УДК 539.3

Н. И. Ободан, д-р. техн. наук, профессор,
Н. А. Гук, д-р физ.-мат. наук, профессор,
А. С. Магас, аспирант

Днепропетровский национальный университет
имени О. Гончара, г. Днепропетровск

ВЫБОР МОДЕЛИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ НАБЛЮДАЕМОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОСЕТИ

Рассматривается проблема выбора и идентификации модели реальной системы по результатам наблюдений. Процедура идентификации выполняется с использованием настроенной нейронной сети. Выбор модели осуществляется с использованием меры эквивалентности предлагаемой модели моделям, соответствующим обучающим выборкам. При выборе меры эквивалентности используется теорема взаимности. Формулируются условия разрешимости задачи идентификации параметров.

Ключевые слова: *модель действительности, идентификация, мера эквивалентности, теорема взаимности, нейронная сеть.*

Введение. Идентификация свойств деформируемой системы при эксплуатации требует определения не только наличия отклонений в свойствах системы, возникших в процессе изготовления или приобретенных при эксплуатации, но и воздействия внешних возмущений, отличных от проектных значений. Существующие постановки задач реконструкции физических и геометрических свойств деформируемых тел, внешних нагрузок ориентированы на каждый конкретный случай, поскольку существующие модели прямых задач различны. Поэтому в режиме эксплуатации необходимо не только определить параметры модели реальной системы, но и идентифицировать саму модель, которая описывает отклонения в системе, то есть определить, какие именно свойства системы изменились.

Применение нейронной сети для решения проблемы идентификации реального состояния деформируемой системы также основывается на использовании решений прямых задач для конкретной модели деформирования [1].

Настоящая работа посвящена решению проблемы выбора и идентификации модели реальной системы, то есть модели действительности.

Постановка задачи. Обычно при построении модели, описывающей состояние деформированного тела, с целью возможности ее использования в задачах идентификации реального состояния, используется формализация знаний, основанная на математической модели механики деформированного тела. Эта математическая модель базируется на определенных понятиях, характеризующих деформируемую систему. В качестве классов, содержащих описания указанных понятий, выступают:

1) класс физических и геометрических свойств системы;
2) класс внешних воздействий;
3) класс граничных условий.

В том случае, когда конкретные значения параметров известны, модель действительности является единственно возможной (при линейной постановке задачи) и описывает отклик системы на внешнее воздействие. В том случае, когда известен отклик систем, но неизвестно, к какому из перечисленных классов принадлежит его модель действительности, постановка обратной задачи, то есть задачи идентификации параметров модели, не является единственной. В этом случаем модель действительности является подмножеством множества ситуаций, описываемых моделью деформирования.

Возникает задача поиска адекватной модели $\{D, M\}$, такой, что модель действительности совпадает с множеством моделей всех ситуаций, входящих в нее, здесь D — действительность, M — модель формализации действительности. То есть, если S – модель любой ситуации действительности, то $S \in M$ иначе $S \notin M$. Принимается, что M_k эквивалентно M_p по модели действительности $\left(M_k \sim M_p\right)$, если $\{D, M_k\} = \{D, M_p\}$. Таким образом, если под моделями M_k, M_p подразумевать соответствующие модели из возможных классов, то каждая из моделей является эквивалентной модели действительности. Модель знаний M в случае решения обратной задачи может быть представлена в виде:

$$M = \left(O_H, P \to H\right) \cup L_H,$$

где P, H — входные и выходные данные, O_H — оператор отображения (оператор обратной задачи), L_H — оператор прямой задачи.

Если поставить в соответствие каждому набору M_i некоторый класс моделей из перечисленных выше, то задача состоит в определении адекватных по действительности входных P и выходных данных H, операторов O_H, L_H из числа известных классов.

Математическая модель и метод решения задачи. Для решения поставленной задачи опишем операторы O_H, L_H, характеризующие модели знаний и соответствующие моделям действительности.

Для описания прямой задачи L_H рассмотрим краевую задачу деформирования упругого тела, занимающего область

$$\Omega = \{X \mid X = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, a_1 \le x_1 \le b_1, a_2 \le x_2 \le b_2, a_3 \le x_3 \le b_3\} : \sigma_{ij,j} = F_i,$$

$$G_\Gamma(u, \sigma) = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} u_{k,l}, \; i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

где $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ — вектор пространственных координат; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; D_{ijkl} — компоненты тензора упругости; $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ — вектор перемещений; F_i — проекции вектора нагрузок; $G_\Gamma(\cdot)$ — заданный дифференциальный оператор, действующий на контуре Γ односвязной области Ω; индексы $i, j, k, l = 1, 2, 3$, если $i \ne j$, то $k \ne l$.

В качестве компонент вектора P — вектора входа оператора O_H — используются известные следы решений задачи (1),

$$P(U)\big|_{\gamma_k} = P^*_{\gamma_k}, \; k = \overline{1, K},$$

где γ_k — часть области Ω или границы Γ, на которой определены значения функции $P^*_{\gamma_k}$; $P(U)\big|_{\gamma_k}$ — значения функции $P(U)$, вычисленные из соотношений (1).

Для решения задачи об определении неизвестных функций H_i, которые являются выходом оператора O_H, используется метод обратных задач в сочетании с методом квазирешения [2], здесь индекс $i = \overline{1,3}$ характеризует соответствующий класс моделей.

Тогда вектор неизвестных определяется из условия:

$$H_i = \arg\min_H J(H_i), \; H_i \in \overline{H_i}, \tag{2}$$

где $J(H_i) = \int\limits_\Omega \left(P(U)\big|_{\gamma_k} - P^*_{\gamma_k} \right)^2 d\Omega$.

Для решения прямой задачи L_H используется метод конечных элементов. Определение неизвестной вектор-функции $U(X)$ и соответствующих значений $P(U)$ при фиксированных значениях вектор-функции H_i осуществляется путем дискретизации этих функций на сетке $X_n, n = \overline{1, N}$. Тогда вектор значений соответствующих вектор-функций в узлах представляется в виде $U = \{U(X_n)\}$, $n = \overline{1, N}$. Аналогично вводятся сетки $X_k, k=\overline{1,K}$ и $X_s, s=\overline{1,S}$ для описания вектор-функций $P(U)$ и $H_i(X)$, соответственно, т. е. формируются векторы значений $P=\{P_k\}$ $k=\overline{1,K}$, $H_i=\{H_{is}\}$ $s=\overline{1,S}$.

При использовании метода конечных элементов и вариационного метода Ритца для аппроксимации всех рассматриваемых функций через их значения в узлах сеток X_n, X_k, X_s, $n=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,K}$, $s=\overline{1,S}$ дискретная математическая модель прямой задачи приобретает вид

$$K(H_1,H_3)\cdot U=R(H_2), \tag{3}$$

где $K(H_1,H_3)$, $R(H_2)$ — матрица и вектор коэффициентов, значения компонент которых зависят от H_1,H_2,H_3; H_1,H_2,H_3 — неизвестные векторы, являющиеся решениями обратной задачи и описывающие внутренние свойства объекта, внешние воздействия, граничные условия.

Из системы линейных алгебраических уравнений (3) определяется вектор U при фиксированном векторе H_i, после чего вычисляются значения компонент вектора P. При известном векторе P^* формируется функционал (2).

Решение обратной задачи определяется путем удовлетворения условия (2), при этом оператор O_H аппроксимируется нейронной сетью [3]

$$H_i=R_s\left[\sum_{j=1}^{n_k}V_{sj}f_j\left(\sum_{k=1}^{K}\alpha_{jk}P_k^*+\alpha_{j0}\right)+V_{s0}\right], \tag{4}$$

где i — номер, соответствующий типу модели, $i=\overline{1,3}$; P_k^*, H_s — компоненты векторов входа и выхода нейросети, $k=\overline{1,K}$, $s=\overline{1,S}$; α_{jk}, α_{j0} — весовые коэффициенты, которые настраиваются в процессе реализации алгоритма идентификации вектора H_i по значениям компонент вектора P; R_s, f_j — функции активации; n_k — число нейронов в скрытом слое; K — число нейронов во входном слое сети.

Тогда задача (2) сводится к определению значений весовых коэффициентов α_{jk} в (4) из условия:

$$H_i=\arg\min_{\alpha} J\left(\alpha_{jk},P^*\right),\ \alpha_{jk}\in \mathrm{A}.$$

Для обучения каждой i-й нейронной сети используется выборка, составленная из решений прямых задач, соответствующих компактному множеству значений H_i. Таким образом, каждая i-я сеть соответствует конкретной модели действительности.

При работе нейросетей в режиме идентификации неизвестно, какие из свойств модели $H_1 = \left\{D_{ijkl}\right\}$, $H_2 = \left\{F_i\right\}$, $H_3 = \left\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\right\}$ должны быть идентифицированы, т.е. компоненты какого из перечисленных векторов являются неизвестными обратной задачи, и их значения отличаются от известных проектных значений. Неизвестно также, какая из нейронных сетей соответствует модели действительности и должна быть использована при идентификации.

Выбор модели действительности. В качестве моделей-кандидатов для выбора модели действительности будем использовать:

1) класс моделей M_1 для определения неизвестных физических свойств тонкостенной системы D_{ijkl};
2) класс моделей M_2 для реконструкции внешней нагрузки тонкостенной системы $F_i, i = \overline{1,3}$;
3) класс моделей M_3 для определения неизвестных геометрических параметров повреждений в виде отверстий или трещин $a_i, b_i, i = \overline{1,3}$.

Каждой из этих моделей-кандидатов соответствует нейронная сеть, настроенная на множестве решений соответствующих прямых задач [3].

По теореме единственности решение каждой прямой задачи единственно, при этом, если справедливо условие, что множество возможных решений обратной задачи компактно, то условия топологической леммы Тихонова выполняются, соответствующее решение обратной задачи существует и непрерывно на компактном множестве [2].

Отсюда следует, что для каждого класса моделей задача идентификации параметров является разрешимой, если поиск решений ведется на компактном множестве, задача же распознавания модели действительности требует формулировки дополнительных условий.

Пусть задан входной вектор значений P^*. При определении кандидатов на модель действительности с помощью обученных многослойных нейронных сетей (МНС) могут представиться два случая.

1. Определяемые вектора $\tilde{H}_i, i = \overline{1,3}$ (или часть из них) не принадлежат области их значений. Такие модели не рассматриваются как кандидаты на модель действительности.
2. Определяемые вектора $\tilde{H}_i, i = \overline{1,3}$ лежат в заданных компактных множествах. Такие модели могут рассматриваться как кандидаты на модель действительности, а для ее выбора требуется дополнительный критерий.

Пусть i -ая многослойная нейронная сеть MHC_i, $i = \overline{1,3}$ — обученная нейросеть, адекватная одному из рассматриваемых классов моделей. Здесь адекватность означает, что модель действительности M принадлежит множеству моделей всех ситуаций, входящих в обучающую выборку i -ой нейросети, т.е. $M \in \overline{M}$.

Набор возможных моделей $\left[P, H_i\right]$ с входом P^* и выходом H_i может быть получен при подаче значений P^* на вход обученных сетей MHC_i, $i = \overline{1,4}$.

При идентификации параметров системы в режиме реального времени модель действительности ситуативна. Поэтому в каждый момента времени t фиксируются значения компонент вектора наблюдения P_t^* . Если подать вектор P_t^* на каждую i -ю сеть, то в результате прогноза нейросети получаются значения вектора $\tilde{H}_i$, $i = \overline{1,3}$, при этом неизвестно, какой из векторов соответствует модели действительности. Для выбора модели действительности используется мера эквивалентности полученных моделей M_i, $i = \overline{1,3}$ моделям, соответствующих обучающим выборкам. При выборе меры эквивалентности используется теорема взаимности [4], согласно которой для двух состояний равновесия деформируемого тела I и II справедливо соотношение

$$\sum_{kl} \int_V \sigma_{kl}^I \varepsilon_{kl}^{II} dV = \sum_{ij} \int_V \sigma_{kl}^I \varepsilon_{kl}^{II} dV , \ k,l = 1,2,3 . \qquad (5)$$

Соотношение справедливо только для различных ситуаций в рамках одной модели действительности. Отсюда следует, что, если состояния I и II относятся к различным моделям действительности, то соотношение (5) выполняться не будет. Поэтому в качестве состояния I выбираются значения $\sigma_{kl}^I, \varepsilon_{kl}^I$ для любого элемента обучающей выборки, а в качестве состояния II — значения $\sigma_{kl}^{II}, \varepsilon_{kl}^{II}$, полученные из решения прямой задачи для той же модели действительности со значениями H_i , определенными в результате прогноза с использованием той же модели.

Тогда мера эквивалентности определяется как

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k,l} \left(\sigma_{kl_n}^I \varepsilon_{kl_n}^{II} - \sigma_{kl_n}^{II} \varepsilon_{kl_n}^I \right) = W .$$

Условие для выбора модели действительности имеет вид:

$$\left[P^*, H_i^* \right] = \arg\min_i W_i \left(P^* \right), \ i = \overline{1,3} .$$

Численный эксперимент. Численный эксперимент проводился для цилиндрической оболочки с геометрическими и физическими параметрами $L/R = 2$; $R/H_{\max} = 100$; $E = 2 \cdot 10^6 \ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, находящейся под действием внешней нагрузки нормальной к боковой поверхности оболочки.

Рассматривались три типа моделей, в которых H_1 — вектор, описывающий неизвестное распределение толщины, H_2 — вектор неизвестной внешней нагрузки, H_3 — вектор неизвестных координат точек границы области повреждения.

Модель 1 описывает поведение оболочки кусочно-постоянной толщины, значения толщины которой изменяются в диапазоне $H_{\min} \le H \le H_{\max}$, где $H_{\min}, H_{\max}$ — минимальное и максимальное допустимые значения толщины оболочки. Оболочка находится под действием равномерного нормального к боковой поверхности внешнего давления. Вектор неизвестных представлялся в виде: $H_1 = \left\{H_p\right\}$, $p = \overline{1, Q}$.

В качестве модели 2 рассматривалась оболочка постоянной толщины, находящаяся под действием неравномерно распределенного нормального к боковой поверхности внешнего давления. Закон изменения давления описывался зависимостью $q = q_0 \left(a + b \cos ny/R\right)$, с параметрами $a = b = 0{,}5$. Вектор неизвестных параметров нагружения представлялся в виде: $H_2 = \left\{q_0, n\right\}$.

Модель 3 описывает поведение оболочки с повреждением в виде отверстия. Отверстие описывается квадратом со стороной a и координатами центра $\left\{X_k, Y_k\right\}$, вектор неизвестных в этом случае имеет вид: $H_3 = \left\{X_k, Y_k, a\right\}$.

Для каждой из моделей была построенная и обучена нейронная сеть. На входы сетей последовательно подавались значения компонент вектора P_i^*, $i = \overline{1,3}$, соответствующие решениям прямых задачи с известными значениями параметров модели: известным распределением толщины оболочки, с известным внешним воздействием, известным местоположением и размером повреждения.

С использованием настроенных нейронных сетей были идентифицированы значения неизвестных параметров $\tilde{H}_i, i = \overline{1,3}$, соответствующие входным векторам P_i^*, $i = \overline{1,3}$, не входящих в обучающую выборку. После получения значений параметров модели $\tilde{H}_i, i = \overline{1,3}$ с помощью соотношения (3) вычислялись значения $\tilde{\sigma}_{kl}^{I}, \tilde{\varepsilon}_{kl}^{II}, \tilde{\sigma}_{kl}^{II}, \tilde{\varepsilon}_{kl}^{I}$ для каждого значения i, а затем для случайного элемента каждой обучающей выборки вычислялось значение W.

Результаты расчетов приведены в табл. 1, из анализа которой следует, что для модели действительности значение $W_{i^*} << W_i$, $i \neq i^*$. Указанная зависимость наблюдается для всех рассмотренных моделей.

Таблица 1

Вектор входа нейросети	**Модели действительности**		
	W **Модель 1 (идентификация толщины)**	***W*** **Модель 2 (идентификация нагрузки)**	***W*** **Модель 3 (идентификация повреждения)**
P_1^*	$0,1 \cdot 10^{-5}$	$0,4 \cdot 10^{-2}$	$0,7 \cdot 10^{-1}$
P_2^*	$0,8 \cdot 10^{-1}$	$0,2 \cdot 10^{-4}$	$0,3 \cdot 10^{-1}$
P_3^*	$0,9 \cdot 10^{-1}$	$0,6 \cdot 10^{-2}$	$0,4 \cdot 10^{-5}$

Выводы. В отличие от существующих постановок задач идентификации параметров конкретных моделей деформируемых систем, предложен метод идентификации модели, адекватной текущей ситуации, базирующийся на нейросетевой аппроксимации операторов обратной задачи для различных моделей действительности в сочетании с теоремой взаимности. Установлено, что использование такого подхода является эффективным в случае диагностики текущего состояния системы в процессе эксплуатации.

Список использованной литературы:

1. Ободан Н. И. Ідентифікація навантажень за допомогою динамічної нейронної мережі / Н. И. Ободан, Н. А. Гук // Машинознавство. — 2013. — № 4. — С. 38–45.
2. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1979. — 386 с.
3. Терехов В. А. Искусственные нейронные сети и их применение в системах автоматического управления / В. А. Терехов, Д. В. Ефимов, И. Ю. Тюнин. — СПб. : С.-Петерб. гос. электротехн. ун-т, 1997. — 63 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. — М. : Наука, 1970. — 939 с.

The problem of selection and identification of the model of a real system based on the results of observations is considered. The identification procedure using configured neural network is performed. Selection of the model using the measure of equivalence of proposed model to the models with corresponding training samples is presented. The reciprocity theorem while selecting measures of equivalence was used. Conditions of solvability of parameter identification problem were formulated.

Key words: *model of reality, identification, a measure of equivalence, reciprocity theorem, the neural network.*

Отримано: 18.03.2015