УДК 519.21

Ю.В. ЖЕРНОВЫЙ, К.Ю. ЖЕРНОВЫЙ

МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА M/G/1/m С ПОРОГОВЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

Аннотация. Предложен метод исследования систем обслуживания M/G/1/m с функцией случайного отбрасывания заявок и распределением времени обслуживания, зависящим от длины очереди. Получены формулы для определения преобразований Лапласа распределения числа заявок в системе в течение периода занятости, а также функции распределения периода занятости и для вычисления стационарных характеристик. Соотношения для стационарных характеристик проверены с помощью имитационных моделей, построенных с использованием инструментальных средств GPSS World. Приведен пример сравнения результатов применения различных средств управления параметрами системы обслуживания.

Ключевые слова: одноканальная система обслуживания, пороговые стратегии, случайное отбрасывание заявок, метод потенциалов.

ВВЕДЕНИЕ

Системы обслуживания, которые могут работать в нескольких режимах, отличающихся интенсивностями входящего потока и обслуживания, используются для моделирования процессов передачи информации в информационно-вычислительных сетях [1–3]. Пороговое управление входящим потоком и временем обслуживания применяется в целях предотвращения перегрузок в таких системах.

В простейшем случае суть пороговой стратегии заключается в следующем: если длина очереди превышает заданное пороговое значение, то интенсивность входящего потока можно снизить (или свести к нулю полной блокировкой потока заявок), а интенсивность обслуживания необходимо увеличить. Используются и более сложные стратегии, когда распределение времени обслуживания зависит от числа заявок в системе в момент начала обслуживания каждой заявки [3, 4]. Управление интенсивностью входящего потока осуществляется с помощью случайного отбрасывания заявок, в результате каждую поступающую заявку можно отбросить с определенной вероятностью, зависящей от длины очереди в момент поступления заявки, даже если буфер еще полностью не заполнен [2]. Зависимость вероятности отбрасывания заявок от длины очереди называют функцией отбрасывания.

Эффективные алгоритмы вычисления стационарных характеристик систем типа $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ и $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1$ с пороговыми стратегиями функционирования созданы с помощью метода потенциалов [4–7]. Систему типа M/G/1/m , в которую заявки прибывают группами численностью θ, обозначим $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, причем $\mathbf{P}\{\theta=k\}=a_k,\ \sum_{k=1}^{\infty}a_k=1,\ \sum_{k=1}^{\infty}ka_k<\infty.$

Метод потенциала с одним базовым случайным блужданием разработан в целях исследования системы $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ с одним фиксированным распределением времени обслуживания [8] с использованием подхода, предложенного в [9] для изучения непрерывного снизу случайного блуждания. Метод потенциалов предназначен для исследования систем с несколькими режимами функционирования, когда возникает необходимость применения стольких базовых случайных блужданий и их потенциалов сколько и различных режимов функционирования.

В настоящей работе ограничимся рассмотрением систем типа M/G/1/m с ординарным потоком прибывающих заявок, что позволит, с одной стороны, использовать общие универсальные уравнения метода потенциалов [6, 7], а с другой, — получить удобные для вычислений выражения для вероятностных характеристик базовых случайных блужданий для ряда пороговых стратегий, включая случай (не рассмотренный в [4–7]), когда интенсивность потока принимаемых на обслуживание заявок изменяет свои значения в моменты изменения числа заявок в системе. Таким образом, покажем, что метод потенциалов пригоден для исследования системы M/G/1/m с функцией случайного отбрасывания заявок. В отличие от работы [10] используем функцию отбрасывания, которая изменяет свои значения в моменты изменения числа заявок в системе. Каждую поступающую заявку можно принять на обслуживание или отбросить согласно правилу: если в момент прибытия заявки в системе находится n заявок, то поступившая заявка принимается на обслуживание с вероятностью β_n и покидает систему (получает отказ, отбрасывается) с вероятностью $1-\beta_n$. В [10] рассмотрен случай, когда значение функции отбрасывания не изменяется в промежутке времени от начала до завершения обслуживания каждой заявки.

ОПИСАНИЕ ПОРОГОВЫХ СТРАТЕГИЙ

Рассмотрим систему M/G/1/m, где m — максимальное число заявок, которые могут одновременно находиться в очереди. Входящий поток заявок простейший, т.е. интервалы времени между моментами прибытия соседних заявок — независимые случайные величины, показательно распределенные с параметром λ.

Опишем используемую наиболее общую пороговую стратегию функционирования системы (назовем соответствующую ей систему обслуживания системой 1). Предположим, что если в момент начала обслуживания заявки число заявок в системе равно $n \in \{1, 2, \dots, m+1\}$, то время обслуживания этой заявки — случайная величина с функцией распределения $F_n(x)$ $(x \ge 0)$, причем прибывшая заявка принимается на обслуживание с вероятностью β_n $(0 < \beta_n \le 1,\ \beta_{m+1} = 0)$ и получает отказ (отбрасывается) с вероятностью $1-\beta_n$. Зафиксируем пороговое значение h $(1 \le h \le m)$ и предположим, что $\beta_n = \widetilde{\beta}$ $(0 < \widetilde{\beta} < 1)$ для $h+1 \le n \le m$.

Рассмотрим два частных случая описанной общей пороговой стратегии, для которых вероятностные характеристики базовых случайных блужданий метода потенциалов определяются по-разному. Систему M/G/1/m , для которой $\beta_n = 1$ при $1 \le n \le h$ и $\beta_n = \widetilde{\beta}$ $(0 < \widetilde{\beta} < 1)$ для $h+1 \le n \le m$, назовем системой 2. Для системы 3 случайное отбрасывание заявок не применяется, т.е. $\beta_n = 1$ для $1 \le n \le m$.

ХАРАКТЕРИСТИКИ БАЗОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Обозначим $\mathbf{P}_n$ условную вероятность, если в начальный момент времени в системе находится $n \in \{0, 1, 2, \dots, m+1\}$ заявок, и пусть $\mathbf{E}(\mathbf{P})$ — математическое ожидание (условная вероятность), если система начинает работать в момент прибытия первой заявки. Пусть $\eta(x)$ — число заявок, поступивших в систему в промежутке времени $[0; x)$. Для $n \in \{1, 2, \dots, m+1\}$ положим

$$f_n(s) = f_n^{(0)}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_n(x),\ f_n^{(i)}(s+\lambda) = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-(s+\lambda)x} dF_n(x),\ i = 0, 1, 2, \dots;$$

$$M_n = \int_0^\infty x dF_n(x) < \infty,\ \overline{F}_n(x) = 1 - F_n(x).$$

Для $\operatorname{Re} s \ge 0$ и $n \in \{1, 2, \dots, m\}$ рассмотрим последовательности $\pi_{ni}(s)$ и $q_{ni}(s)$, определяемые с помощью соотношений

$$\pi_{ni}(s)=\frac{1}{f_n(s)}\int_0^{\infty}e^{-sx}\mathbf{P}_n\{\eta(x)=i+1\}dF_n(x),\ \ i\in\{-1,0,1,\ldots,m-n-1\};$$

$$\pi_{n,m-n}(s)=\frac{1}{f_n(s)}\int_0^{\infty}e^{-sx}\mathbf{P}_n\{\eta(x)\geq m-n+1\}dF_n(x);\qquad(1)$$

$$q_{ni}(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}\mathbf{P}_n\{\eta(x)=i\}\overline{F}_n(x)dx,\ \ i\in\{0,1,2,\ldots,m-n\};$$

$$q_{n,m-n+1}(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}\mathbf{P}_n\{\eta(x)\geq m-n+1\}\overline{F}_n(x)dx.\qquad(2)$$

Последовательность $\pi_{ni}(s)$ при $s>0$ и фиксированном n можно трактовать как распределение скачков некоторого полунепрерывного снизу случайного блуждания S_n (назовем его базовым), соответствующего функции распределения $F_n(x)$ n-го режима обслуживания и вероятностям $\mathbf{P}_n\{\eta(x)=i+1\}$. Функция $R_n(s)=\dfrac{1}{f_n(s)\pi_{n,-1}(s)}$ $(n\in\{1,2,\ldots,m\})$ называется резольвентой, а постоянная $R_n=\lim\limits_{s\to+0}R_n(s)$ — потенциалом случайного блуждания S_n.

Пусть T_n и T — показательно распределенные случайные величины с параметрами $\lambda_n=\lambda\beta_n$ и λ соответственно, а Z_n — случайная величина, распределенная по закону Паскаля, т.е. $\mathbf{P}\{Z_n=k\}=\beta_n^k(1-\beta_n)^{n-k}$, $k=1,2,\ldots$ Известно [11], что $Z_nT=T_n$, т.е. в результате случайного прореживания простейшего потока получаем простейший поток.

При вычислении вероятностей $\mathbf{P}_n\{\eta(x)=i\}$ при $1\leq n\leq h$ для системы 1 (системы 2) будем учитывать, что в момент начала обслуживания заявки A_1, совпадающий с началом отсчета времени до значения x, в системе находится n $(1\leq n\leq h)$ заявок. Поэтому промежуток времени от момента начала обслуживания заявки A_1 до момента принятия в систему следующей заявки (обозначим ее A_{n+1}) при условии, что заявка A_{n+1} принята в систему не позднее окончания обслуживания заявки A_1, — это случайная величина $Z_nT=T_n$, распределенная по показательному закону с параметром $\lambda_n=\lambda\beta_n$ (для системы 2 — случайная величина T, распределенная по показательному закону с параметром λ).

Если $n+1\leq h$, то промежуток времени от момента принятия в систему заявки A_{n+1} до момента принятия следующей заявки (обозначим ее A_{n+2}) для системы 1 распределен показательно с параметром $\lambda_{n+1}=\lambda\beta_{n+1}$, а для системы 2 — показательно с параметром λ при условии, что заявка A_{n+2} принята в систему не позднее окончания обслуживания заявки A_1. Если $n+2\leq h$, то распределение промежутка времени между моментами принятия в систему заявок A_{n+2} и A_{n+3} показательное с параметром $\lambda_{n+2}=\lambda\beta_{n+2}$ для системы 1, а для системы 2 — показательное с параметром λ при условии, что заявка A_{n+3} принята в систему не позднее окончания обслуживания заявки A_1, и т.д.

Если $h<n+1\leq m$, то для систем 1 и 2 промежуток времени от момента принятия в систему заявки A_{n+1} до момента принятия следующей заявки A_{n+2} распределен показательно с параметром $\widetilde{\lambda}=\lambda\widetilde{\beta}$ (случайная величина $\widetilde{T}$) при условии, что заявка A_{n+2} принята в систему не позднее окончания обслуживания заявки A_1. Аналогично, если $h<n+2\leq m$, то распределение промежутка времени между моментами принятия в систему заявок A_{n+2} и A_{n+3} показательное с параметром $\widetilde{\lambda}=\lambda\widetilde{\beta}$ при условии, что заявка A_{n+3} принята в систему не позднее окончания обслуживания заявки A_1, и т.д.

Вычисляя вероятности $\mathbf{P}_n\{\eta(x)=i\}$ при $h+1\le n\le m$ для систем 1 и 2, будем учитывать, что число прибывших заявок в систему за время x распределено согласно закону Пуассона с параметром $\widetilde{\lambda}x$. При вычислении вероятностей $\mathbf{P}_n\{\eta(x)=i\}$ для системы 3 будем учитывать, что число прибывших заявок в систему за время x распределено согласно закону Пуассона с параметром λx.

Таким образом, для системы 1 при $1\le n\le h$ получаем соотношения:

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=0\}=\mathbf{P}\{T_n>x\}=e^{-\lambda_n x};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{n+j-1}T_i<x<\sum_{i=n}^{n+j}T_i\right\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{n+j}T_i>x\right\}-\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{n+j-1}T_i>x\right\}=$$

$$=(-1)^j\prod_{k=n}^{n+j-1}\lambda_k\sum_{i=n}^{n+j}\frac{e^{-\lambda_i x}}{\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\ne i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_s)},\ 1\le n\le h-1,\ 0\le j\le h-n;$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{h}T_i+(n-h+j-1)\widetilde{T}<x<\sum_{i=n}^{h}T_i+(n-h+j)\widetilde{T}\right\}=$$

$$=G_{(n,h),n-h+j-1}(x)-G_{(n,h),n-h+j}(x),\ h-n+1\le j\le m-n;$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)\ge m-n+1\}=1-\sum_{j=0}^{m-n}\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{h}T_i+(m-h)\widetilde{T}<x\right\}=G_{(n,h),m-h}(x);$$

$$G_{(n,n+j),r}(x)=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{n+j}T_i+r\widetilde{T}<x\right\}=$$

$$=1-\frac{(-1)^j\widetilde{\lambda}^r}{(r-1)!}\prod_{l=n}^{n+j}\lambda_l\sum_{i=n}^{n+j}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\ne i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_s)}\sum_{k=0}^{r-1}C_{r-1}^k\frac{(r-1-k)!}{(\widetilde{\lambda}-\lambda_i)^{r-k}}\times$$

$$\times\left(\sum_{\nu=0}^{r-1-k}\frac{(k+\nu)!(\lambda_i-\widetilde{\lambda})^\nu}{\nu!\,\lambda_i^{k+\nu+1}}e^{-\lambda_i x}\sum_{\alpha=0}^{k+\nu}\frac{(\lambda_i x)^\alpha}{\alpha!}-\frac{k!}{\widetilde{\lambda}^{k+1}}e^{-\widetilde{\lambda}x}\sum_{\alpha=0}^{k}\frac{(\widetilde{\lambda}x)^\alpha}{\alpha!}\right),$$

$$1\le j\le h-n,\ 1\le r\le m-h;$$

$$G_{(n,n+j),0}(x)=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{n+j}T_i<x\right\}=1-(-1)^j\prod_{k=n}^{n+j}\lambda_k\sum_{i=n}^{n+j}\frac{e^{-\lambda_i x}}{\lambda_i\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\ne i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_s)},\ 1\le j\le h-n.$$

Для систем 1 и 2 при $h+1\le n\le m$ находим

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\frac{(\widetilde{\lambda}x)^j}{j!}e^{-\widetilde{\lambda}x},\ 0\le j\le m-n;$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)\ge m-n+1\}=1-\sum_{j=0}^{m-n}\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=1-e^{-\widetilde{\lambda}x}\sum_{j=0}^{m-n}\frac{(\widetilde{\lambda}x)^j}{j!}.$$

Для системы 2 при $1\le n\le h$ получаем

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\frac{(\lambda x)^j}{j!}e^{-\lambda x},\ 0\le j\le h-n;$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\{(h-n+1)T+(n-h+j-1)\widetilde{T}<x<(h-n+1)T+(n-h+j)\widetilde{T}\}=$$

$$=G_{h-n+1,n-h+j-1}(x)-G_{h-n+1,n-h+j}(x),\quad h-n+1\le j\le m-n;$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)\ge m-n+1\}=1-\sum_{j=0}^{m-n}\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=$$

$$=\mathbf{P}\{(h-1+1)T+(m-h)\widetilde{T}<x\}=G_{h-n+1,m-h}(x);$$

$$G_{n,r}(x)=\mathbf{P}\{nT+r\widetilde{T}<x\}=$$

$$=1-\frac{(-1)^n\lambda^n\widetilde{\lambda}^r}{(n-1)!(r-1)!(\widetilde{\lambda}-\lambda)^{n+r-1}}\sum_{k=0}^{r-1}C_{r-1}^k(n+r-2-k)!(\widetilde{\lambda}-\lambda)^k\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{n+r-2-k}(-1)^{j+1}\frac{(k+j)!(\widetilde{\lambda}-\lambda)^j}{j!\,\lambda^{k+j+1}}e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k+j}\frac{(\lambda x)^i}{i!}+\frac{k!}{\widetilde{\lambda}^{k+1}}e^{-\widetilde{\lambda}x}\sum_{i=0}^{k}\frac{(\widetilde{\lambda}x)^i}{i!}\right),$$

$$1\le r\le m-h;$$

$$G_{n,0}(x)=\mathbf{P}\{nT<x\}=1-e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Для системы 3 при $1\le n\le m$ выполнены равенства

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\frac{(\lambda x)^j}{j!}e^{-\lambda x},\ 0\le j\le m-n;$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)\ge m-n+1\}=1-\sum_{j=0}^{m-n}\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=1-e^{-\lambda x}\sum_{j=0}^{m-n}\frac{(\lambda x)^j}{j!}.$$

С учетом выражений для $\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}$ и равенств

$$\int_0^\infty\frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-(s+\lambda)x}\overline{F}_n(x)dx=g_{nk}(s+\lambda)=\frac{\lambda^k}{(s+\lambda)^{k+1}}\left(1-\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{s+\lambda}{\lambda}\right)^i f_n^{(i)}(s+\lambda)\right)$$

по формулам (1), (2) вычислим члены последовательностей $\pi_{ni}(s)$ и $q_{ni}(s)$.

Для системы 1 при $1\le n\le h$ получаем равенства:

$$\pi_{n,-1}(s)=\frac{f_n(\lambda_n+s)}{f_n(s)},\ q_{n0}(s)=\frac{1-f_n(\lambda_n+s)}{\lambda_n+s};$$

$$\pi_{n,j-1}(s)=\frac{(-1)^j}{f_n(s)}\prod_{k=n}^{n+j-1}\lambda_k\sum_{i=n}^{n+j}\frac{f_n(\lambda_i+s)}{\prod\limits_{\substack{\nu=n\\ \nu\ne i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_\nu)},$$

$$q_{nj}(s)=(-1)^j\prod_{k=n}^{n+j-1}\lambda_k\sum_{i=n}^{n+j}\frac{1-f_n(\lambda_i+s)}{(\lambda_i+s)\prod\limits_{\substack{\nu=n\\ \nu\ne i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_\nu)},\ 1\le n\le h-1,\ 0\le j\le h-n;$$

$$\pi_{n,j-1}(s)=\frac{1}{f_n(s)}\int_0^\infty e^{-sx}(G_{(n,h),n-h+j-1}(x)-G_{(n,h),n-h+j}(x))dF_n(x),$$

$$q_{nj}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}(G_{(n,h),n-h+j-1}(x)-G_{(n,h),n-h+j}(x))\overline{F}_n(x)dx,\ \ h-n+1\le j\le m-n;$$

$$\pi_{n,m-n}(s)=\frac{1}{f_n(s)}\int_0^\infty e^{-sx}G_{(n,h),m-h}(x)dF_n(x),$$

$$q_{n,m-n+1}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}G_{(n,h),m-h}(x)\overline{F}_n(x)dx\,;$$

$$\int_0^\infty e^{-sx}G_{(n,n+j),r}(x)dF_n(x)=$$

$$=f_n(s)-\frac{(-1)^j\tilde{\lambda}^r}{(r-1)!}\prod_{l=n}^{n+j}\lambda_l\sum_{i=n}^{n+j}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\ne i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_s)}\sum_{k=0}^{r-1}C_{r-1}^k\frac{(r-1-k)!}{(\tilde{\lambda}-\lambda_i)^{r-k}}\times$$

$$\times\left(\sum_{\nu=0}^{r-1-k}\frac{(k+\nu)!(\lambda_i-\tilde{\lambda})^\nu}{\nu!\,\lambda_i^{k+\nu+1}}\sum_{\alpha=0}^{k+\nu}f_n^{(\alpha)}(s+\lambda_i)-\frac{k!}{\tilde{\lambda}^{k+1}}\sum_{\alpha=0}^{k}f_n^{(\alpha)}(s+\tilde{\lambda})\right),$$

$$1\le j\le h-n,\ 1\le r\le m-h;$$

$$\int_0^\infty e^{-sx}G_{(n,n+j),0}(x)dF_n(x)=f_n(s)-(-1)^j\prod_{k=n}^{n+j}\lambda_k\sum_{i=n}^{n+j}\frac{f_n(s+\lambda_i)}{\lambda_i\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\ne i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_s)},\ \ 1\le j\le h-n;$$

$$\int_0^\infty e^{-sx}G_{(n,n+j),r}(x)\overline{F}_n(x)dx=$$

$$=\frac{1-f_n(s)}{s}-\frac{(-1)^j\tilde{\lambda}^r}{(r-1)!}\prod_{l=n}^{n+j}\lambda_l\sum_{i=n}^{n+j}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\ne i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_s)}\sum_{k=0}^{r-1}C_{r-1}^k\frac{(r-1-k)!}{(\tilde{\lambda}-\lambda_i)^{r-k}}\times$$

$$\times\left(\sum_{\nu=0}^{r-1-k}\frac{(k+\nu)!(\lambda_i-\tilde{\lambda})^\nu}{\nu!\,\lambda_i^{k+\nu+1}}\sum_{\alpha=0}^{k+\nu}g_{n\alpha}(s+\lambda_i)-\frac{k!}{\tilde{\lambda}^{k+1}}\sum_{\alpha=0}^{k}g_{n\alpha}(s+\tilde{\lambda})\right),$$

$$1\le j\le h-n,\ 1\le r\le m-h;$$

$$\int_0^\infty e^{-sx}G_{(n,n+j),0}(x)\overline{F}_n(x)dx=\frac{1-f_n(s)}{s}-(-1)^j\prod_{k=n}^{n+j}\lambda_k\sum_{i=n}^{n+j}\frac{1-f_n(s+\lambda_i)}{\lambda_i(s+\lambda_i)\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\ne i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_s)},$$

$$1\le j\le h-n.$$

Для систем 1 и 2 при $h+1\le n\le m$ находим

$$\pi_{n,j-1}(s)=\frac{f_n^{(j)}(s+\tilde{\lambda})}{f_n(s)},\ \ q_{nj}(s)=g_{nj}(s+\tilde{\lambda}),\ \ 0\le j\le m-n;$$

$$\pi_{n,m-n}(s)=1-\frac{1}{f_n(s)}\sum_{j=0}^{m-n}f_n^{(j)}(s+\tilde{\lambda}),\ \ q_{n,m-n+1}(s)=\frac{1-f_n(s)}{s}-\sum_{j=0}^{m-n}g_{nj}(s+\tilde{\lambda}).$$

Для системы 2 при $1 \le n \le h$ получаем

$$\pi_{n,j-1}(s) = \frac{f_n^{(j)}(s+\lambda)}{f_n(s)}, \; q_{nj}(s) = g_{nj}(s+\lambda), \; 0 \le j \le h-n;$$

$$\pi_{n,j-1}(s) = \frac{1}{f_n(s)} \int_0^\infty e^{-sx} (G_{h-n+1,n-h+j-1}(x) - G_{h-n+1,n-h+j}(x)) dF_n(x),$$

$$q_{nj}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} (G_{h-n+1,n-h+j-1}(x) - G_{h-n+1,n-h+j}(x)) \overline{F}_n(x) dx, \; h-n+1 \le j \le m-n;$$

$$\pi_{n,m-n}(s) = \frac{1}{f_n(s)} \int_0^\infty e^{-sx} G_{h-n+1,m-h}(x) dF_n(x),$$

$$q_{n,m-n+1}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} G_{h-n+1,m-h}(x) \overline{F}_n(x) dx;$$

$$\int_0^\infty e^{-sx} G_{n,r}(x) dF_n(x) =$$

$$= f_n(s) - \frac{(-1)^n \lambda^n \tilde{\lambda}^r}{(n-1)!(r-1)!(\tilde{\lambda}-\lambda)^{n+r-1}} \sum_{k=0}^{r-1} C_{r-1}^k (n+r-2-k)!(\tilde{\lambda}-\lambda)^k \times$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^{n+r-2-k} (-1)^{j+1} \frac{(k+j)!(\tilde{\lambda}-\lambda)^j}{j!\,\lambda^{k+j+1}} \sum_{i=0}^{k+j} f_n^{(i)}(s+\lambda) + \frac{k!}{\tilde{\lambda}^{k+1}} \sum_{i=0}^{k} f_n^{(i)}(s+\tilde{\lambda}) \right),$$

$$1 \le r \le m-h;$$

$$\int_0^\infty e^{-sx} G_{n,0}(x) dF_n(x) = f_n(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f_n^{(k)}(s+\lambda);$$

$$\int_0^\infty e^{-sx} G_{n,r}(x) \overline{F}_n(x) dx =$$

$$= \frac{1-f_n(s)}{s} - \frac{(-1)^n \lambda^n \tilde{\lambda}^r}{(n-1)!(r-1)!(\tilde{\lambda}-\lambda)^{n+r-1}} \sum_{k=0}^{r-1} C_{r-1}^k (n+r-2-k)!(\tilde{\lambda}-\lambda)^k \times$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^{n+r-2-k} (-1)^{j+1} \frac{(k+j)!(\tilde{\lambda}-\lambda)^j}{j!\,\lambda^{k+j+1}} \sum_{i=0}^{k+j} g_{ni}(s+\lambda) + \frac{k!}{\tilde{\lambda}^{k+1}} \sum_{i=0}^{k} g_{ni}(s+\tilde{\lambda}) \right), \; 1 \le r \le m-h;$$

$$\int_0^\infty e^{-sx} G_{n,0}(x) \overline{F}_n(x) dx = \frac{1-f_n(s)}{s} - \sum_{k=0}^{n-1} g_{nk}(s+\lambda).$$

Для системы 3 при $1 \le n \le m$ выполнены равенства

$$\pi_{n,j-1}(s) = \frac{f_n^{(j)}(s+\lambda)}{f_n(s)}, \; q_{nj}(s) = g_{nj}(s+\lambda), \; 0 \le j \le m-n;$$

$$\pi_{n,m-n}(s) = 1 - \frac{1}{f_n(s)} \sum_{j=0}^{m-n} f_n^{(j)}(s+\lambda), \; q_{n,m-n+1}(s) = \frac{1-f_n(s)}{s} - \sum_{j=0}^{m-n} g_{nj}(s+\lambda).$$

Учитывая, что

$$\lim_{s\to+0} f_n(s)=1,\ \lim_{s\to+0}\frac{1-f_n(s)}{s}=M_n,\ n\in\{1,2,\ldots,m+1\},$$

можно легко вычислить последовательности $\pi_{ni}=\lim\limits_{s\to+0}\pi_{ni}(s)$, $q_{ni}=\lim\limits_{s\to+0}q_{ni}(s)$, которые будут использоваться при определении стационарных характеристик рассматриваемых систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Пусть $\xi(t)$ — число заявок в системе в момент времени t и $\tau=\inf\{t\ge 0: \xi(t)=0\}$ обозначает первый период занятости для рассматриваемой системы обслуживания. Для $n,k\in\{1,2,\ldots,m+1\}$ введем обозначения:

$$\varphi_n(t,k)=\mathbf{P}_n\{\xi(t)=k,\tau>t\};\ \Phi_n(s,k)=\int_0^\infty e^{-st}\varphi_n(t,k)dt,\ \operatorname{Re}s>0.$$

Очевидно, что $\varphi_0(t,k)=0$. С помощью формулы полной вероятности для каждой из систем 1–3 получим равенства:

$$\varphi_n(t,k)=\sum_{j=0}^{m-n}\int_0^t\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}\varphi_{n+j-1}(t-x,k)dF_n(x)+$$
$$+\int_0^t\mathbf{P}_n\{\eta(x)\ge m-n+1\}\varphi_m(t-x,k)dF_n(x)+$$
$$+I\{n\le k\le m+1\}\mathbf{P}_n\{\eta(t)=k-n\}\overline{F}_n(t),\ 1\le n\le m;$$

$$\varphi_{m+1}(t,k)=\int_0^t\varphi_m(t-x,k)dF_{m+1}(x)+I\{k=m+1\}\overline{F}_{m+1}(t).$$

Здесь $I\{A\}$ равно единице или нулю в зависимости от того, состоялось ли событие A.

Вводя обозначение $f_{(n)}(s,k,m)=I\{n\le k\le m+1\}q_{n,k-n}(s)$, приходим к системе уравнений для определения функций $\Phi_n(s,k)$:

$$\Phi_n(s,k)=f_n(s)\sum_{j=0}^{m-n+1}\pi_{n,j-1}(s)\Phi_{n+j-1}(s,k)+f_{(n)}(s,k,m),\ 1\le n\le m;$$

$$\Phi_{m+1}(s,k)=f_{m+1}(s)\Phi_m(s,k)+I\{k=m+1\}\frac{1-f_{m+1}(s)}{s},\ \Phi_0(s,k)=0. \qquad (3)$$

Для решения системы уравнений (3) будем использовать функции $\mathcal{R}_{ni}(s)$, определяемые с помощью рекуррентных соотношений:

$$\mathcal{R}_{n1}(s)=R_{n+1}(s);$$
$$\mathcal{R}_{n,j+1}(s)=R_{n+1}(s)\left(\mathcal{R}_{n+1,j}(s)-f_{n+1}(s)\sum_{i=0}^{j-1}\pi_{n+1,i}(s)\mathcal{R}_{n+1+i,j-i}(s)\right),$$
$$0\le n\le m-1,\ 1\le j\le m-n-1.$$

Поскольку уравнения (3) не отличаются от полученных в работах [6, 7], приведенные далее утверждения справедливы для систем 1–3 и следуют непосредственно из этих публикаций с поправками на ординарность входящего потока.

Теорема 1. Для всех $k \in \{1,2,\ldots,m+1\}$ и $\operatorname{Re} s > 0$ функции $\Phi_n(s,k)$ определяются в виде

$$\Phi_n(s,k) = \left(\mathcal{R}_{n,m-n}(s) - \sum_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni}(s) f_{n+i}(s) \pi_{n+i,m-n-i}(s) \right) \Phi_m(s,k) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni}(s) f_{(n+i)}(s,k,m), \; 1 \le n \le m-1;$$

$$\Phi_m(s,k) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i}(s) f_{(i)}(s,k,m)}{\mathcal{R}_{0m}(s) - \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i}(s) f_i(s) \pi_{i,m-i}(s)},$$

$$\Phi_{m+1}(s,k) = f_{m+1}(s)\Phi_m(s,k) + I\{k = m+1\} \frac{1 - f_{m+1}(s)}{s}.$$

Теорема 2. Преобразование Лапласа от функции распределения периода занятости τ определяется в виде

$$\int_0^\infty e^{-st} \mathbf{P}\{\tau > t\} dt = \left(\mathcal{R}_{1,m-1}(s) - \sum_{i=1}^{m-1} \mathcal{R}_{1i}(s) f_{i+1}(s) \pi_{i+1,m-1-i}(s) \right) \Phi_m(s) -$$

$$- \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{m-1} \mathcal{R}_{1i}(s)(1 - f_{i+1}(s)),$$

где $\Phi_m(s) = \dfrac{\frac{1}{s} \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i}(s)(1 - f_i(s))}{\mathcal{R}_{0m}(s) - \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i}(s) f_i(s) \pi_{i,m-i}(s)}.$

Теорема 3. Пусть $\mathcal{R}_{ni} = \lim_{s \to +0} \mathcal{R}_{ni}(s)$, $0 \le n \le m, 1 \le i \le m-n$. Средняя продолжительность периода занятости $\mathbf{E}(\tau)$, стационарное распределение числа заявок в системе $\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\xi(t) = k\} = p_k$, $0 \le k \le m+1$, и стационарная вероятность обслуживания поступившей заявки (относительная пропускная способность системы) $\mathbf{P}_{\text{sv}}$ определяются по формулам:

$$\mathbf{E}(\tau) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i} M_i - \sum_{i=1}^{m-1} \mathcal{R}_{1i} M_{i+1}; \; \mathbf{P}_{\text{sv}} = p_0 \left(\mathcal{R}_{0m} + \sum_{i=1}^{m-1} (\mathcal{R}_{0i} - \mathcal{R}_{1i}) \right); \; p_0 = \frac{1}{1 + \lambda \mathbf{E}(\tau)};$$

$$p_k = \lambda p_0 \left(\mathcal{R}_{0k} q_{k0} + \sum_{i=1}^{k-1} (\mathcal{R}_{0i} q_{i,k-i} - \mathcal{R}_{1i} q_{i+1,k-i-1}) \right), \; 1 \le k \le m;$$

$$p_{m+1} = \lambda p_0 \left(\mathcal{R}_{0m} q_{m1} + \sum_{i=1}^{m-1} (\mathcal{R}_{0i} q_{i,m+1-i} - \mathcal{R}_{1i} q_{i+1,m-i}) \right).$$

Стационарные характеристики очереди: ее среднюю длину $\mathbf{E}(Q)$ и среднее время ожидания $\mathbf{E}(W)$ находим по формулам

$$\mathbf{E}(Q) = \sum_{k=1}^{m} k p_{k+1}, \; \mathbf{E}(W) = \frac{\mathbf{E}(Q)}{\lambda \mathbf{P}_{\text{sv}}}.$$

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим системы 1–3, для которых положим

$$h=3;\ F_n(x)=F(x),\ 1\le n\le h;\ F_n(x)=\widetilde{F}(x),\ h+1\le n\le m+1.$$

Пусть функция распределения времени обслуживания $F(x)$ задает равномерное распределение на промежутке $(0;\ 0{,}5]$, а функция распределения $\widetilde{F}(x)$ — равномерное распределение на промежутке $(0; 0{,}25]$. Пусть для системы 1 $\beta_1=1$; $\beta_2=0{,}8$; $\beta_3=0{,}6$, а для систем 1 и 2 $\beta_n=\widetilde{\beta}=0{,}4$, $h+1\le n\le m$. В целях сравнения результатов применения различных средств управления параметрами системы обслуживания рассмотрим также систему 4 — стандартную систему M/G/1/m, в которой не применяется случайного отбрасывания заявок и распределение времени обслуживания не зависит от числа заявок в системе $F_n(x)=F(x)$, $1\le n\le m+1$. Для систем 1–4 положим $\lambda=10$, $m=5$.

Значения стационарных характеристик систем 1–4, найденные по формулам, полученным с помощью метода потенциалов, представлены в табл. 1 и 2. Здесь в целях проверки этих значений приведены также результаты вычислений для систем 1–4 с помощью имитационных моделей, построенных с применением инструментальных средств GPSS World [12] (время моделирования $t=10^6$). Для моделирования показательного и равномерных распределений использованы библиотечные генераторы случайных чисел № 5 и № 15 соответственно.

Анализируя результаты, представленные в табл. 2, видим, что применение пороговой стратегии изменения времени обслуживания и механизма случайного отбрасывания заявок позволяет уменьшить длину очереди и продолжительность периода занятости и, следовательно, повысить пропускную способность системы. Если приоритетной целью является повышение пропускной способности

Таблица 1

Номер системы	Метод	Значения стационарных вероятностей						
		p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
1	Аналитический	0,00763	0,03077	0,11099	0,28434	0,31749	0,17825	0,07052
1	GPSS World	0,00776	0,03077	0,11136	0,28423	0,31685	0,17834	0,07070
2	Аналитический	0,00345	0,01392	0,05329	0,20147	0,39943	0,23297	0,09546
2	GPSS World	0,00337	0,01387	0,05316	0,20198	0,39941	0,23321	0,09501
3	Аналитический	0,00169	0,00681	0,02606	0,09853	0,20103	0,33143	0,33444
3	GPSS World	0,00173	0,00688	0,02621	0,09819	0,20107	0,33115	0,33478
4	Аналитический	0,00035	0,00143	0,00547	0,02068	0,07798	0,29394	0,60014
4	GPSS World	0,00033	0,00142	0,00546	0,02058	0,07860	0,29387	0,59974

Таблица 2

Номер системы	Метод	Значения стационарных характеристик			
		E(τ)	E(Q)	E(W)	$\mathbf{P}_{sv}$
1	Аналитический	13,009	2,698	0,544	0,496
1	GPSS World	12,838	2,697	0,543	0,496
2	Аналитический	28,878	3,064	0,583	0,525
2	GPSS World	28,895	3,063	0,583	0,525
3	Аналитический	59,153	3,824	0,575	0,666
3	GPSS World	59,381	3,824	0,575	0,665
4	Аналитический	282,224	4,457	1,115	0,400
4	GPSS World	282,161	4,457	1,114	0,400

Таблица 3

Время моделирования, t	Значения стационарных характеристик			
	$\mathbf{E}(\tau)$	$\mathbf{E}(Q)$	$\mathbf{E}(W)$	$\mathbf{P}_{sv}$
100	13,754	3,008	0,564	0,523
500	22,405	3,080	0,587	0,521
1000	21,061	3,056	0,583	0,527
10000	28,698	3,061	0,583	0,526
100000	28,858	3,060	0,583	0,526
500000	28,976	3,063	0,583	0,525
1000000	28,895	3,063	0,583	0,525
1100000	29,009	3,063	0,583	0,525
1200000	29,032	3,063	0,583	0,525
1300000	28,954	3,063	0,583	0,525
Аналитическое значение	28,878	3,064	0,583	0,525

системы, то наилучший результат достигается в случае применения пороговой стратегии изменения времени обслуживания (система 3). Сравнивая показатели эффективности систем 1 и 2, приходим к выводу, что за счет отбрасывания заявок для малых значений их числа в системе ($n \leq h$) удается уменьшить среднюю длину очереди для системы 1 по сравнению с системой 2, но при этом уменьшается пропускная способность системы.

В табл. 3 представлены значения характеристик системы 2 для различных значений времени моделирования GPSS World. Сравнивая эти значения, видим, что значение времени моделирования $t = 10^6$ соответствует практически достигнутому стационарному режиму функционирования системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе с помощью метода потенциалов получены простые и удобные для числовой реализации формулы для отыскания стационарных характеристик систем типа $M/G/1/m$, в которых в целях улучшения показателей производительности применяется пороговая стратегия изменения времени обслуживания и механизм случайного отбрасывания заявок. Полученные аналитическим методом результаты подтверждаются данными имитационного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дудин А.Н., Клименок В.И. О системе обслуживания BMAP/G/1 с альтернирующим режимом функционирования // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 10. — С. 97–107.
2. Chydziński A. Nowe modele kolejkowe dla wezlow sieci pakietowych. — Gliwice: Pracownia Komputerowa Jacka Skalmierskiego, 2013. — 286 s.
3. Sriram K., Lucantoni D.M. Traffic smoothing effects of bit dropping in a packet voice multiplexer // IEEE Trans. Comm. — 1989. — **37**, N 7. — P. 703–712.
4. Zhernovyi K.Yu., Zhernovyi Yu.V. $M^{\theta}/G/1/m$ and $M^{\theta}/G/1$ systems with the service time dependent on the queue length // J. of Communic. Technology and Electronics. — 2013. — **58**, N 12. — P. 1267–1275.
5. Zhernovyi K.Yu. Stationary characteristics of the $M^{\theta}/G/1/m$ system with the threshold functioning strategy // J. of Communic. Technology and Electronics. — 2011. — **56**, N 12. — P. 1585–1596.
6. Zhernovyi K.Yu., Zhernovyi Yu.V. $M^{\theta}/G/1/m$ and $M^{\theta}/G/1$ queues with operating parameters depending on the queue length // J. of Communic. Technology and Electronics. — 2014. — **59**, N 6. — P. 605–613.
7. Жерновый Ю., Жерновый К. Метод потенциалов для пороговых стратегий обслуживания. — Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. — 164 с.

8. Bratiychuk M., Borowska B. Explicit formulae and convergence rate for the system $M^{\alpha}/G/1/N$ as $N \to \infty$ // Stochastic Models. — 2002. — **18**, N 1. — P. 71–84.
9. Королюк В.С. Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. — К.: Наук. думка, 1975. — 138 с.
10. Zhernovyi Yu., Kopytko B., Zhernovyi K. On characteristics of the $M^{\theta}/G/1/m$ and $M^{\theta}/G/1$ queues with queue-size based packet dropping // J. of Applied Mathematics and Computational Mechanics. — 2014. — N 13(4). — P. 163–175.
11. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — М.: Высшая школа, 2000. — 383 с.
12. Zhernovyi Yu. Creating models of queueing systems using GPSS World: Programs, detailed explanations and analysis of results. — Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. — 220 p.

Надійшла до редакції 03.11.2015

Ю.В. Жерновий, К.Ю. Жерновий

МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПУ M/G/1/m З ПОРОГОВИМИ СТРАТЕГІЯМИ ФУНКЦІОНУВАННЯ

Анотація. Запропоновано метод дослідження систем обслуговування M/G/1/m з функцією випадкового відкидання замовлень і розподілом часу обслуговування, залежним від довжини черги. Отримано формули для визначення перетворень Лапласа розподілу кількості замовлень у системі протягом періоду зайнятості та функції розподілу періоду зайнятості та для обчислення стаціонарних характеристик. Співвідношення для стаціонарних характеристик перевірено за допомогою імітаційних моделей, побудованих із використанням інструментальних засобів GPSS World. Наведено приклад порівняння результатів застосування різних засобів керування параметрами системи обслуговування.

Ключові слова: одноканальна система обслуговування, порогові стратегії, випадкове відкидання замовлень, метод потенціалів.

Yu.V. Zhernovyi, K.Yu. Zhernovyi

POTENTIALS METHOD FOR M/G/1/m SYSTEMS WITH THRESHOLD OPERATION STRATEGIES

Abstract. We propose a method to analyze M/G/1/m queuing systems with the function of random dropping of customers and distribution of the service time depending on the queue length. Formulas to determine Laplace transforms of the distribution of the number of customers in the system during the busy period and of the distribution function of the busy period and to calculate the stationary characteristics are obtained. The relations for the stationary characteristics are tested using simulation models constructed with the assistance of the GPSS World tools. An example of comparison of the results of the use of various control tools of system parameters is given.

Keywords: single-channel, queueing system, threshold strategies, random dropping of customers, potentials method.

Жерновый Юрий Васильевич,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Львовского национального университета имени Ивана Франко, e-mail: yu.zhernovyi@lnu.edu.ua.

Жерновый Константин Юрьевич,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Львовского учебно-научного института университета банковского дела, e-mail: k.zhernovyi@yahoo.com.