УДК 519.161

О.Б. МАЦИЙ, А.В. МОРОЗОВ, А.В. ПАНИШЕВ

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ 2-ФАКТОРА МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

Аннотация. Рассмотрена задача минимизации в графе $H=(V,U)$ суммы весов ребер подмножества $U'\subset U$, образующих совокупность непересекающихся в вершинах $v\in V$ простых циклов и покрывающих V. Рассматриваемая задача (задача 2-f) полиномиально разрешима алгоритмами, которые характеризуются техническими трудностями, препятствующими ускорению процесса вычислений. Решение задачи 2-f находится сведением ее к более простому двудольному случаю. Результат представлен совершенным паросочетанием двудольного графа, соответствующим решению задачи о назначениях, в цикловом разложении которой каждый контур содержит не менее трех дуг.

Ключевые слова: 2-фактор, задача о назначениях, паросочетание, двудольный граф, увеличивающий путь.

ВВЕДЕНИЕ

Подмножество $U'\subset U$ ребер графа $H=(V,U)$ называется 2-фактором, если каждая вершина $v\in V$ инцидентна ровно двум ребрам. Подмножество $M\subset U$ ребер графа $H=(V,U)$ называется паросочетанием (совершенным паросочетанием), если каждая вершина $v\in V$ инцидентна не более (ровно) одному ребру.

Задача нахождения 2-фактора минимального веса (задача 2-f) формулируется следующим образом. Задан граф $H=(V,U)$, где V — множество вершин, $|V|=n$, а U — множество ребер, в котором каждое ребро $\{i,j\}$ имеет вес $c_{ij}\in R_0^+$, R_0^+ — множество неотрицательных действительных чисел.

Требуется найти в графе H 2-фактор с минимальной суммой весов ребер.

Поставленная задача для полного графа H_n всегда имеет решение. В [1] изложен алгоритм, определяющий в n-вершинном полном графе 2-фактор минимального веса за время $O(n^3)$. Из [2] известно, что для остовного подграфа H полного графа H_n задача 2-f решается путем ее сведения к задаче нахождения паросочетания минимального веса в графе с существенно большим числом вершин и ребер, чем в H. Поиск паросочетания выполняется за время $O(n^4)$ алгоритмом Эдмондса или его модификациями, включающими процедуру обнаружения цветка — цикла с $2k+1$ вершинами, в котором k ребер образуют паросочетание, и процедуру срезания цветка — его замену одной вершиной [3].

Поскольку связный 2-фактор представляет собой гамильтонов цикл графа H_n, решение поставленной задачи используется при разработке эффективных алгоритмов с гарантированными оценками для задач класса коммивояжера, обладающих широким спектром приложений [3]. Большинство этих алгоритмов характеризуется такой же оценкой трудоемкости, как и у алгоритма Эдмондса. Возможность нахождения 2-фактора минимального веса за полиномиальное время является основанием для выбора сформулированной задачи в качестве релаксации, обеспечивающей на сегодняшний день наиболее близкие к оптимуму нижние оценки в точных алгоритмах решения симметричной задачи коммивояжера (СЗК), построенных по методу ветвей и границ [4, 5]. Основная причина, затрудняющая вычисление нижних границ алгоритмом Эдмондса в точных методах решения СЗК, состоит в сложности процедур обнаружения и срезания цветка, неоднократное выполнение которых приводит к ощутимым временным затратам. В данной работе предлагается метод нахождения в графе $H=(V,E)$ 2-фактора минимального веса, не содержащий действий с цветками. Его трудоемкость оценивается величиной $O(n^3)$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ТЕРМИНАХ ПАРОСОЧЕТАНИЙ ДЛЯ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

Метод выполняет поиск в двудольном графе с $2n$ вершинами совершенного паросочетания с минимальным суммарным весом ребер, соответствующего в графе H 2-фактору минимального веса, используя понятие кратчайшего увеличивающего пути и способ его построения.

Взвешенный граф $H=(V,U)$ с n вершинами множества V, помеченными числами из множества $\{1,2,\ldots,n\}$, не содержащий петель $\{i,i\}$, полностью определяется матрицей стоимостей (весов) ребер $C=[c_{ij}]_n$, в которой $c_{ij}\in R_0^+$, если $\{i,j\}\in U$, и $c_{ij}=\infty$ иначе. Замена каждого ребра $\{i,j\}$ из H парой дуг (i,j) и (j,i) с весами c_{ij} и c_{ji}, $c_{ij}=c_{ji}$, дает взвешенный орграф $G=(V,E)$. Подграф $G'=(V,E')$ орграфа $G=(V,E)$, $E'\subset E$, называется контурным покрытием, если каждая вершина подграфа G' имеет полустепени захода и исхода, равные единице.

Если в орграфе G построено контурное покрытие $K=\{K_1,K_2,\ldots,K_\mu\}$, в котором каждое подмножество K_i, $i=\overline{1,\mu}$, содержит не менее трех вершин, то в графе H построен 2-фактор из тех же μ подмножеств вершин. Но контурное покрытие совпадает с цикловым разложением перестановки π множества $\{1,2,\ldots,n\}$ номеров столбцов матрицы стоимостей C, для которой π задает допустимое решение задачи о назначениях (ЗН). Отсюда вытекает формулировка задачи 2-фактора в терминах ЗН [5].

Для симметричной матрицы стоимостей (весов) $C=[c_{ij}]_n$, в которой $c_{ij}=\infty$ при $i=j$ и $c_{ij}\in R_0^+$ или $c_{ij}=\infty$ при $i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$, требуется найти

$$C(\eta)=\min_{\xi}\sum_{i=1}^{n}c_{[i]}. \tag{1}$$

Здесь $\eta=(\eta[1],\eta[2],\ldots,\eta[n])$ — перестановка множества $\{1,2,\ldots,n\}$ номеров столбцов матрицы C, определенная на множестве перестановок $\xi=(\xi[1],\xi[2],\ldots$ $\ldots,\xi[n])$, в каждой из которых цикловое разложение представлено контурами, содержащими не менее трех вершин.

Следует заметить, что задача 2-фактор с матрицей стоимостей, включающей элементы $c_{ij}=\infty$, может не иметь решения. В этом случае необходимо показать, что множество перестановок ξ пусто.

Будем искать η, пошагово увеличивая на единицу число k элементов последовательности, образующей определенную часть допустимого решения задачи 2-f. Отметим особенности этой последовательности.

Первым k элементам допустимого решения ξ задачи 2-f поставим в соответствие подматрицу порядка k матрицы C и решение ЗН для данной подматрицы, удовлетворяющее следующему ограничению: его цикловое разложение не содержит контуров с двумя вершинами. Назовем такое решение ЗН ограниченным.

Пусть на множестве всех ограниченных решений ЗН из k элементов матрицы C решение $\xi_k=(\xi[i_1],\xi[i_2],\ldots,\xi[i_k])$ имеет минимальную стоимость. Тогда (1) находится за n итераций, каждая из которых преобразует последовательность ξ_k в последовательность ξ_{k+1}, $k=\overline{1,n-1}$.

Изложенные соображения открывают возможность применения для нахождения (1) основных результатов теории паросочетаний для двудольных графов [3].

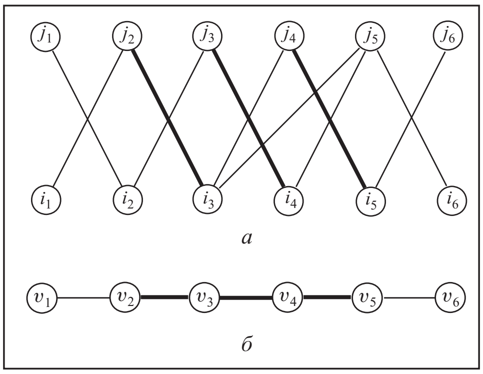


Рис. 1

Симметричной матрице стоимостей C орграфа $G=(V,E)$, построенного из $H=(V,U)$, взаимно однозначно соответствует двудольный граф $D=(X,Y,E)$, где X, Y — множества вершин, $|X|=|Y|=|V|=\eta$, $E=\{(i,j)|\ i\in X,\ j\in Y\}$ — множество ребер с весами $c_{ij}\in R_0^+$, $i\neq j$, из матрицы C, $|E|=2|U|$.

Ребро (i,j), $i\neq j$, графа D, включенное в паросочетание, обозначим $[i,j]$. Ребра, не входящие в паросочетание, называются свободными. Вершина, принадлежащая ребру паросочетания, определяется как насыщенная, остальные вершины графа называются ненасыщенными или свободными. Максимальное паросочетание — это паросочетание с наибольшим числом ребер. Паросочетание, насыщающее все вершины графа, называется совершенным. Совершенное паросочетание графа $D=(X,Y,E)$ имеет максимальную мощность, равную n. Решение задачи 2-f в двудольном графе D — совершенное паросочетание η с минимальной суммой весов ребер, в котором если $[i,j]\in\eta$, $i\in X$, $j\in Y$, то ребро (j,i), $j\in X$, $i\in Y$, не является ребром паросочетания η.

Пусть в графе H зафиксировано паросочетание M. Простой путь называется чередующимся относительно паросочетания M, если ребра пути через одно содержатся в M [2]. Чередующийся путь, который начинается и заканчивается ребрами, не принадлежащими паросочетанию M, называется увеличивающим относительно паросочетания M.

Если в графе D зафиксировать паросочетание $\xi'_k=\{[i_3,j_2],[i_4,j_3],\ldots$ $\ldots,[i_{2k-2},j_{2k-3}],[i_{2k-1},j_{2k-2}]\}$, то его объединению со свободными ребрами (i_1,j_2) и (i_{2k-1},j_{2k}) (рис. 1, *а*) соответствует в графе H простая цепь $(v_1,v_2,$ $v_3,\ldots,v_{2k-1},v_{2k})$, $k\geq 3$ (рис. 1, *б*).

Паросочетанию $\xi''_k=\{[i_3,j_2],[i_4,j_3],\ldots,[i_{2k-2},j_{2k-3}],[i_2,j_{2k-2}]\}$ графа D, дополненному свободными ребрами (i_1,j_2) и (i_{2k-2},j_{2k-1}) (рис. 2, *а*), соответствует в графе H подграф, включающий простой цикл $(v_2,v_{2k-2},v_{2k-3},\ldots$ $\ldots,v_3,v_2)$ и два ребра (v_1,v_2), (v_{2k-2},v_{2k-1}), $k\geq 3$ (рис. 2, *б*).

Паросочетание ξ'_k или ξ''_k согласуется с частью некоторого допустимого решения задачи 2-f. Поэтому поиск 2-фактора минимального веса в графе H состоит в нахождении паросочетания в двудольном графе D. К моменту начала решения задачи 2-f в графе D не зафиксировано паросочетания, соответствующего

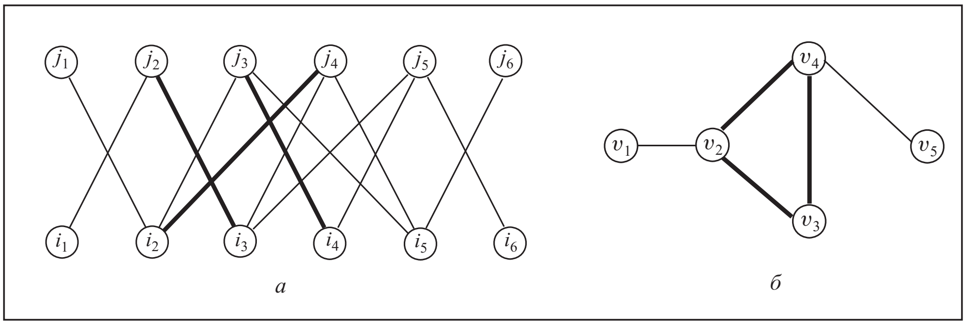


Рис. 2

части искомой последовательности η . Если любое ребро в D определить как увеличивающий путь относительно паросочетания $\varnothing$, то исходную последовательность ξ_1, соответствующую оптимальному ограниченному решению ЗН из одного элемента, образует ребро минимального веса, взятого на множестве значений c_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, $i < j$, матрицы C.

ОБОСНОВАНИЕ И ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 2-*f*

Пусть на множестве Π_k всех паросочетаний $\pi_k = \{[l_1, \pi[l_1]], [l_2, \pi[l_2]], \ldots$ $\ldots, [l_m, \pi[l_m]], \ldots, [l_k, \pi[l_k]]\}$ графа $D = (X, Y, E)$, в которых нет ребер, соединяющих вершины $\pi[l_m] \in X$ и $l_m \in Y$, $l_m \neq \pi[l_m]$, $m = \overline{1, k}$, построено паросочетание $\xi_k = \{[i_1, j_1], [i_2, j_2], \ldots, [i_l, j_l], \ldots, [i_k, j_k]\}$ минимальной стоимости. Удалив в графе D ребра $(j_1, i_1), (j_2, i_2), \ldots, (j_l, i_l), \ldots, (j_k, i_k)$, $j_l \in X$, $i_l \in Y$, и положив их веса в матрице C равными ∞, получим остовной подграф D_k графа D. В графе D_k преобразуем ξ_k в паросочетание $\xi_{k+1} = \{[i'_l, j'_l], [i'_1, j'_1], [i'_2, j'_2], \ldots$ $\ldots, [i'_k, j'_k], [i'_{k+1}, j'_{k+1}]\}$, доставляющее минимальный суммарный вес ребер $C(\xi_{k+1})$ на множестве Π_{k+1} всех паросочетаний π_{k+1}.

Паросочетание ξ_k разбивает множества X и Y соответственно на подмножества насыщенных вершин $I_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_l, \ldots, i_k\}$, $J_k = \{j_1, j_2, \ldots, j_l, \ldots, j_k\}$ и на множества свободных вершин $X - I_k = \{i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_p, \ldots, i_n\}$, $Y - J_k =$ $= \{j_{k+1}, j_{k+2}, \ldots, j_g, \ldots, j_n\}$. Найдем свободное ребро весом

$$c_{ms} = \min\{c_{ij} \mid i \in X - I_k, \ j \in Y - J_k\}, \ (m, s) \in D, \tag{2}$$

и, присоединив его к паросочетанию ξ_k, получим паросочетание $\xi^1_{k+1} =$ $= \xi_k \cup [m, s]$ стоимостью $MIN1 = C(\xi_k) + c_{ms}$. Если ξ^1_{k+1} не доставляет минимальной суммы весов ребер на множестве Π_{k+1}, то ее доставляет $\xi^2_{k+1} \in \Pi_{k+1} - \{\xi^1_{k+1}\}$ стоимостью $MIN2 = C(\xi^2_{k+1})$. Таким образом, $C(\xi_{k+1}) = \min\{MIN1, MIN2\}$.

Лемма 1. Пусть $\xi_{k+1} \in \Pi_{k+1} - \{\xi^1_{k+1}\}$. Тогда $\xi_{k+1} = P_{k+1} \oplus \xi_k = (P_{k+1} - \xi_k) \cup$ $\cup (\xi_k - P_{k+1})$, где P_{k+1} — кратчайший увеличивающий путь относительно паросочетания ξ_k в подграфе D_k.

Доказательство леммы повторяет доказательство леммы из [5], определяющей способ преобразования π_k в паросочетание π_{k+1} в рекуррентном методе решения ЗН.

Пусть в D_k вершина $j_r \in J_k$, $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$, является концом свободного ребра (i_l, j_r) с минимальным весом среди всех ребер (i_s, j_r), $i_s \notin I_k$, а вершина $i_f \in I_k$, $f \in \{1, 2, \ldots, k\}$, — началом свободного ребра (i_f, j_p) с минимальным весом среди всех ребер (i_f, j_g), $j_g \notin J_k$.

Обозначим X_k множество свободных вершин i_l, инцидентных найденным ребрам (i_l, j_r), $|X_k| \le k$. Соответственно Y_k — множество свободных вершин j_p, инцидентных ребрам (i_f, j_p), $|Y_k| \le k$. Нетрудно видеть, что кратчайший увеличивающий путь P_{k+1} относительно паросочетания ξ_k начинается в некоторой вершине множества X_k и заканчивается в некоторой вершине множества Y_k подграфа $\langle D_k \rangle$, порожденного множеством вершин $X_k \cup I_k \cup J_k \cup Y_k$ подграфа D_k [6].

Преобразуем подграф $\langle D_k \rangle$ во взвешенный орграф (Z, A), с помощью которого выполняется поиск кратчайшего увеличивающего пути P_{k+1} относительно паросочетания ξ_k [3].

Граф (Z, A) состоит из множества вершин $Z = \{i_0\} \cup X_k \cup J_k \cup Y_k$ и множества дуг $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Подмножество A_0 содержит $|X_k|$ дуг (i_0, i_l) нуле-

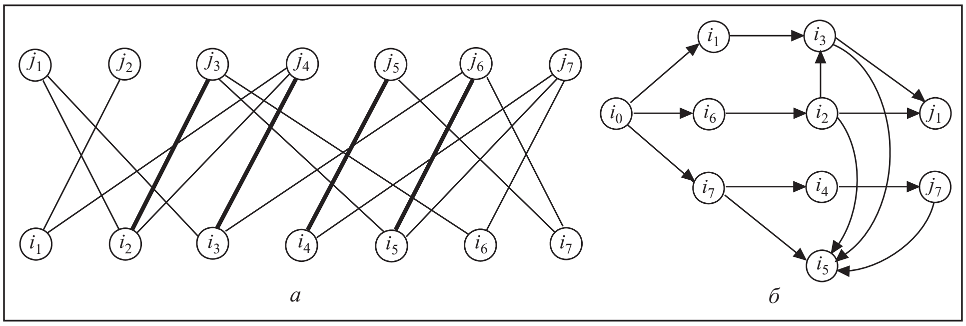


Рис. 3

вого веса, $i_l \in X_k$. В подмножество A_1 входит дуга (i_l, i_r), $i_l \in X_k$, $i_r \in I_k$, если и только если вершина j_r ребра (i_l, j_r) — напарник вершины i_r в паросочетании ξ_k. Дуге (i_l, i_r) присваивается вес $c(i_l, i_r) = c_{i_l j_r} + c_{i_r j_r}$. Дуга (i_d, i_l), i_d, $i_l \in X_k$, входит в A_2 тогда и только тогда, когда вершина j_l ребра (i_d, j_l), $j_l \in J_k$, является напарником вершины i_l в паросочетании ξ_k. Дуга (i_d, i_l) получает вес $c(i_d, i_l) = c_{i_d j_l} + c_{i_l j_l}$. Подмножество A_3 включает дуги (i_f, j_p), $i_f \in I_k$, $j_p \in Y_k$, если вершины i_f и j_p соединены в подграфе $\langle D_k \rangle$ ребром (i_f, j_p). Дуге (i_f, j_p) присваивается вес $c(i_f, j_p) = c_{i_f j_p}$.

На рис. 3, *а* представлен подграф $\langle D_4 \rangle$ с паросочетанием $\xi_4 = \{[i_2, j_3], [i_3, j_4], [i_4, j_5], [i_5, j_6]\}$.

Вспомогательный орграф (Z, A), построенный для подграфа $\langle D_4 \rangle$, изображен на рис. 3, *б*. В нем множество дуг A образуют подмножества $A_0 = \{(i_0, i_1), (i_0, i_6), (i_0, i_7)\}$, $A_1 = \{(i_1, i_3), (i_6, i_2), (i_7, i_4), (i_7, i_5)\}$, $A_2 = \{(i_2, i_3), (i_3, i_5), (i_5, i_2)\}$, $A_3 = \{(i_2, j_1), (i_3, j_1), (i_4, j_7), (i_5, j_7)\}$.

Из способа построения орграфа (Z, A) следует, что множество простых путей из вершины i_0 во все вершины множества Y_k совпадает с множеством увеличивающих путей относительно паросочетания ξ_k, соединяющих в подграфе $\langle D_k \rangle$ вершины множества X_k с вершинами множества Y_k.

Доказательство следующего утверждения не вызывает затруднений.

Утверждение 1. Кратчайший путь из любой вершины $i_l \in X_k$ в любую вершину $j_p \in Y_k$ — простой путь в орграфе (Z, A) и увеличивающий относительно паросочетания ξ_k в подграфе $\langle D_k \rangle$.

Утверждение 2. Если орграф (Z, A) не содержит путей, начинающихся в произвольной вершине $i_l \in X_k$ и заканчивающихся в произвольной вершине $j_p \in Y_k$, то ξ_k — максимальное паросочетание подграфа $\langle D_k \rangle$.

Доказательство. Из условия и доказательства утверждения 1 следует, что в орграфе (Z, A) нет простых путей с начальной вершиной из X_k и конечной вершиной из Y_k, а подграф $\langle D_k \rangle$ не содержит увеличивающих путей относительно паросочетания ξ_k. Таким образом, для подграфа $\langle D_k \rangle$ выполняется необходимое и достаточное условие того, что паросочетание ξ_k максимально в D_k [3]. □

Если паросочетание ξ_k максимально в D_k, то согласно лемме в D_k не существует паросочетания ξ^2_{k+1}, развивающего процесс построения 2-фактора минимального веса.

Предположим, что в орграфе (Z, A) множество путей, соединяющих пары вершин (i_l, j_p), $i_l \in X_k$, $j_p \in Y_k$, непусто. Результатом построения кратчайшего из них является кратчайший увеличивающий путь P_{k+1} относительно паросочетания $\xi_k = \{[i_1, j_1], [i_2, j_2], \ldots, [i_l, j_l], \ldots, [i_k, j_k]\}$. Тогда $\xi^2_{k+1} = P_{k+1} \oplus \xi_k$.

Чтобы определить ξ_{k+1}, когда ξ_k максимально, следует найти в подграфе D_k ребро весом, равным (2), и присоединить его к ξ_k. Если такого ребра нет, то задача 2-f не имеет решения.

Алгоритм решения задачи 2-f включает следующие действия.

Шаг 0. Алгоритм поиска в графе $H=(Y,U)$ 2-фактора минимального веса. Здесь $C=[c_{ij}]_n$ — симметричная матрица стоимостей ребер графа H, в которой $c_{ij}=c_{ji}\in R_0^+$, если $\{i, j\}\in U$, и $c_{ij}=c_{ji}=\infty$ иначе, R_0^+ — множество действительных неотрицательных чисел. Решение задачи 2-f представлено перестановкой $\eta=([1],[2],\dots,[n])$ множества $\{1,2,\dots,n\}$ номеров столбцов матрицы C с минимальной суммой весов ребер $C(\eta)=\sum_{i=1}^{n} c_{[i]}$, $c_{[i]}\neq\infty$, $i=\overline{1,n}$, среди всех таких перестановок степени n, в цикловых разложениях которых каждый контур содержит не менее трех вершин. Искомый 2-фактор определяется как совершенное паросочетание ξ_n двудольного графа $D=(X,Y,E)$, где X, Y — множество вершин, $|X|=|Y|=n$, $E=\{(i,j)\mid i\in X, j\in Y\}$ — непустое множество ребер (i, j) с весами $c_{ij}\in R_0^+$ из матрицы C, $|E|=2|U|$, $c_{ij}=\infty$, если $(i, j)\notin E$.

Положить $k=1$, найти ребро (i_k, j_k) весом $c_{i_k j_k}=\min\{c_{ij}\mid i, j=\overline{1,n}\}$, $I_k=\{i_k\}$, $J_k=\{j_k\}$, $\xi_k=\{[i_k, j_k]\}$, $C(\xi_k)=c_{i_k j_k}$, D_k — остовной подграф графа D, полученный из D удалением ребра (j_k, i_k), $j_k\in X$, $i_k\in Y$, в матрице C положить $c_{j_k i_k}=\infty$.

Шаг 1. Положим $k=k+1$; если $k>n$, то конец: построено решение $\eta=\xi_n$ задачи 2-f.

Шаг 2. В подграфе D_{k-1} найти $c_{i_l j_l}=\min\{c_{ij}\mid i\in X-I_{k-1}, j\in Y-J_{k-1}\}$; если $c_{i_l j_l}=\infty$, то положить $MIN1=\infty$, иначе $\xi_k^1=\xi_{k-1}\cup[i_l, j_l]$, $MIN1=C(\xi_k^1)=$ $=C(\xi_{k-1})+c_{i_l j_l}$, $c_{j_l i_l}=\infty$, $D_k=D_{k-1}-(j_l, i_l)$, $I_k=I_{k-1}\cup\{i_l\}$, $J_k=J_{k-1}\cup\{j_l\}$.

Шаг 3. Для каждой вершины $j_r\in J_{k-1}$ в D_{k-1} найти ребра (i_m, j_r) с весами $c_{i_m j_r}=\min\{c_{ij_r}\mid i\in X-I_{k-1}\}\in R_0^+$ и сформировать из вершин i_m множество X_k; если $X_k=\varnothing$, то положить $MIN2=\infty$ и перейти к шагу 6.

Шаг 4. Для каждой вершины $i_f\in I_{k-1}$ в D_{k-1} найти ребра (i_f, j_p) с весами $c_{i_f j_p}=\min\{c_{i_f j}\mid j\in Y-J_{k-1}\}\in R_0^+$ и сформировать из вершин j_p множество Y_k; если $Y_k=\varnothing$, то положить $MIN2=\infty$ и перейти к шагу 6.

Шаг 5. Определить подграф $\langle D_k\rangle$, порожденный множеством вершин $X_k\cup I_{k-1}\cup J_{k-1}\cup Y_k$ подграфа D_{k-1}; для $\langle D_k\rangle$ построить вспомогательный взвешенный орграф (Z, A), $Z=\{i_0\}\cup X_k\cup I_{k-1}\cup Y_k$, и выполнить в нем поиск пути, кратчайшего на множестве всех путей в вершины Y_k, достижимые из i_0; если построен такой путь, то в подграфе $\langle D_k\rangle$ найти соответствующий ему увеличивающий путь P_k относительно паросочетания ξ_{k-1}, а также $\xi_k^2=(P_k-\xi_{k-1})\cup$ $\cup(\xi_{k-1}-P_k)$, $MIN2=C(\xi_k^2)$, иначе положить $\xi_k^2=\varnothing$, $MIN2=\infty$.

Шаг 6. Если $MIN1=MIN2=\infty$, то конец: для графа $H=(Y,U)$ с матрицей весов ребер $C=[c_{ij}]_n$ задача 2-f не имеет решения; если $MIN1\neq\infty$ или $MIN2\neq\infty$, тогда если $MIN1\leq MIN2$, то $\xi_k=\xi_k^1$, $c_{j_l i_l}=\infty$, и перейти к шагу 1, иначе $\xi_k=\xi_k^2$, $\xi_k=\{[i_l, j_l]\mid l=\overline{1,k}\}$, $I_k=\{i_l\mid l=\overline{1,k}\}$, $J_k=\{j_l\mid l=\overline{1,k}\}$, образовать подграф D_k, удалив в $\langle D_k\rangle$ ребра (j_l, i_l), $j_l\in I_k$, $i_l\in J_k$, в матрице C положить $c_{j_l i_l}=\infty$, $l\in\{1,2,\dots,k\}$, и перейти к шагу 1.

Теорема 1. Алгоритм корректно выполняет за время $O(|V|^3)$ поиск решения задачи 2-f в графе $H=(Y,U)$ с неотрицательными весами ребер.

Доказательство. Алгоритм останавливается, когда в двудольном графе $D=(X,Y,V)$, $|X|=|Y|=|V|=n$, построено максимальное паросочетание ξ_{k-1}, $k=\overline{2,n}$. Паросочетание ξ_{k-1} максимально, если: а) подграф D_k графа D не содержит ни одного ребра, которое можно было бы присоединить к ξ_{k-1}, чтобы получить ξ_k^1; б) подграф $\langle D_k\rangle$ графа D не содержит увеличивающего пути относительно паросочетания ξ_{k-1} для построения ξ_k^2. Требование б) выполняется, поскольку согласно утверждению 2 для максимального паросочетания ξ_{k-1} достаточно, чтобы вспомогательный орграф (Z,A) не содержал путей из вершин множества X_k в вершины множества Y_k.

Трудоемкость алгоритма оценивается с учетом того, что она максимальна, т.е. тогда, когда исходный граф полный. Процесс построения оптимального решения $\eta=\xi_n$ включает n этапов. Первый этап завершается на шаге 0 построением ξ_1 за $n(n-1)/2$ операций. На остальных этапах находятся паросочетания ξ_k^1 и ξ_k^2, $k=\overline{2,n}$. Построение ξ_k^1 требует $(n-k+1)(n-k)/2$ операций. Для нахождения ξ_k^1 нужно выполнить $2(n-k-1)$ операций для поиска вершин множеств X_k и Y_k, $k=\overline{1,n-1}$, не более чем $O(n)$ операций для построения подграфа $\langle D_k\rangle$ и вспомогательного орграфа (Z,A), $O(n^2)$ действий для построения в (Z,A) алгоритмом Дейкстры кратчайшего пути P_k и не более чем $O(n)$ операций с множествами ребер P_k и ребер текущего паросочетания ξ_{k-1}. Таким образом, каждый этап алгоритма характеризуется квадратичной временной сложностью, а трудоемкость решения задачи 2-f оценивается величиной $O(n^3)$. □

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Граф $H=(Y,U)$, в котором требуется определить 2-фактор минимального веса, представлен на рис. 4, *а*, а его матрица стоимостей C — на рис. 4, *б*.

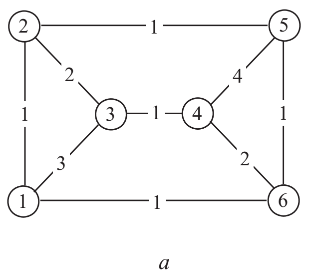
Шаг 0. Положим $k=1$, $c_{12}=\min\{c_{ij}\,|\,i,j=\overline{1,6}\}=1$, $I_1=\{1\}$, $J_1=\{2\}$, $\xi_1=\{[1,2]\}$, $C(\xi_1)=c_{12}=1$, D_1 — подграф, полученный из графа $D=(X,Y,E)$, соответствующего матрице C, удалением ребра (2, 1), $c_{21}=\infty$.

Шаг 1. Положим $k=2$.

Шаг 2. В D_1 $c_{25}=\min\{c_{ij}\,|\,i\neq 1, j\neq 2\}=1$, $\xi_2^1=\xi_1\cup[2,5]=\{[1,2],[2,5]\}$, $MIN1=C(\xi_2^1)=c_{12}+c_{25}=1+1=2$, $c_{52}=\infty$, $D_2=D_1-(5,2)$, $I_2=\{1,2\}$, $J_2=\{2,5\}$.

Шаг 3. Для вершины $2\in J_1$ ребро (5, 2) имеет наименьший вес: $c_{25}=\min\{c_{i2}\,|\,i\neq 1\}=1$, $X_2=\{5\}$.

Шаг 4. Для вершины $1\in I_1$ ребро (1, 6) имеет наименьший вес: $c_{16}=\min\{c_{1j}\,|\,j\neq 2\}=1$, $Y_2=\{6\}$.



а

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	∞	1	3	∞	∞	1
2	1	∞	2	∞	1	∞
3	3	2	∞	1	∞	∞
4	∞	∞	1	∞	4	2
5	∞	1	∞	4	∞	1
6	1	∞	∞	2	1	∞

б

Рис. 4

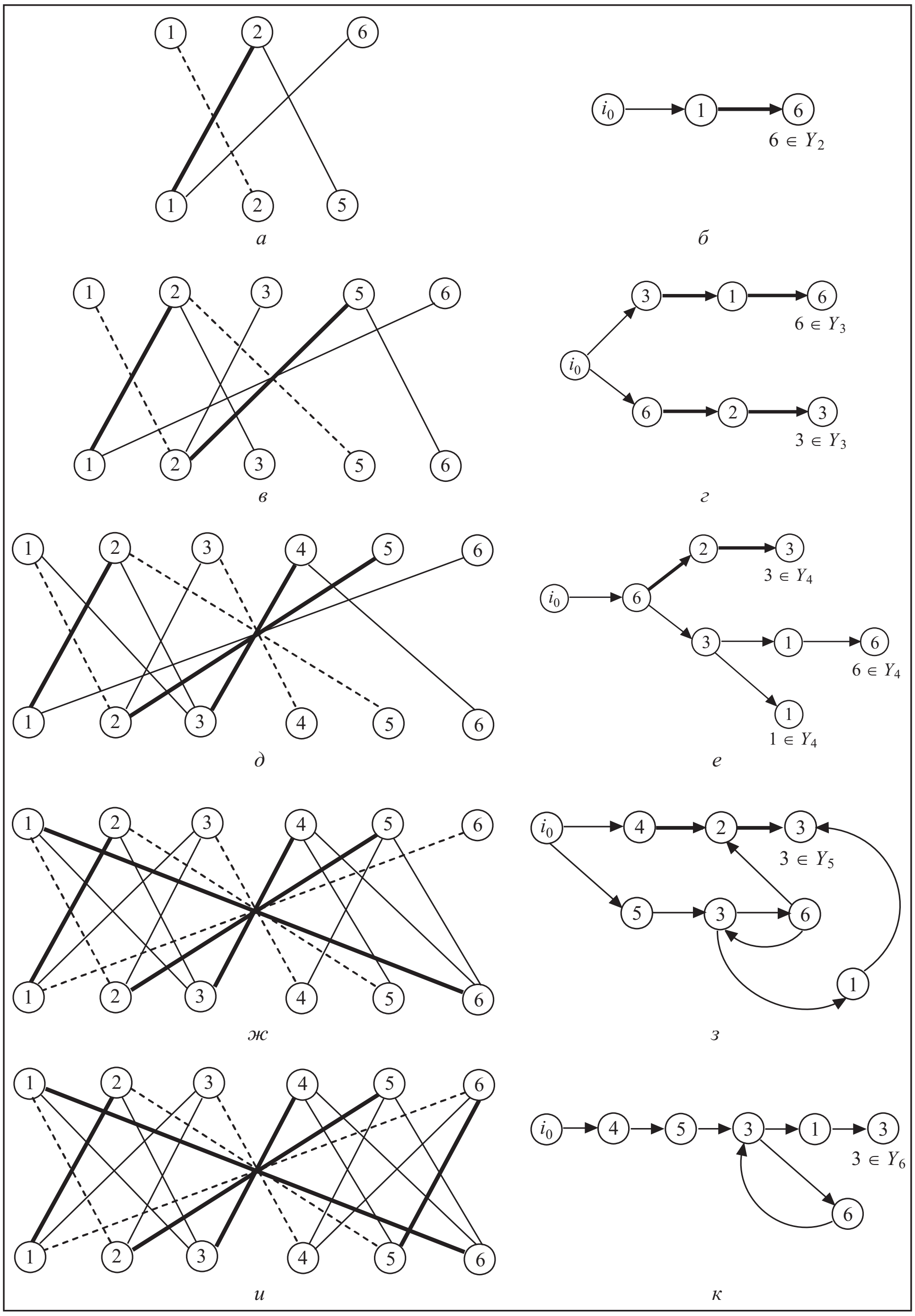


Рис. 5

Шаг 5. Подграф $\langle D_2 \rangle$ и построенный для него орграф (Z, A) изображены на рис. 5, *а* и рис. 5, *б* соответственно. Штриховой линией обозначено ребро, удаленное из графа (X, Y, E), жирной — ребро паросочетания ξ_1. Эти ребра образуют кратчайший увеличивающий путь P_2 относительно паросочетания ξ_1; $\xi_2^2 = (\xi_1 - P_2) \cup (P_2 - \xi_1) = \{[5, 2], [1, 6]\}$, $MIN2 = C(\xi_2^2) = c_{52} + c_{16} = 1 + 1 = 2$.

Шаг 6. Так как $MIN1 = MIN2$, $\xi_2 = \xi_2^1$ или ξ_2^2. Пусть $\xi_2 = \xi_2^1 = \{[1, 2], [2, 5]\}$. При $k = 3$ $\xi_3^1 = \{[1, 2], [2, 5], [3, 4]\}$, $MIN1 = C(\xi_3^1) = c_{12} + c_{25} + c_{34} = 1 + 1 + 1 = 3$.

Подграф $\langle D_3 \rangle$ для нахождения ξ_3^2 изображен на рис. 5, *в*, соответствующий ему орграф (Z, A) — на рис. 5, *г*. В (Z, A) веса дуг (3, 1), (6, 2), $(1, 6 \in Y_3)$, $(2, 3 \in Y_3)$ определяются так: $c(3,1) = c_{32} + c_{12} = 2 + 1 = 3$, $c(6,2) = c_{65} + c_{25} = 1 + 1 = 2$, $c(1,6) = 1$, $c(2,3) = 2$. В орграфе (Z, A) содержатся два кратчайших пути из вершин множества $X_3 = \{3, 6\}$ в вершины множества $Y_3 = \{3, 6\}$: $(3, 1, 6 \in Y_3)$, $(6, 2, 3 \in Y_3)$. Выберем любой из них, например $(3, 1, 6 \in Y_3)$. В подграфе $\langle D_3 \rangle$ ему соответствует кратчайший увеличивающий путь P_3 относительно паросочетания $\xi_2 = \{[1, 2], [2, 5]\}$, включающий ребра (3, 2), [1, 2], (1, 6). Следовательно, $\xi_3^2 = (P_3 - \xi_2) \cup$ $\cup (\xi_2 - P_3) = \{[1, 6], [3, 2]\} \cup \{[2, 5]\} = \{[1, 6], [2, 5], [3, 1]\}$, $MIN2 = C(\xi_3^2) = 1 + 1 + 2 = 4$. Поскольку $MIN1 \le MIN2$, $\xi_3 = \xi_3^1 = \{[1, 2], [2, 5], [3, 4]\}$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$, $J_3 = \{2, 4, 5\}$, в подграфе D_2 удаляется ребро (4, 3). В результате получим подграф D_3 $(c_{21} = c_{52} = c_{43} = \infty)$.

Положим $k = 4$. Паросочетание ξ_4^1 можно получить присоединением к ξ_3 ребра (6, 1) или (5, 6). Их веса, равные 1, минимальны на шаге 2. Пусть $\xi_4^1 = \{[1, 2], [2, 5], [3, 4], [6, 1]\}$. Следовательно, $MIN1 = C(\xi_4^1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$. Для построения ξ_4^2 формируются множества $X_4 = \{6\}$, $Y_4 = \{1, 3, 6\}$ и подграф $\langle D_4 \rangle$ (рис. 5, *д*). Вспомогательный орграф (Z, A), построенный для $\langle D_4 \rangle$, представлен на рис. 5, *е*. В нем кратчайший путь $(6, 2, 3 \in Y_4)$ включает ребра (6, 5), [2, 5], (2, 3) кратчайшего увеличивающего пути P_4 относительно паросочетания ξ_3 в $\langle D_4 \rangle$. Таким образом, $\xi_4^2 = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [6, 5]\}$, $MIN2 = C(\xi_4^2) = 1 + 2 + 1 + 1 = 5$. Поскольку $MIN1 < MIN2$, имеем $\xi_4 = \xi_4^1$, $I_4 = \{1, 2, 3, 6\}$, $J_4 = \{1, 2, 4, 5\}$, $D_4 = D_3 - (1, 6)$, $c_{16} = \infty$ (рис. 5, *ж*).

Положим $k = 5$. Здесь $\xi_5^1 = \{[1, 2], [2, 5], [3, 4], [5, 6], [6, 1]\}$, $C(\xi_5^1) = 5$, $X_5 = \{4, 5\}$, $Y_5 = \{3\}$. Кратчайший путь в орграфе (Z, A) $(4, 2, 3 \in Y_5)$ (рис. 5, *з*) содержит ребра (4, 5), [2, 5], (2, 3), образующие кратчайший увеличивающий путь P_5 относительно паросочетания ξ_4 в подграфе $\langle D_5 \rangle$ (рис. 5, *и*); $\xi_5^2 = \{[1, 2], [2, 3],$ $[3, 4], [4, 5], [6, 1]\}$, $MIN2 = C(\xi_5^2) = 1 + 2 + 1 + 4 + 1 = 9$; $MIN1 < MIN2$, $\xi_5 = \xi_5^1$, $I_5 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $J_5 = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, $D_5 = D_4 - (1, 6)$, $c_{16} = \infty$ (рис. 5, *к*).

Положим $k = 6$. Здесь $MIN1 = \infty$, поскольку $X - I_5 = \{4\}$, $Y - J_5 = \{3\}$, а $c_{43} = \infty$; $X_6 = \{4\}$, $Y_6 = \{3\}$. Поэтому полагаем $\xi_5 = \xi_5^2 = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4],$ $[4, 5], [6, 1]\}$, $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $J_5 = \{2, 3, 4, 5, 1\}$, $c_{21} = c_{32} = c_{43} = c_{54} = c_{61} = \infty$. На шаге 3 построения ξ_6 единственным ребром, которое можно присоединить к паросочетанию ξ_5, является ребро (5, 6), $c_{56} = 1$. Следовательно, $\xi_6 = \xi_6^1 =$ $= \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5], [6, 1], [5, 6]\}$, $MIN1 = 1 + 2 + 1 + 4 + 1 + 1 = 9$.

Решение задачи 2-f представлено гамильтоновым циклом (1, 2, 3, 4, 5, 6, 1). □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поиск решения задачи 2-f в произвольном взвешенном графе $H = (V, U)$ с матрицей стоимостей C корректно выполняется в двудольном графе $D = (X, Y, E)$, $|X| = |Y| = |V|$, $|E| = 2|U|$, задаваемом той же матрицей C. Задача 2-f формулируется как ограниченная версия задачи о назначениях. Ее решение представлено перестановкой столбцов матрицы C с цикловым разложением, в котором каждый контур содержит не менее трех дуг. Оптимальное решение является совершенным паросочетанием, полученным в результате пошагового выбора ребер графа D, начиная с ребра минимального веса. На каждом шаге строится допустимое паросочетание ξ_k, $k = \overline{1, n-1}$, с наименьшей суммой весов k ребер. Очередное паросочетание ξ_{k+1} находится либо построением кратчайшего увеличивающего пути относительно ξ_k, либо добавлением к ξ_k ребра, весом не большим веса любого ребра, которое образует ξ_{k+1}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gabow H.N. A good algorithm for smallest spanning trees with a degree constraint // Networks. — 1978. — **8**, N 3. — P. 201–208.
2. Ловас Л., Пламмер М. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. — М.: Мир, 1998. — 653 с.
3. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. — М.: Мир, 1985. — 510 с.
4. Сергеев С.И. Симметричная задача коммивояжера. II. Новые нижние границы // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 4. — С. 150–167.
5. Левченко А.Ю., Морозов А.В., Панишев А.В. Быстрый алгоритм решения задачи о назначениях для нахождения нижней границы стоимости маршрута коммивояжера // Искусственный интеллект. — 2011. — Вып. 4. — С. 406–416.
6. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973. — 300 с.

Надійшла до редакції 08.06.2015

О.Б. Маций, А.В. Морозов, А.В. Панішев

ШВИДКИЙ АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ 2-ФАКТОРА МІНІМАЛЬНОЇ ВАГИ

Анотація. Розглянуто задачу мінімізації у графі $H = (V, U)$ суми ваг ребер підмножини $U' \subset U$, що утворюють сукупність простих циклів, які не перетинаються у вершинах $v \in V$ і покривають V. Розглянута задача (задача 2-f) може бути поліноміально розв'язана алгоритмами, які характеризуються технічними труднощами, що перешкоджають прискоренню процесу обчислень. Розв'язок задачі 2-f знаходиться зведенням її до більш простого двочасткового випадку. Результат представлено досконалою паросполукою двочасткового графа, відповідною розв'язку задачі про призначення, у цикловому розвиненні якої кожний контур містить не менше трьох дуг.

Ключові слова: 2-фактор, задача про призначення, паросполука, двочастковий граф, збільшувальний шлях.

O.B. Matsiy, A.V. Morozov, A.V. Panishev

FAST ALGORITHM TO FIND THE 2-FACTOR OF MINIMUM WEIGHT

Abstract. The paper considers the minimization of the sum of weights of edges forming a subset of the set of disjoint simple cycles at the vertices in the graph $H = (V, U)$ and cover V. This problem (2-f problem) is solvable in polynomial algorithms, which are characterized by technical difficulties that hinder accelerate computing. The solution of 2-f is reducing it to a simple bipartite case. The desired result is represented by a perfect matching of a bipartite graph corresponding to the solution of the assignment problem, in which each expansion cycle circuit comprises at least three arcs.

Keywords: 2-factor, the assignment problem, matching, bipartite graph, increasing path**.**

Маций Ольга Борисовна,
ассистентка Харьковского национального автомобильно-дорожного университета,
e-mail: om21@mail.ru.

Морозов Андрей Васильевич,
кандидат техн. наук, доцент, декан факультета Житомирского государственного технологического университета, e-mail: morozov.andriy@gmail.com

Панишев Анатолий Васильевич,
доктор техн. наук, профессор, заведующий кафедрой Житомирского государственного технологического университета, e-mail: pzs.ztu@gmail.com.