний експеримент по розв'язанню систем трансцендентних рівнянь з використанням норм нев'язок (2)–(4). Аналіз отриманих в експерименті результатів показав, що запропонований алгоритм дозволяє досить точно знаходити наближені розв'язки зазначених систем.

Як приклад наведемо результати розв'язання за алгоритмом ДЕ системи п'яти рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} 3xy-\dfrac{2z}{x}+x\cos\left(z-\dfrac{6x}{y}\right)-\dfrac{xyz}{6}-e^{-yz}=0, \\ \sin(\pi xy)\cos(yz)-3x^{\sin(yz)}+xz=0, \\ e^{x-1}-\cos(\pi yz)=0, \\ yx^{\cos(y^{\sin(xz)})}-\dfrac{6x}{z}=0, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-x+\dfrac{1}{xyz}=0. \end{cases} \qquad (5)$$

Були задані такі значення вхідних параметрів алгоритму: розмір популяції $Np=50$, сила мутації $Fm=0.4$, ймовірність схрещування $Cr=0.9$, $\varepsilon=0$, число запусків алгоритму 20 (інші параметри — за умовчанням), і отримані наступні результати (розв'язок *x*, *y*, z і значення цільової функції *F*):

- при використанні норми методу найменших квадратів (2)
  $x=0.9999396,\ \ y=2.0004848,\ \ z=2.9991474,\ F=6.7\cdot10^{-9}$;
- при застосуванні чебишовської норми (3)
  $x=0.9999520,\ \ y=2.0004429,\ \ z=2.9991854,\ F=4.8\cdot10^{-5}$;
- при використанні норми (4)
  $x=0.9999337,\ \ y=2.0005033,\ \ z=2.9991360,\ F=1.2\cdot10^{-4}$.

Зазначимо, що для отримання оптимального розв'язку системи (5) знадобилось у середньому 135 поколінь алгоритму ДЕ.

Якщо в першому рівнянні системи (5) відкинути останній доданок $-e^{-yz}$, то модифікована система буде сумісною. Для знаходження її розв'язку було застосовано алгоритм ДЕ з тими самими значеннями вхідних параметрів, і для норм (2)–(4) отримано однаковий розв'язок $x=1,\ \ y=2,\ \ z=3$, який є точним розв'язком системи. При цьому у випадку норми (2) значення цільової функції $F=1.7\cdot10^{-39}$, а у випадку норм (3) і (4) — $F=4.1\cdot10^{-20}$.

У процесі обчислювального експерименту досліджувався також вплив на швидкість збіжності алгоритму ДЕ сили мутації *Fm* та ймовірності схрещування *Cr*. Із збільшенням значення параметра *Fm* зростає й число поколінь, необхідних для завершення еволюції. Водночас при малих значеннях *Fm* є високим процент виходів з алгоритму за умови стагнації еволюційного процесу. Найкраще вибирати *Fm* з проміжку $[0.4, 0.6]$. При збільшенні ймовірності схрещування *Cr* зменшується число поколінь, необхідних для знаходження мінімуму цільової функції, а при малих значеннях Cr — кожне наступне покоління все менше відрізняється від попереднього. Рекомендується задавати значення параметра Cr в діапазоні $0.8 \le Cr \le 1$.

Висновки. Представлено алгоритм ДЕ, адаптований для знаходження розв’язків перевизначених систем трансцендентних рівнянь. Алгоритм простий в реалізації та використанні (містить мало варійованих параметрів), дозволяє застосовувати різні норми нев’язок, не потребує обчислення похідних. Певним недоліком підходу на основі використання алгоритму ДЕ є відсутність у загальному випадку оцінок точності знайденого розв’язку (відоме лише значення відповідної норми нев’язки системи). Результати обчислювального експерименту показали, що алгоритм ДЕ можна застосовувати як альтернативу відомим методам розв'язання несумісних систем.

Список використаних джерел:

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Том 1. М.: Наука, 1966. 632 с.
2. Späth H. The damped Taylor’s series method for minimization a sum of squares and for solving systems of equations. *CACM*, 1967. Vol. 10, N 11. P. 726–728.
3. Каленчук-Порханова А. О., Вакал Л. П. Застосування найкращої чебишовської апроксимації для моделювання деяких фізичних процесів. *Математичне та комп’ютерне моделювання.* Серія: Технічні науки: зб. наук. пр. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільськ. нац. ун-т, 2010. Вип. 4. С. 111–118.
4. Александренко В. Л. Алгоритм построения приближенного равномерно-наилучшего решения системы несовместных линейных уравнений. *Алгоритмы и алгоритмические языки.* М.: ВЦ АН СССР, 1968. Вып. 3. С. 57–74.
5. Каленчук-Порханова А. О., Вакал Л. П. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних. *Комп’ютерні засоби, мережі та системи.* 2007. № 6. С. 141–148.
6. Каленчук-Порханова А. А., Вакал Л. П. Аппарат аппроксимации в составе программного обеспечения суперкомпьютера с кластерной архитектурой. *Искусственный интеллект*. 2009. № 1. С. 158–165.
7. Storn R., Price K. Differential evolution — a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. P. 341–359.
8. Herrera F., Lozano M., Verdegay J. L. Tackling real-coded genetic algorithms: operators and tools for the behaviour analysis. *Artificial Intelligence Review*. 1998. Vol. 12, N 4. P. 265–319.
9. Вакал Л. П. Генетичні алгоритми для чебишовської апроксимації. *Комп’ютерні засоби, мережі та системи.* 2013. № 12. С. 20–26.
10. Вакал Л. П. Решение задачи равномерной нелинейной аппроксимации с использованием непрерывного генетического алгоритма. Международный научно–технический журнал *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 3. С. 17–27.

It is proposed a differential evolution algorithm adapted for searching approximate solutions of inconsistent overdetermined systems of transcendental equations with using different norms of residual errors.

Key words: *overdetermined system, transcendental equations, norm of residual error, differential evolution.*

Одержано 01.02.2017

УДК 004.021

А. Ф. Верлань*, д-р техн. наук, професор,
О. І. Махович,** канд. техн. наук

* Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ,
** Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПІДХІД ДО ВИБОРУ ОПОРНИХ ПЕРЕРІЗІВ В ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОМУ МЕТОДІ РЕДУКЦІЇ МОДЕЛЕЙ ОБ'ЄКТІВ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Аналізується та оцінюється точність методу опорних перерізів та пропонується методика вибору опорних точок. Шляхом обчислювальних експериментів досліджується вплив кількості опорних точок методу опорних перерізів на абсолютне інтегральне відхилення розв'язків. Сформульовано рекомендації щодо ефективного використання методу опорних перерізів.

Ключові слова: *об'єкти із розподіленими параметрами, метод опорних перерізів, вибір вузлів інтерполяції, інтегральне відхилення.*

Вступ. Диференціальні рівняння із частинними похідними в переважній більшості є основою для існуючих методів і засобів, що використовуються для розв'язування задач моделювання об'єктів з розподіленими параметрами [1, 2]. Цей підхід дозволяє забезпечити високий рівень адекватності та ефективне застосування за відсутності специфічних часових і ресурсних вимог. В задачах моделювання процесів оперативної обробки інформації в технічних системах, зокрема обробки вимірювальних даних чи сигналів керування, присутні суттєві особливості, такі як функціонування систем в реальному часі, наявність зворотних зв'язків, необхідність розробки або вибору спеціалізованих обчислювальних алгоритмів для створення вбудованих програмних засобів тощо. При вирішенні оптимізаційних задач, коли потрібна висока швидкість отримання розв'язків, виникає необхідність у розробці

 © А. Ф. Верлань, О. І. Махович, 2017