УДК 519.21

Е.Н. ДЕРИЕВА, С.П. ШПИГА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМ С АДДИТИВНЫМ ДРОБНЫМ БРОУНОВСКИМ ПОЛЕМ

Аннотация. Исследована задача непараметрического оценивания (идентификации) для достаточно широкого класса случайных полей на плоскости, удовлетворяющих решению стохастического дифференциального уравнения в частных производных с аддитивным дробным броуновским полем. Асимптотические свойства оценки параметра сноса изучены с использованием метода сита.

Ключевые слова: задача идентификации, дробное броуновское поле, параметр сноса, метод сита.

Проблемы оценивания функций, которые являются коэффициентами дифференциальных операторов в параболических и гиперболических стохастических уравнениях в частных производных (stochastic partial differential equation, SPDE), часто возникают в прикладных моделях метеорологии, физической химии, экономике, океанографии и т.д. Асимптотические свойства оценок параметров SPDE изучались, в частности, в работах [1–5].

Для исследования регрессионных моделей с полумартингалами У. Гренандер в 1981 г. использовал так называемый «метод сита» [6], состоящий в максимизации функции правдоподобия на возрастающей последовательности конечномерных подпространств. Размерность «сита» стремится к бесконечности с увеличением размера выборки, а последовательность ограниченных оценок максимального правдоподобия параметра состоятельна и асимптотически нормальна. Данный метод в [7] использовался для изучения непараметрических оценок, в частности, функций от винеровского процесса, оценки коэффициента сноса линейной диффузии, оценки среднего для гауссового процесса, а в работе [8] его применяли для оценивания бесконечномерного параметра в модели нестационарной линейной диффузии.

В настоящей статье метод сита использован для задачи идентификации параметра сноса SPDE в системе с аддитивным дробным броуновским полем, заданным на плоскости. Аналогичные результаты для одномерной системы с аддитивным дробным броуновским движением получены Рао в [9], подобная задача для SPDE с аддитивным броуновским полем представлена в [10].

Рассмотрим SPDE

$$dX(s,t)=\theta(s,t)X(s,t)dsdt+dB^H(s,t),\ X(0,0)=\zeta,\ \ (s,t)\in[0,T]^2,$$

где $\theta(s,t)\in L^2([0,T]^2, dtds)$, $B^H(s,t)$ — дробное броуновское поле с $H=(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in(1/2,1)$, ζ — гауссова случайная величина, не зависимая от $B^H(s,t)$. Другими словами, $X(s,t)$ удовлетворяет уравнению

$$X(s,t)=\zeta+\int_0^s\int_0^t\theta(u,v)X(u,v)dudv+B^H(s,t).$$

Положим $c_\theta(s,t)=\theta(s,t)X(s,t)$, $(s,t)\in[0,T]^2$, и предположим, что траектории c_θ достаточно гладкие для существования случайного процесса

$$R_\theta(s,t)=\frac{d}{d\omega_s^\alpha}\frac{d}{d\omega_t^\beta}\int_0^s\int_0^t k_\alpha(s,u)k_\beta(t,v)c_\theta(u,v)dudv,$$

где

$$k_\alpha(s,t)=\frac{s^{1/2-\alpha}(t-s)^{1/2-\alpha}}{2\alpha\Gamma(3/2-\alpha)\Gamma(1/2+\alpha)},\ \omega_t^\alpha=\frac{\Gamma(3/2-\alpha)t^{2-2\alpha}}{2\alpha\Gamma(3-2\alpha)\Gamma(\alpha+1/2)}.$$

Предположим также, что траектории $\{R_\theta(s,t),(s,t)\in[0,T]^2\}$ принадлежат $L^2([0,T]^2,d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta)$ почти наверное. Определим

$$Z(s,t)=\int_0^s\int_0^t k_\alpha(s,u)k_\beta(t,v)dX(u,v).$$

Принимая во внимание, что

$$M^{\alpha\beta}(s,t)=\int_0^s\int_0^t k_\alpha(s,u)\,k_\beta(t,v)\,dW^{\alpha\beta}(u,v),\ 0\le s,t,u,v\le T,$$

получаем

$$Z(s,t)=\int_0^s\int_0^t k_\alpha(s,u)k_\beta(t,v)c_\theta(u,v)dudv+M^{\alpha\beta}(s,t).$$

Кроме того,

$$X(s,t)=\int_0^s\int_0^t K_\alpha(s,u)K_\beta(t,v)dZ(u,v),$$

где $K_\alpha(s,t)=\alpha(2\alpha-1)\int_0^s r^{2\alpha-1}(r-t)^{\alpha-3/2}dr$, а также справедливо [11]

$$Z(s,t)=\int_0^s\int_0^t R_\theta(u,v)d\omega_u^\alpha d\omega_v^\beta+M^{\alpha\beta}(s,t).$$

Очевидно, что фильтрация, генерируемая $\{Z(s,t),(s,t)\in[0,T]^2\}$ и $\{X(s,t),(s,t)\in$ $\in[0,T]^2\}$, совпадает, т.е. можно без потери информации использовать одно поле вместо другого. Пусть $P_\theta(s,t)$ — мера, генерируемая полем $\{X(s,t),(s,t)\in[0,T]^2\}$, когда $\theta(s,t)$ — настоящая функция сноса. Из теоремы Гирсанова [12] следует, что существует производная Радона–Никодима по отношению к $P_0(s,t)$, заданная следующим образом:

$$\frac{dP_\theta(T,T)}{dP_0(T,T)}=\exp\left(\int_0^T\int_0^T R_\theta(s,t)dZ(s,t)-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T R_\theta^2(s,t)d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta\right).$$

Из определения процесса $Z(s,t)$ получим, что его распределение по мере $P_\theta(s,t)$ является таким же как процесса $X(s,t)$ по мере $P_0(s,t)$.

Будем полагать, что X наблюдается на $[0,T]^2$ и $\{X_i, i=\overline{1,n}\}$ — случайная выборка n независимых наблюдений. Тогда логарифм функции правдоподобия

$$L_n(X_1,\ldots,X_n,\theta)=L_n(\theta)=\sum_{i=1}^n\left(\int_0^T\int_0^T R_\theta^{(i)}(s,t)dZ(s,t)-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T[R_\theta^{(i)}(s,t)]^2d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta\right),$$

где $R_\theta^{(i)}(s,t)$ определяется по аналогии с $R_\theta(s,t)$ для X_i.

Пусть $\{V_n, n\ge 1\}$ — возрастающая последовательность подпространств конечных размерностей $\{d_n\}$, $\bigcup_{n\ge1}V_n$ плотно в $L^2([0,T]^2,dsdt)$. Используем описанный метод сита для максимизации $L_n(\theta)$ на подпространствах V_n.

Обозначим $\{e_1, \ldots, e_{d_n}\}$ базис V_n, тогда для $\theta \in V_n$ имеем $\theta(\cdot) = \sum_{j=1}^{d_n} \theta_j e_j(\cdot)$, и следовательно,

$$R_\theta^{(i)}(s,t) = \frac{d}{d\omega_s^\alpha} \frac{d}{d\omega_t^\beta} \int_0^s \int_0^t k_\alpha(s,u) k_\beta(t,v) \theta(u,v) X_i(u,v) du dv =$$

$$= \frac{d}{d\omega_s^\alpha} \frac{d}{d\omega_t^\beta} \int_0^s \int_0^t k_\alpha(s,u)\, k_\beta(t,v) \left[\sum_{j=1}^{d_n} \theta_j e_j(u,v)\right] X_i(u,v) du dv =$$

$$= \sum_{j=1}^{d_n} \theta_j \frac{d}{d\omega_s^\alpha} \frac{d}{d\omega_t^\beta} \int_0^s \int_0^t k_\alpha(s,u)\, k_\beta(t,v)\, e_j(u,v) X_i(u,v)\, du dv.$$

Обозначим

$$\frac{d}{d\omega_s^\alpha} \frac{d}{d\omega_t^\beta} \int_0^s \int_0^t k_\alpha(s,u) k_\beta(t,v) e_j(u,v) X_i(u,v) ds dt = \Phi_{ij}(s,t).$$

Тогда $R_\theta^{(i)}(s,t) = \sum_{j=1}^{d_n} \theta_j \Phi_{ij}(s,t)$. Далее,

$$\int_0^T \int_0^T R_\theta^{(i)}(s,t) dZ_i(s,t) = \int_0^T \int_0^T \left[\sum_{j=1}^{d_n} \theta_j \Phi_{ij}(s,t)\right] dZ_i(s,t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{d_n} \theta_j \int_0^T \int_0^T \Phi_{ij}(s,t)\, dZ_i(s,t) = \sum_{j=1}^{d_n} \theta_j R_{ij}.$$

Кроме того,

$$\int_0^T \int_0^T (R_\theta^{(i)}(s,t))^2\, d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta = \int_0^T \int_0^T \left[\sum_{j=1}^{d_n} \theta_j \Phi_{ij}(s,t)\right]^2 d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta =$$

$$= \sum_{j=1}^{d_n} \sum_{k=1}^{d_n} \theta_j \theta_k \int_0^T \int_0^T \Phi_{ij}(s,t) \Phi_{ik}(s,t)\, d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta =$$

$$= \sum_{j=1}^{d_n} \sum_{k=1}^{d_n} \theta_j \theta_k \left[\int_0^T \int_0^T \Phi_{ij}(s,t) \Phi_{ik}(s,t)\, dZ(s,t) - \int_0^T \int_0^T \Phi_{ij}(s,t) \Phi_{ik}(s,t) dM^{\alpha\beta}(s,t)\right] =:$$

$$=: \sum_{j=1}^{d_n} \sum_{k=1}^{d_n} \theta_j \theta_k \Lambda_{ijk}.$$

Логарифм функции правдоподобия, соответствующий $\{X_i\}$, задается как

$$L_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^T \int_0^T R_\theta^{(i)}(s,t) dZ_i(s,t) - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T (R_\theta^{(i)}(s,t))^2\, d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{d_n} \theta_j R_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d_n} \sum_{k=1}^{d_n} \theta_j \theta_k \Lambda_{ijk}\right] = \left[\sum_{j=1}^{d_n} \theta_j \sum_{i=1}^{n} R_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d_n} \sum_{k=1}^{d_n} \sum_{i=1}^{n} \theta_j \theta_k \Lambda_{ijk}\right] =$$

$$= n \left[\sum_{j=1}^{d_n} \theta_j B_j^{(n)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d_n} \sum_{k=1}^{d_n} \theta_j \theta_k A_{jk}^{(n)}\right],$$

где $B_j^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{ij}^{n} R_{ij}$, $j = \overline{1, d_n}$, $A_{jk}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Lambda_{ijk}$, $j = \overline{1, d_n}$. В векторно-матричном виде, обозначив $\theta^{(n)} = (\bar{\theta}_j)$, $B^{(n)} = (B_j^{(n)})$, $A^{(n)} = (A_{jk}^{(n)})$, получим $L_n(\theta) = n[B^{(n)} \theta^{(n)} -$

$-\frac{1}{2}(\theta^{(n)})' A^{(n)} \theta^{(n)}]$. Поэтому оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}^{(n)}(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} \hat{\theta}_j^{(n)} e_j(\cdot)$, где $\{\hat{\theta}_j^{(n)}\} = \hat{\theta}^{(n)}$ — решение матричного уравнения $A^{(n)} \hat{\theta}^{(n)} = B^{(n)}$, или, если $A^{(n)}$ обратима, $\hat{\theta}^{(n)} = (A^{(n)})^{-1} B^{(n)}$.

Построим теперь в V_n ортонормированный базис так, чтобы при $n \to \infty$ матрица $A^{(n)}$ обращалась в единичную. Отметим, что

$$A_{jk}^{(n)} = \frac{1}{n} \int_0^T \int_0^T \Phi_{ij}(s,t)\, \Phi_{ik}(s,t)\, d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \int_0^T E\left[\left(\frac{d}{d\omega_s^\alpha} \frac{d}{d\omega_t^\beta} \int_0^s \int_0^t k_\alpha(s,u) k_\beta(t,v) e_j(u,v) X_i(u,v)\, du dv\right) \times\right.$$

$$\left. \times \left(\frac{d}{d\omega_s^\alpha} \frac{d}{d\omega_t^\beta} \int_0^s \int_0^t k_\alpha(s,u) k_\beta(t,v) e_k(u,v) X_i(u,v)\, du dv\right)\right] d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta .$$

Согласно усиленному закону больших чисел при $n \to \infty$ имеем

$$A_{jk}^{(n)} \to \int_0^T \int_0^T E\left[\left(\frac{d}{d\omega_s^\alpha} \frac{d}{d\omega_t^\beta} \int_0^s \int_0^t k_\alpha(s,u) k_\beta(t,v) e_j(u,v) X(u,v)\, du dv\right) \times\right.$$

$$\left. \times \left(\frac{d}{d\omega_s^\alpha} \frac{d}{d\omega_t^\beta} \int_0^s \int_0^t k_\alpha(s,u) k_\beta(t,v) e_k(u,v) X(u,v)\, du dv\right)\right] d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta .$$

Рассмотрим последовательность ϕ_i, $i = \overline{1, d_n}$, которая является искомым базисом в V_n в смысле внутреннего произведения

$$\langle h, g \rangle = \int_0^T \int_0^T E\left[\left(\frac{d}{d\omega_s^\alpha} \frac{d}{d\omega_t^\beta} \int_0^s \int_0^t k_\alpha(s,u) k_\beta(t,v) h(u,v) X(u,v)\, du dv\right) \times\right.$$

$$\left. \times \left(\frac{d}{d\omega_s^\alpha} \frac{d}{d\omega_t^\beta} \int_0^s \int_0^t k_\alpha(s,u) k_\beta(t,v) g(u,v) X(u,v)\, du dv\right)\right] d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta .$$

Обозначим $\hat{\xi}^{(n)} = \{\hat{\xi}_1^{(n)}, \ldots, \hat{\xi}_{d_n}^{(n)}\}$ координаты $\hat{\theta}^{(n)}$ в новом базисе ϕ_i, $i = \overline{1, d_n}$. Тогда вектор $\hat{\xi}^{(n)}$ является решением уравнения $a^{(n)} \hat{\xi}^{(n)} = b^{(n)}$, где $a^{(n)}$ и $b^{(n)}$ задаются соответственно как

$$a_{jk}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \int_0^T \left[\left(\frac{d}{d\omega_s^\alpha} \frac{d}{d\omega_t^\beta} \int_0^s \int_0^t k_\alpha(s,u) k_\beta(t,v)\, \phi_j(u,v) X_i(u,v)\, du dv\right) \times\right.$$

$$\left. \times \left(\frac{d}{d\omega_s^\alpha} \frac{d}{d\omega_t^\beta} \int_0^s \int_0^t k_\alpha(s,u) k_\beta(t,v)\, \phi_k(u,v) X_i(u,v)\, du dv\right) d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta \right],$$

$$b_j^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \int_0^T \left[\frac{d}{d\omega_s^\alpha} \frac{d}{d\omega_t^\beta} \int_0^s \int_0^t k_\alpha(s,u) k_\beta(t,v)\, \phi_j(u,v) X_i(u,v)\, du dv\right] dZ(s,t).$$

Пусть $\theta^{(n)}=\sum_{i=1}^{d_n}\zeta_i\phi_i$ — проекция θ на V_n в смысле определенного ранее внутреннего произведения. Тогда

$$b_j^{(n)}-\sum_{i=1}^{d_n}a_{jk}^{(n)}\zeta_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)dZ_i(s,t)-\sum_{i=1}^{d_n}a_{jk}^{(n)}\zeta_k=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)[R_{\theta}^{(i)}(s,t)d\omega_s^{\alpha}d\omega_t^{\beta}+dM_i^{\alpha\beta}(s,t)]-\sum_{i=1}^{d_n}a_{jk}^{(n)}\zeta_k=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\theta}^{(i)}(s,t)d\omega_s^{\alpha}d\omega_t^{\beta}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)dM_i^{\alpha\beta}(s,t)-\sum_{i=1}^{d_n}a_{jk}^{(n)}\zeta_k=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)\left[\sum_{r=1}^{\infty}\zeta_r R_{\phi_r}^{(i)}(s,t)\right]d\omega_s^{\alpha}d\omega_t^{\beta}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)dM_i^{\alpha\beta}(s,t)-\sum_{i=1}^{d_n}a_{jk}^{(n)}\zeta_k=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)\left[\sum_{r=1}^{d_n}\zeta_r R_{\phi_r}^{(i)}(s,t)+\sum_{r=d_n+1}^{\infty}\zeta_r R_{\phi_r}^{(i)}(s,t)\right]d\omega_s^{\alpha}d\omega_t^{\beta}+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)dM_i^{\alpha\beta}(s,t)-\sum_{i=1}^{d_n}\zeta_k\int_0^T\int_0^T R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\phi_k}^{(i)}(s,t)d\omega_s^{\alpha}d\omega_t^{\beta}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\theta-\theta^{(n)}}^{(i)}(s,t)d\omega_s^{\alpha}d\omega_t^{\beta}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)dM_i^{\alpha\beta}(s,t)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T [R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\theta-\theta^{(n)}}^{(i)}(s,t)-E(R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\theta-\theta^{(n)}}^{(i)}(s,t))]d\omega_s^{\alpha}d\omega_t^{\beta}+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)dM_i^{\alpha\beta}(s,t),$$

поскольку, с одной стороны,

$$\left\langle \theta-\theta^{(n)},\phi_j\right\rangle=E\int_0^T\int_0^T R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\theta-\theta^{(n)}}^{(i)}(s,t)d\omega_s^{\alpha}d\omega_t^{\beta},$$

а с другой, — $\left\langle \theta-\theta^{(n)},\phi_j\right\rangle=0$ вследствие ортогональности базиса $\{\phi_i, i\ge 1\}$. Поэтому $a^{(n)}(\hat{\zeta}^{(n)}-\zeta^{(n)})=c^{(n)}$ — векторы с компонентами $\zeta=\{\zeta_i\}$ и

$$c_j^{(n)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T [R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\theta-\theta^{(n)}}^{(i)}(s,t)-E(R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\theta-\theta^{(n)}}^{(i)}(s,t))]d\omega_s^{\alpha}d\omega_t^{\beta}+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)dM_i^{\alpha\beta}(s,t).$$

Положим $\delta_{jk}=1-1_{j\ne k}$. Из ортогональности базиса $\{\phi_i\}$ следует, что

$$a_{jk}^{(n)}-\delta_{jk}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^T [R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\phi_k}^{(i)}(s,t)-E(R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\phi_k}^{(i)}(s,t))]d\omega_s^{\alpha}d\omega_t^{\beta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_{ijk},$$

$$c_j^{(n)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_{ij}^{(n)}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\xi}_{ij}.$$

Очевидно, $E\xi_{ijk}=0$, а $Ea_{jk}^{(n)}=\delta_{jk}$, поэтому, принимая во внимание, что X_i одинаково распределены, и, применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$E(a_{jk}^{(n)}-\delta_{jk})^2=\mathrm{Var}(a_{jk}^{(n)})=\frac{1}{n}\mathrm{Var}(\xi_{1jk})=\frac{1}{n}E(\xi_{1jk}^2)=$$

$$=\frac{1}{n}E\left(\int_0^T\int_0^T[R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\phi_k}^{(i)}(s,t)-E(R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\phi_k}^{(i)}(s,t))]\,d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta\right)^2\le$$

$$\le\frac{1}{n}E\left(\int_0^T\int_0^T[R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\phi_k}^{(i)}(s,t)-E(R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\phi_k}^{(i)}(s,t))]^2\,d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta\right)\omega_T^\alpha\omega_T^\beta=$$

$$=\frac{1}{n}\omega_T^\alpha\omega_T^\beta\int_0^T\int_0^T E\left[R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\phi_k}^{(i)}(s,t)\right]^2 d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta.$$

Из определения $R_\theta(s,t)$ следует, что это поле гауссово, а $M^{\alpha\beta}$ — также гауссово и является сильным мартингалом с квадратической вариацией $\omega_T^\alpha\omega_T^\beta$. Поскольку для двух гауссовых величин: ξ_1 и ξ_2, существует $c=\mathrm{const}>0$, что $E\xi_1\xi_2\le cE\xi_1^2E\xi_2^2$ [9, лемма 5.1], применив данное соотношение к последней формуле, получим

$$E(a_{jk}^{(n)}-\delta_{jk})^2\le\frac{1}{n}\omega_T^\alpha\omega_T^\beta\int_0^T\int_0^T E[R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)R_{\phi_k}^{(i)}(s,t)]^2\,d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta\le$$

$$\le\frac{c}{n}\omega_T^\alpha\omega_T^\beta\int_0^T\int_0^T E[R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)]^2E[R_{\phi_k}^{(i)}(s,t)]^2\,d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta\le$$

$$\le\frac{c\omega_T^\alpha\omega_T^\beta}{n}\sup_{(s,t)\in[0,T]^2}E[R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)]^2\int_0^T\int_0^T E[R_{\phi_k}^{(i)}(s,t)]^2\,d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta\le$$

$$\le\frac{c\omega_T^\alpha\omega_T^\beta}{n}\sup_{(s,t)\in[0,T]^2}E[R_{\phi_j}^{(i)}(s,t)]^2,$$

так как $\int_0^T\int_0^T E[R_{\phi_k}^{(i)}(s,t)]^2\,d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta=1$, $[\phi_i]$ — ортонормированный базис. Очевидно, что $E(\xi_{ij}^{(n)})=0$ и $E(\widetilde{\xi}_{ij})=0$. Более того,

$$E(\hat{\xi}_{ij})^2=E\left[\int_0^T\int_0^T R_{\phi_k}^{(i)}(s,t)dM_i^{\alpha\beta}(s,t)\right]^2=\int_0^T\int_0^T E\,[R_{\phi_k}^{(i)}(s,t)]^2\,d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta=1.$$

Для $E(\xi_{ij}^{(n)})^2$ имеем следующую оценку:

$$E(\xi_{ij}^{(n)})^2\le c\omega_T^\alpha\omega_T^\beta\sup_{(s,t)\in[0,T]^2}E[R_{\Phi_j}^{(i)}(s,t)]^2\,\|\theta-\theta^{(n)}\|^2.$$

Оценим $E(c_j^{(n)})^2$, приняв во внимание, что $E(c_j^{(n)})=0$. Легко видеть, что

$$E(c_j^{(n)})^2=\mathrm{Var}(c_j^{(n)})=\frac{1}{n}\mathrm{Var}(\widetilde{\xi}_{1j}^{(n)}+\xi_{1j})\le\frac{1}{n}E(\widetilde{\xi}_{1j}^{(n)}+\widetilde{\xi}_{1j})^2\le$$

$$\le\frac{2}{n}[E(\widetilde{\xi}_{1j}^{(n)})^2+E(\widetilde{\xi}_{1j})^2]\le\frac{2}{n}[1+c\omega_T^\alpha\omega_T^\beta\sup_{(s,t)\in[0,T]^2}E(R_{\phi_j}^{(i)}(s,t))^2]\,\|\theta-\theta^{(n)}\|^2.$$

Теорема 1. Пусть U_n — возрастающая последовательность определенных ранее подпространств в $L^2([0,T]^2,dsdt)$ размерности d_n $(d_n\to\infty)$ и $\{\phi_i,\ i=\overline{1,d_n}\}$ — ортонормированный базис в U_n. Предположим, что последовательность

$$\gamma_n = \sup_{(s,t)\in[0,T]^2} \sup_{1\le j\le d_n} \left(\frac{d}{d\omega_s^{\alpha}} \frac{d}{d\omega_t^{\beta}} \int_0^s \int_0^t k_{\alpha}(s,u) k_{\beta}(t,v) \phi_j(u,v) X(u,v) dudv \right)^2$$

такова, что $\frac{d_n^2 \gamma_n^2}{n} \to 0$ при $n \to 0$ и $\frac{d_n \gamma_n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\| \hat{\xi}^{(n)} - \zeta^{(n)} \| \to 0$ при $n \to \infty$ (по вероятности).

Доказательство. К разности $\hat{\xi}^{(n)} - \zeta^{(n)} = (a^{(n)})^{-1} c^{(n)}$ применим результат [9, лемма 5.2] и получим

$$\| \hat{\xi}^{(n)} - \zeta^{(n)} \| \le \left\{ 1 - \left[\sum_{j=1}^{d_n} \sum_{k=1}^{d_n} (a_{jk}^{(n)} - \delta_{jk})^2 \right]^{1/2} \right\}^{-1} \| c^{(n)} \|.$$

Из условий теоремы и оценки для $a_{jk}^{(n)} - \delta_{jk}$ непосредственно следует, что

$$E \left[\sum_{j=1}^{d_n} \sum_{k=1}^{d_n} (a_{jk}^{(n)} - \delta_{jk})^2 \right] \le \frac{c d_n^2 \gamma_n^2}{n} \to 0, \ n \to \infty,$$

$$E \| c^{(n)} \|^2 \le c \gamma_n \left[\frac{d_n}{n} + \frac{d_n \gamma_n \| \theta - \theta^{(n)} \|^2}{n} \right] \to 0, \ n \to \infty.$$

Поэтому $\| \hat{\xi}^{(n)} - \zeta^{(n)} \| \to 0, \ n \to 0,$ по вероятности.

Теорема доказана.

Далее рассмотрим $\| \hat{\theta}^{(n)} - \theta^{(n)} \|^2$:

$$\| \hat{\theta}^{(n)} - \theta^{(n)} \|^2 =$$

$$= \int_0^T \int_0^T E \left[\frac{d}{d\omega_s^{\alpha}} \frac{d}{d\omega_t^{\beta}} \int_0^s \int_0^t k_{\alpha}(s,u) k_{\beta}(t,v) | \hat{\theta}^{(n)}(u,v) - \theta^{(n)}(u,v) | X(u,v) dudv \right]^2 d\omega_s^{\alpha} d\omega_t^{\beta} =$$

$$= \sum_{j=1}^{d_n} | \hat{\zeta}_j^{(n)} - \zeta_j |^2 + \sum_{j=d_n+1}^{\infty} \zeta_j^2 \to 0.$$

Первое слагаемое стремится к нулю согласно теореме 1. Поскольку $\bigcup_{n\ge1} V_n$ плотно в $L^2([0,T]^2)$, оно также плотно и в метрике, генерируемой внутренним произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Отсюда следует, что по вероятности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{d\omega_s^{\alpha}} \frac{d}{d\omega_t^{\beta}} \int_0^s \int_0^t k_{\alpha}(s,u) k_{\beta}(t,v) | \hat{\theta}^{(n)}(u,v) - \theta^{(n)}(u,v) | X(u,v) dudv = 0.$$

Лемма 1 [10, лемма 5.5]. Пусть случайные величины $\eta^{(n)} = (\eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_{d_n}^{(n)})$ таковы, что $\sum_{j=1}^{d_n} (\eta_j^{(n)})^2 \to \eta^2$, $n \to \infty$. Тогда случайная величина $\sum_{j=1}^{d_n} c_j^{(n)} \eta_j^{(n)}$ асимптотически нормальна со средним 0 и вариацией η^2.

Теорема 2. Пусть $\eta^{(n)}$ таковы, что $\sum_{j=1}^{d_n} (\eta_j^{(n)})^2 \to \eta^2$, $n \to \infty$, выполнены условия теоремы 1, а также

$$\frac{d_n^3 \gamma_n^2}{n} \to 0, \ \frac{d_n^3 \gamma_n^3}{n} \to 0, \ n \to \infty.$$

Тогда $\sqrt{n}\sum_{j=1}^{d_n}\eta_j^{(n)}(\widetilde{\xi}_i^{(n)}-\zeta_i)$ асимптотически нормальна с $N(0,\eta^2)$.

Доказательство в большой степени повторяет одномерный случай, поэтому приведем лишь основные его шаги. Из приведенных ранее свойств $R_\theta(s,t)$:

$$R_\theta^2(s,t)=\left(\frac{d}{d\omega_s^\alpha}\right)^2\left(\frac{d}{d\omega_t^\beta}\right)^2\int_0^s\int_0^t\int_0^u\int_0^v\frac{dk_\alpha(s,u)}{ds}\frac{dk_\beta(t,v)}{dt}\times$$

$$\times\,\theta(u,v)X(u,v)\frac{dk_\alpha(s,x)}{ds}\frac{dk_\beta(t,y)}{dt}dxdydudv;$$

$$E\left(\int_0^T\int_0^T R_\theta^2(s,t)d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta\right)=\int_0^T\int_0^T\left(\frac{ds}{d\omega_s^\alpha}\right)^2\left(\frac{dt}{d\omega_t^\beta}\right)^2\Upsilon d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta,$$

где

$$\Upsilon=\int_0^s\int_0^t\int_0^u\int_0^v\frac{dk_\alpha(s,u)}{ds}\frac{dk_\beta(t,v)}{dt}\frac{dk_\alpha(s,x)}{ds}\frac{dk_\beta(t,y)}{dt}\theta(u,v)\theta(x,y)\times$$

$$\times E(X(u,v)X(x,y))dudvdxdy.$$

Принимая во внимание, что $\frac{dk_H(t,s)}{dt}=\frac{s^{1/2-H}(t-s)^{1/2-H}(1/2-H)}{2\alpha\Gamma(3/2-H)\Gamma(1/2+H)}$, получаем

$$E\left(\int_0^T\int_0^T R_\theta^2(s,t)d\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta\right)=\widetilde{C}\int_0^T\int_0^T s^{4\alpha-2}t^{4\beta-2}\Psi\omega_s^\alpha d\omega_t^\beta,$$

где

$$\Psi=\int_0^s\int_0^t\int_0^u\int_0^v v^{1/2-\beta}(t-v)^{-1/2-\beta}y^{1/2-\beta}(t-y)^{-1/2-\beta}u^{1/2-\alpha}(s-u)^{-1/2-\alpha}\times$$

$$\times\,x^{1/2-\alpha}(s-x)^{-1/2-\alpha}\theta(u,v)\theta(x,y)E(X(u,v)X(x,y))dudvdxdy.$$

Теорема доказана.

Полученные результаты относительно асимптотического поведения оценки коэффициента сдвига стохастического дифференциального уравнения с дробным броуновским полем можно использовать при решении разнообразных прикладных задач, а также в последующих работах по данной тематике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lototsky S. Parameter estimation for stochastic parabolic equations: asymptotic properties of a two-dimensional projection based estimator // Stat. Inference for Stoch. Process. — 2003. — **6**, N 1. — P. 65–87.

2. Huebner M., Rozovskii B. L. On asymptotic properties of maximum likelihood estimators for parabolic stochastic PDE's // Probability Theory and Related Fields. — 1995. — **103**, N 2. — P. 143–163.

3. Knopov P.S., Derieva E.N. Estimation and control problems for stochastic partial differential equations. — New York: Springer, 2013. — 240 p.

4. Ibragimov I. A., Khasminskii R. Z. Some estimation problems in infinite dimensional white noise // Festschrift for Lucien Le Cam. — Berlin: Springer, 1997. — P. 259–274.

5. Касицька Є.Й., Кнопов П.С. Асимптотичні властивості оцінки коефіцієнта зсуву стохастичного диференціального рівняння з дробовим броунівським рухом // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2008. — № 79. — С. 65–72.

6. Grenander U. Abstract Inference. — New York: Wiley, 1981. — 526 p.

7. McKeague I.W. Estimation for a semimartingale regression model using the method of sieves // The Annals of Statistics. — 1986. — **14**, N 2. — P. 579–589.

8. Nguyen H.T., Pham T. D. Identification of nonstationary diffusion model by the method of sieves // SIAM Journal on Control and Optimization. — 1982. — **20**, N 5. — P. 603–611.

9. Prakasa Rao B. L. S. Statistical inference for fractional diffusion processes. — Chichester: Wiley, 2010. — 278 p.

10. Huebner M., Lototsky S. Asymptotic analysis of the sieve estimator for a class of parabolic SPDEs // Scandinavian Journal of Statistics. — 2000. — **27.** — P. 353–370.

11. Sottinen T., Tudor C. A. Parameter estimation for stochastic equations with additive fractional Brownian sheet // Stat. Inference for Stoch. Process. — 2008. — N 11. — P. 221–236.

12. Кнопов П.С., Штатланд Э.С. Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих некоторым случайным полям на плоскости // Вопросы статистики и управления случайными процессами. — Киев: Ин-т математики, 1973. — С. 153–169.

Надійшла до редакції 03.12.2015

О.М. Дерієва, С.П. Шпига

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ІДЕНТИФІКАЦІЇ СИСТЕМ З АДИТИВНИМ ДРОБОВИМ БРОУНІВСЬКИМ ПОЛЕМ

Анотація. Досліджено задачу непараметричного оцінювання (ідентифікації) для достатньо широкого класу випадкових полів на площині, які задовольняють розв'язку стохастичного диференціального рівняння в частинних похідних з адитивним дробовим броунівським полем. Асимптотичні властивості оцінки параметра зсуву вивчено з використанням методу сита.

Ключові слова: задача ідентифікації, дробове броунівське поле, параметр зсуву, метод сита.

O.M. Deriyeva, S.P. Shpyga

ON A PROBLEM OF SYSTEM IDENTIFICATION WITH ADDITIVE FRACTIONAL BROWNIAN FIELD

Abstract. In the paper we investigate the problem of nonparametric estimation (identification) for a sufficiently wide class of random fields on a plane satisfying the solution of stochastic partial differential equations with additive fractional Brownian field. The asymptotic properties of the drift parameter are analyzed using the sieve method.

Keywords: identification problem, fractional Brownian field, drift parameter, method of sieves.

Дериева Елена Николаевна,
кандидат физ.-мат наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: derieva@gmail.com

Шпига Сергей Петрович,
младший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: shpyga@meta.ua