УДК 519.217; 519.718; 519.837

В.К. ЯСИНСКИЙ, Б.В. САВЧУК, С.М. КОЗЫРЬ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ДИФФУЗИОННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ИТО С МАРКОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ И ВНЕШНИМИ МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Аннотация. Вторым методом Ляпунова–Красовского получены достаточные условия асимптотической стохастической устойчивости в целом, устойчивости в целом, экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом тривиального решения систем стохастических диффузионных дифференциально-функциональных уравнений с марковскими переключениями, а также проиллюстрирована теория на двух модельных задачах.

Ключевые слова: стохастическая динамическая система, система с последействием, марковское возмущение.

Решена проблема устойчивости и оптимального управления динамическими системами сложной вероятностной структуры [1, 4, 5, 9–14, 19–21, 24]. Приведены основные определеня асимптотической устойчивости по вероятности и в среднем квадратическом вторым методом Ляпунова. Доказана основная теорема (достаточные условия) стабилизации решения на бесконечности динамических систем случайной структуры с внешними марковскими переключениями [2, 3, 16–26].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на вероятностном базисе $(\Omega, \mathsf{F}, \boldsymbol{F} \equiv \{\mathsf{F}_t, t \geq t_0\}, \boldsymbol{P})$ состояние реальной динамической системы задано случайным процессом $x(t) \equiv x(t, \omega) : [t_0; \infty) \times \times \Omega \to R^m$ как сильное решение диффузионного нелинейного стохастического дифференциально-функционального уравнения с марковскими переключениями (ДНСДФУ с МП) и с конечным последствием

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x_t, u)dt + b(t, \xi(t), x_t, u)dw(t) \tag{1}$$

с учетом внешних марковских переключений $\{\eta_k, k \to \infty\}$

$$\Delta x(t)|_{t=t_k} = g(t_k -, \xi_{t_k -}, x_{t_k -}, \eta_{t_k -}) \tag{2}$$

и с начальными условиями

$$x(t_0) = \varphi;\ \xi(t_0) = y \in \boldsymbol{Y};\ \eta(t_0) = h \in \boldsymbol{H};\ t_0 \geq 0;\ \varphi \in D. \tag{3}$$

Здесь $x_t \equiv \{x(t+\theta, \omega), -\tau \leq \theta \leq 0, \tau > 0\}$ — отрезок сильного решения ДНСДФУ с МП (1) с переключениями $\{\eta_k, k \to \infty\}$ в дискретные моменты времени $t_k \in S \equiv \{t_n \uparrow, n \in \boldsymbol{N}\}$, $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = +\infty$; $D = D([-\tau, 0] \times R^m)$ — пространство Скорохода непрерывных справа функций, имеющих левосторонние пределы [3, 5, 7, 16]; вектор $x(t) \equiv x(t, \omega) \in R^m$ отклонения действительных значений m-мерной величины от его невозмущенного значения $x(t) \equiv 0\ \forall\, t \geq t_0 \geq 0$; величина $u \equiv u(t, y, x, h) \in R^k$ — k-мерное управляющее воздействие [4, 14]; $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega) : [t_0, \infty) \times \Omega \to R^1$ — марковский процесс; $\eta(t) \equiv [t_0, \infty) \times \Omega \to R^1$ — цепь Маркова [7].

В работе [4] доказано, что сильное решение $x(t)$ ДНДСФУ с МП (1)–(3) есть марковский процесс при условии, что уравнение (1) имеет параметр $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega) \in R^m$ и управление $u \in R^k$. В работе [10] рассмотрен вариант задачи (1)–(3), когда $\xi(t)$ есть простая марковская цепь с конечным числом состояний $\{y_1, \ldots, y_n\} = Y$ и заданными вероятностями перехода [7]

$$\boldsymbol{P}\{\xi(t) = y_j / \xi(s) = y_i\} = q_{ij}(t-s) + o(t-s);$$
$$\boldsymbol{P}\{\xi(\tau) \equiv y_i, s \le \tau \le t / \xi(s) = y_i\} = 1 - q_i(t-s) + o(t-s). \tag{4}$$

В этом случае условная плотность распределения скачков $p_{ij}(\tau, z/x)$ фазового вектора $x(t)$ непрерывна по τ и имеет компактный носитель z, удовлетворяющий условиям [10]

$$h_1||x|| \le ||z|| \le h_2||x||;\ 0 < h_1 < h_2;\ p_{ij}(\tau, z/0) = \delta(z),\ h_1 \le 1,\ h_2 \ge 1, \tag{5}$$

где $||x||$ — норма из [10].

В работе [10] рассмотрен чисто разрывный марковский процесс $\xi(t) \in [\eta_1, \eta_2]$, допускающий разложения

$$\boldsymbol{P}\{\xi(t + \Delta t) \in [\beta, \beta + \Delta\beta] / \xi(t) = \alpha \ne \beta\} = p(t, \alpha, \beta)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t);$$
$$\boldsymbol{P}\{\xi(\tau) \equiv \alpha,\ t < \tau < t + \Delta t / \xi(t) = \alpha\} = 1 - p(t, \alpha)\Delta t + o(\Delta t). \tag{6}$$

В моменты скачка марковского процесса $\xi(t)$ как параметра фазовый вектор $x(t)$ как сильное решение ДНСДФУ с МП (1)–(3) принадлежит пространству Скорохода [5, 7].

Ставится задача с помощью второго метода Ляпунова [11–15] (метод функционалов Ляпунова–Красовского) найти достаточные условия стабилизации в терминах коэффициентов ДНСДФУ с МП (1)–(3) [5].

ДВЕ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ И АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим случай, когда $\xi(t) = \xi(t, \omega) \in Y$ — простая марковская цепь с конечным числом состояний $Y \equiv \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ [7]. Это есть гарантией того, что реализации $\xi(t)$ с вероятностью единица кусочно-постоянны в моменты $\{t_k, k \ge 1\}$ для состояния системы (1). Тогда на каждом случайном интервале времени $t_k \in [l - \tau, l]$ при $\xi(t) = y_i \in Y$ движение происходит в силу ДНСДФУ с МП, а именно

$$dx(t) = a(t, y_i, x_t, u)dt + b(t, y_i, x_t, u)dw(t),\ t \in [\delta - \tau, \delta), \tag{7}$$

$$\Delta x(t)|_{t=t_i} = g(t_i -, y_i, x_{t_i -}, z_i) \tag{8}$$

с начальными условиями

$$x(\delta - \tau) = x, \xi(\tau - \delta) = y_i, \eta(\tau - \delta) = y_i. \tag{9}$$

Пусть δ — момент переключения $\xi(\tau - 0) = y_i$ к значению $\xi(t) = y \ne y_j$, $y_j \ne y_i$. Тогда на интервалах постоянства $\xi(t) = y_j$ и $\eta(t) = y_j$ следует решать уравнения (1), (2), где y_i заменяем y_j, т.е. имеем ДНСДФУ с МП

$$dx(t) = a(t, y_j, x_t, u)dt + b(t, y_j, x_t, u)dwt\ \ \forall\, t \in [\delta, \delta+). \tag{10}$$

При этом появляется проблема выбора начальных условий $x(\delta)$ для новой системы (10), обусловленного реальными свойствами моделируемого объекта.

Таким образом, сильное решение $x(t) \equiv x(t, \omega) \in C$ ДНСДФУ с МП (1), (2), марковские процессы $\xi(t)$ и η_k, а также начальные условия (3) определяют

$(m+2)$-марковский процесс $\{x(t), \xi(t), \eta_k\}$, где случайный процесс $\{x(t), t \ge t_0\}$ характеризует изменение m-мерного вектора состояния динамической системы, а $\{\xi(t)\}$ и $\{\eta_k\}$ — случайные изменения структуры соответственно внутренние и внешние.

Определение 1. В дальнейшем ДНСДФУ с МП (1) и условия (2), (3) будем называть системой случайной структуры [9, 10].

В прикладных задачах наиболее существенными являются следующие случаи:

1) в момент δ скачкообразного изменения процесса $(\xi(t), \eta_k)$ фазовый вектор $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \mathbb{R}^m$ изменяется непрерывно, т.е.

$$x(\delta - 0) = x(\delta); \tag{11}$$

2) в момент $\delta > t_0$ скачкообразного изменения процесса $(\xi(t), \eta_k)$ фазовый вектор $x(\delta)$ однозначно определяется состоянием системы до изменения структуры, которое является следствием перехода $\xi(\delta - 0) = y_i$ в $\xi(\delta) = y_j \ne y_i$, $\eta(\delta - 0) = z_i$ в $\eta(\delta) = z_j$, т.е. будем считать, что

$$x(\delta) = \varphi_{ij}(x(\delta - 0)), \; i \ne j, \tag{12}$$

где $\varphi_{ij}(x)$ — непрерывные функции, причем $\varphi_{ij}(0) = 0$, удовлетворяющие условию (5) [10]. Если $\varphi_{ij}(x)$ — линейная функция, то существует $m \times m$ матрица K_{ij} такая, что

$$x(\delta) = K_{ij} x(\delta - 0); \tag{13}$$

3) обший случай для момента δ изменения структуры системы $y_i \to y_j$, $z_i \to z_j$ задается условным законом распределения начального состояния $x(\delta)$ для изменившейся системы

$$\boldsymbol{P}\{x(\Delta) \in [\gamma, \gamma + \Delta\gamma] / x(\delta - 0) = x\} = p_{ij}(\delta, \gamma / x)\Delta\gamma + o(\Delta\gamma), \tag{14}$$

где $p_{ij}(\delta, \gamma / x)$ — условная плотность фиксированного m-мерного распределения.

Заметим, что случай 1 непрерывного изменения вектора имеет место при $K_{ij} = E$, где E — единичная матрица.

Очевидно, что почти все реализации процесса $\{x(t), \xi(t), \eta(t)\}$ непрерывны справа [7].

Случаи (12), (13) можно получить из (14), когда $p_{ij}(\delta, \gamma / x) = \delta(\gamma - x)$ и, следовательно, $p_{ij}(\delta, \gamma / x) = \delta(\gamma - \varphi_{ij}(x))$.

В дальнейшем для задания системы (1)–(3) случайной структуры следует определить следующие математические объекты:

— ДНСДФУ с МП (1) с начальными условиями (2), (3);

— вероятностные характеристики чисто разрывных процессов $\xi(t)$ (4) или (6), а для $\eta(t)$ аналогичные вероятые характеристики [10];

— условный закон распределения (4) (или (6), (14) как частные случаи), который задает начальные условия для фазового вектора состояния $x(t) \in R^m$ при изменяющейся структуре системы.

Принята следующая терминология устойчивости тривиального решения $x(t) \equiv 0$ системы случайной структуры (1)–(3).

Введем вначале обозначение совокупности элементов пространств Скорохода D, которое даст более компактное определение устойчивости решений ДНСДФУ с МП [7]

$$S_r \equiv \{\varphi \in D / ||\varphi|| < r\}; \; S_r^{(0)} \equiv \{\varphi \in D / ||\varphi||_0 < r\},$$

$$\hat{S}_r^{(0)} \equiv \{\varphi \in E / E\{||\varphi||_0^2\} < r^2\}; \; \overline{S}_r^{(0)} \equiv \{\varphi \in \mathsf{F}_s / E\{s\sup|\varphi(\theta)|\} < r^2\},$$

где $E\{\cdot\}$ — операция математического ожидания; F — σ-алгебра, относительно которой измеримы случайные процессы как сильные решения динамических систем случайной структуры [10]; $||\varphi||$ — равномерная норма; $||\varphi||_0 = \varphi^2(0) + \int_{-\tau}^{0} \varphi^2(\theta)d\theta$ [17, 19].

Определение 2 [10]. Тривиальное решение $x \equiv 0$ системы (1)–(3) назовем устойчивым по вероятности (стохастически устойчивым), если $\forall \varepsilon > 0$, $r > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условий $\varphi \in S_\delta$, $y_0 \in Y$, $h_0 \in H$, $t_0 \geq 0$ следует неравенство

$$P\{\sup_{t \geq t_0} ||x_t|| < \varepsilon / \varphi, y_0, h_0\} > 1 - r \quad \forall\, y_0 \in Y,\ h_0 \in H,\ t_0 \geq 0,$$

$$x_t \equiv \{x(t + \theta, t_0, y_0, h_0, \varphi)\}. \tag{15}$$

Замечание 1. Определение 2 означает, что с вероятностью, близкой к единице, решение $x(t)$ системы (1)–(3) остается в любой малой окрестности начала координат, если начальное отклонение мало.

Определение 3. Пусть решение $x \equiv 0$ системы (1)–(3) устойчиво по вероятности. Если для любого $\gamma > 0$ и любого начального условия $\varphi \in S_\delta$ выполняется неравенство

$$\lim_{T \to \infty} P\{\sup_{t \geq t_0 + T} ||x_t|| < \gamma / \varphi, y_0, h_0\} = 1, \tag{16}$$

то это тривиальное решение назовем асимптотически устойчивым по вероятности, а постоянная δ характеризует область притяжения точки $x \equiv 0$.

Определение 4 [10, 14, 19–23]. Тривиальное решение $x \equiv 0$ назовем устойчивым в среднем квадратическом ($l.i.m.$), если для $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $s \geq 0$ из $\varphi \in \hat{S}_r^{(0)}$ следует $x_t(s, \varphi) \in \bar{S}_{\delta_1}^{(0)}$.

Определение 5. Тривиальное решение $x \equiv 0$ системы (1)–(3) назовем асимптотически устойчивым в $l.i.m.$, если оно устойчиво в $l.i.m.$ (определение 4) и $\forall s \geq 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\lim_{t \to \infty} E\{||x(t)||^2\} = 0 \tag{17}$$

для любого $\varphi \in \hat{S}_\delta^{(0)}$.

Замечание 2. Из асимптотической устойчивости в среднем квадратическом ($l.i.m.$) тривиального решения $x \equiv 0$ ДНСДФУ с МП следует асимптотическая устойчивость по вероятности [22].

Отметим, что из неравенства Чебышева следует факт асимптотической устойчивости по вероятности (стохастической устойчивости), если имеем асимптотическую устойчивость в $l.i.m.$ [18]. Поэтому приведем основные утверждения об асимптотической устойчивости в $l.i.m.$ тривиального решения ДНСДФУ с МП [17–20].

Определение 6 (оптимальное управление [10]). Для динамической системы случайной структуры (1)–(3) при условии скачка фазового вектора $x(t) = x(t, \omega) \in R^m$ найти управление $u^0(t, x, y, h)$, которое обеспечивает выполнение условий:

— невозмущенное движение $x(t) = x(t, \omega) \equiv 0$ системы

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x_t, u(t, \xi(t), x(t)))dt + b(t, \xi(t), x_t, u(t, \xi(t), x_t))dw(t) \tag{18}$$

при $u = u^0(t, x, y, h)$ асимптотически устойчиво в $l.i.m.$ (асимптотически устойчиво по вероятности в целом) t_{k+1};

— ряд из интегралов при любых начальных условиях

$$J_u(t_0, y_0, x_0, \eta_{k_0}) \equiv$$
$$\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} E[W(t, \xi[t], x[t], \eta_k, u[t]) / \xi(t_0) = y_0,\ x_{t_0} = \varphi_0, \eta_{k_0}] dt \qquad (19)$$

должен быть убывающим;

— при любых начальных условиях $\xi(t_0) = y_0 \in Y$, $x_{t_0} = \varphi_0 \in D$, $\eta_{k_0} \in H$ должно выполняться соотношение для минимума функционала

$$J_{u^0}(t_0, y_0, \varphi_0) = \min J_u(t_0, y_0, x_{t_0} = \varphi_0), \qquad (20)$$

где min выбирается из всех управлений $u(t, y, 0) = 0$ и непрерывных по $t \in [0, \infty)$, $x_t \in D$ при каждом $\xi(t) = y \in Y$, $\eta_k \in H$. Такое управление назовем оптимальным, а сильное решение (1)–(3) стабилизируемым.

В (19) $W(t, y, \varphi, \eta_k, u) \geq 0$ — неотрицательный функционал, определенный в области $u \in R^r$ при фиксированных t, y, φ, η_k, $E\{\cdot / \cdot\}$ — условное математическое ожидание [22], управление $u[t] \equiv u(t, \xi(t), x[t], \eta_k)$ реализуется в системе (1) при $u \equiv u(t, y, \varphi, h)$, а $x[t]$ обозначает движение системы (1), порожденное управлением $u[t]$ [10] , т.е. $x[t]$, $u[t]$ — это соответственно траектория и управление системы (1), порожденное заданным управлением $u \equiv u^*(t, y, x, h)$.

Пусть построен вероятностный базис $(\Omega, F, \{F_t\}, P)$ для решения ДНСДФУ с МП (1)–(3).

Первая задача оптимальной стабилизации. Для ДНСДФУ с МП (1) с заданными условиями скачка (3) фазового вектора $x \in R^m$ и переключениями (2) необходимо построить такое управление $u(t, y, \varphi, h)$, которое удовлетворит условию $u(t, y, 0, h) \equiv 0$, чтобы невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ системы (1)–(3) было асимптотически устойчивым в $l.i.m.$ или по вероятности в целом, т.е. при любых начальных условиях из области (3).

Понятно, что в этой задаче существует бесконечное множество управлений. Поэтому единственное управление следует выбирать из требования наилучшего качества переходного процесса $x(t) \in R^m$ как решения ДНСДФУ с МП (1)–(3), которое выражается условием нахождения минимального значения функционала (19).

Алгоритм приближенного вычисления функционала (19) при заданном управлении $u(t, y, \varphi, h)$ достаточно сложный [10]. Рассмотрим его.

Шаг 1. Найти траекторию решения $x[t]$ ДНСДФУ с МП (1) при $u \equiv u(t, y, \varphi, h)$ методом статистического моделирования [23].

Шаг 2. Подставить $x[t]$, $\xi[t]$, $u[t] = u(t, \xi(t), x[t], \eta_k)$ в функционал (19).

Шаг 3. Методом статистического моделирования [23] вычислить значение функционала (19).

Шаг 4. Проблему выбора значений функционала $W(t, y, \varphi, h, u)$, который определяет оценку $\boldsymbol{I}_u$ и качество процесса как сильного решения ДНСДФУ с МП (1) следует связать с конкретными особенностями поставленной задачи. Для этого необходимо выполнить следующие условия:

— min функционала (19) должны обеспечивать достаточно быстрое угасание сильного решения $x[t]$ ДНСДФУ с МП (1) с вероятностью единица;

— величина интеграла $\boldsymbol{I}_u(t_0, y_0, x_0, \eta_{k_0})$ должна удовлетворительно оценивать компьютерное время, затрачиваемое на формирование управления $u[t]$;

— функционал $W(t, y, x, \eta_k, u)$ должен быть таким, чтобы решение первой задачи стабилизации получалось в конструктивной форме, т.е. в замкнутой [10].

Для линейных систем ДНСДФУ с МП (1) во многих случаях удовлетворительной является квадратичная форма по переменным x и u, а именно

$$W(t, y, x, h, u) = x^{\mathrm{T}} C(t, y, h) x + u^{\mathrm{T}} D(t, y, h) u, \tag{21}$$

где $C(t, y, h)$ — симметричная неотрицательная матрица размера $m \times m$; $D(t, y, h)$ — положительно определеная матрица размера $r \times r$ для всех $t \geq t_0 \geq 0$, $y \in \boldsymbol{Y}$, $h \in \boldsymbol{H}$, где $C(t, y, h) \geq 0$, $D(t, y, h) > 0$ [10].

Величина $\boldsymbol{I}_u$ при квадратичной форме переменных x и u в (21) достаточно хорошо оценивает в среднем качество переходного процесса, при этом наличие члена $u^{\mathrm{T}} Du$ и условие минимума одновременно ограничивают величину управляющего воздействия $u \in R^r$.

Задача оптимизации при выборе W в (19) эффективно решается с использованием современных компьютерных технологий.

Если условие скачка фазовой траектории считать линейным, то решение задачи стабилизации достигается в классе управлений $u(t, y, x, h)$, которые линейны по фазовому вектору x. Такие задачи назовем линейно-квадратичными задачами стабилизации [10].

Вторая задача оптимальной стабилизации. Для системы ДНСДФУ с МП (2) и начальных данных (3) при марковских возмущениях (2), с заданным условием скачка фазового вектора $x \in \boldsymbol{R}^m$ найти оптимальное управление $u^0(t, y, x, h) \in \boldsymbol{R}^r$, удовлетворяющее требованиям:

— тривиальное (невозмущенное) движение $x(t) \equiv 0$ ДНСДФУ с МП (1)–(3) при $u \equiv u^0(t, y, x, h)$ асимптотически устойчиво по вероятности в целом;

— ряд $\boldsymbol{I}_u$, составленный из интегралов (см. (19)) для $u \equiv u^0(t, y, x, h)$, является сходящимся, и при произвольном начальном условии (3) выполняется условие

$$\boldsymbol{I}_{u^0}(t_0, y_0, \varphi_0, \eta_{k_0}) \equiv \min \boldsymbol{I}_u(t_0, y_0, \varphi_0, \eta_{k_0}). \tag{22}$$

Здесь минимум следует искать по всем управлениям, непрерывным по переменным t и x при каждых $\xi(t) = y \in \boldsymbol{Y}$, $\eta_k = h \in \boldsymbol{H}$.

Определение 7. Управление $u^0(t)$, которое удовлетворяет (22), назовем оптимальным в смысле оптимальной стабилизации сильного решения $x \in \boldsymbol{R}^m$ ДНСДФУ с МП (1)–(3).

Рассмотрим доказательство факта оптимальной стабилизации решенния задачи (1)–(3).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Метод решения задачи оптимальной стабилизации разработан согласно двум основным требованиям:

— синтез оптимального управления $u^0(t, x, y, h)$ осуществляется по принципу полной обратной связи, т.е. имеется возможность полного и точного измерения фазового вектора $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \boldsymbol{R}^m$ в любой момент времени $t \geq t_0 \geq 0$;

— предполагается, что известная структура, в которой находится система в момент времени $t \geq t_0$, не зависит от цепи Маркова η_k ($k \geq k_0$ соответствует моменту $t_k \in S$).

Несоблюдение этих двух ограничений приводит к необходимости использования специальных методов оценки состояния $(m+1)$-мерного марковского процесса $\{x(t), \xi(t)\}$ по доступным измерениям неполного и неточного значений наблюдаемого сигнала [10].

Отметим, что для стохастических динамических систем, не имеющих марковских параметров (внутренних переключений) и внешних марковских переключений, решение задачи оценивания осуществляется с помощью нелинейной фильтрации [15], а для систем случайной структуры эта проблема рассматривается в [9].

Метод решения задачи оптимальной стабилизации базируется на непосредственной связи между методом функционалов Ляпунова–Красовского [11] и методом динамического программирования Беллмана [2], что является основой теории аналитического конструирования регуляторов [12] для детерминированных систем. Одновременно в 50–60-е годы XX века Н.Н. Красовский и И.Я. Кац разработали метод функций Ляпунова исследования устойчивости для стохастических систем [10].

Отметим, что перечисленные направления исследований позволили построить общую теорию оптимального управления для стохастических систем без последействия [13]. Одним из обобщений в теории оптимальной стабилизации является введение внешних марковских переключений в фиксированные моменты времени $\{t_k \uparrow, k \ge 0\}$.

Докажем основное утверждение об оптимальной стабилизации.

Теорема 1. Пусть для ДНСДФУ с МП (1), (3) при условии скачка (2) существуют скалярный функционал $v^0(t_k, y, \varphi, h)$ и r-векторная функция $u^0(t, y, \varphi, h) \in \boldsymbol{R}^r$ в области

$$t \ge 0;\ \varphi \in D,\ \xi(t) \in \boldsymbol{Y},\ \{\eta_k, k \ge 0\} \subset \boldsymbol{H}, \tag{23}$$

для которых выполняются следующие условия:

1) функционал $v^0(t, y, \varphi, h) > 0$ положительно определен по $\varphi \in D([-\tau, 0), \boldsymbol{R}^m)$ в области (23), допускает бесконечно малую верхнюю и бесконечно большую нижнюю границы и такой, что последовательность функционалов

$$v_k^0(y, \varphi, h) \equiv v^0(t_k, y, \varphi, h) \tag{24}$$

является функционалами Ляпунова–Красовского, где $t_k \in S \equiv \{t_n \uparrow, n \in \boldsymbol{N}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$;

2) последовательность r-измеримых функционалов управления

$$u_k^0(y, \varphi, h) \equiv u^0(t_k, y, \varphi, h) \in \boldsymbol{R}^r) \tag{25}$$

является измеримой по всем аргументам, где $0 \le t_0 < t_k < t_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n, \ldots$ $(k \ge 0)$;

3) последовательность функционалов из критерия (19) по $\varphi \in D$ есть положительно-определенной, т.е. $\forall\, t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \ge 0$

$$W(t, y, \varphi, h, u_k^0(y, x, h)) > 0; \tag{26}$$

4) последовательность инфинитезимальных операторов $(\boldsymbol{Q} v_k^0)(y, \varphi, h, u)|_{u_k^0}$, вычисленных для $u_k^0 \equiv u^0(y, \varphi, h)$, удовлетворяет $\forall\, t \in [t_k, t_{k+1})$ условию

$$(\boldsymbol{Q} v_k^0)(y, \varphi, h, u)|_{u_k^0} = -W(t, y, \varphi, h, u_k^0); \tag{27}$$

5) величина $(\boldsymbol{Q} v_k^0)(y, \varphi, h, u) + W(t, y, \varphi, h, u)$ достигает минимума $u = u^0$, $k \ge 0$, т.е.

$$(\boldsymbol{Q} v_k^0)(x, \varphi, h, u)|_{u_k^0} + W(t, y, \varphi, h, u_k^0) =$$

$$= \min_{u \in \boldsymbol{R}^r} \{(\boldsymbol{Q} v_k^0)(y, \varphi, h, u)|_u + W(t, y, \varphi, h, u)\} = 0\,; \tag{28}$$

6) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{E}\{W(t, \xi(t), x_0[t], \eta_k, u_0[t]) / y_{k-1}, x[t_{k-1}], \eta_k\} dt < \infty \tag{29}$$

является сходящимся.

Тогда управление $u_k^0 \equiv u^0(t_k, y, \varphi, h)$, $k \geq 0$, осуществляет стабилизацию решения задачи (1)–(3). При этом выполняется равенство

$$v^0(t_0, y_0, x_0, \eta_{k_0}) \equiv$$
$$\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{E}\{W(t, \xi(t), x_k[t], \eta_k, u_k[t]) / \xi(t_k) = y_k, x(t_k) = x_k, \eta_k = h\} dt =$$
$$= \min_{u \in \boldsymbol{R}^r} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{\infty} \boldsymbol{E}\{W(t, \xi(t), x[t], \eta_k, u[t]) / y_k, x_k, h\} dt \equiv \boldsymbol{I}_{u^0}(t_0, y_0, x_0, h). \quad (30)$$

Доказательство I. Асимптотическая устойчивость по вероятности в целом динамической системы случайной структуры (1)–(3) для $u \equiv u^0(t_k, y, \varphi, h)$, $k \geq 0$, сразу следует из теоремы 2.2 об устойчивости из [20], так как функционалы $v^0(t, y, \varphi, h)$ для произвольного $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \geq 0$, удовлетворяет условиям этой теоремы.

II. Равенство (30), очевидно, также является следствием теоремы 2.2 из [20].

III. Доказательство о стабилизации сильного решения динамической системы случайной структуры (1)–(3), осуществляющей управление $u^0(t_k, y, \varphi, h)$, $t_k \leq t < t_{k+1}, k \geq 0$, проведем от противного.

Пусть существует управление $u^*(t_k, y, \varphi, h) \neq u^0(t_k, y, \varphi, h)$, которое при подстановке в (1) реализует такое решение $x^*[t]$ с начальными условиями (2), (3), что выполняется неравенство

$$\boldsymbol{I}_{u^*}(t_0, y_0, \varphi, h) \leq \boldsymbol{I}_{u^0}(t_0, y_0, \varphi, h). \quad (31)$$

А дальше рассуждаем следующим образом: выполнение условий 1–6 теоремы 1 приведет к противоположному (31) неравенству

$$(\boldsymbol{Q}\, v_k^0).(y, \varphi, h)|_{u^*} \geq -W(t, y, \varphi, h, u^*(t, y, \varphi, h)). \quad (32)$$

Усредняя (32) по случайным величинам $\{x^*[t], \xi[t], \eta_k\}$ на отрезках $[t_k, t_{k+1})$, $k \geq 0$, и интегрируя по t от $t = t_0$ до $t = T$, получаем следующие неравенства:

$$\boldsymbol{E}\{v^0(t_1, \xi(t_1), x^*[t_1], \eta_{k_1}) / y_0, x_0, \eta_{k_0}\} - v^0(t_0, y_0, x_0, \eta_{k_0}) \geq$$
$$\geq -\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{E}\{W(t, \xi(t), x^*[t], \eta_{k_1}, u^*[t]) / t_0, x_0, \eta_{k_0}\} dt, \quad (33)$$

$$\boldsymbol{E}\{v^0(t_2, \xi(t_2), x^*[t_2], \eta_{k_2}) / y_1, x^*[t_1], \eta_{k_1}\} -$$
$$-\{v^0(t_1, \xi(t_1), x^*[t_1], \eta_{k_1}) / y_0, x_0, \eta_{k_0}\} \geq$$
$$\geq -\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{E}\{W(t, \xi(t), x^*[t], \eta_{k_2}, u^*[t]) / t_1, x^*[t_1], \eta_{k_1}\} dt, \quad (34)$$

- -

$$\boldsymbol{E}\{v^0(t_n, \xi(t_n), x^*[t_n], \eta_{k_n}) / y_{n-1}, x^*[t_{n-1}], \eta_{k_{n-1}}\} -$$
$$-\{v^0(t_{n-1}, \xi(t_{n-1}), x^*[t_{n-1}], \eta_{k_{n-1}}) / y_{n-2}, x^*[t_{n-2}], \eta_{k_{n-2}}\} \geq$$
$$\geq -\int_{t_{n-1}}^{t_n} \boldsymbol{E}\{W(t, \xi(t), x^*[t], \eta_{k_{n-1}}, u^*[t]) / t_{n-1}, x^*[t_{n-1}], \eta_{k_{n-1}}\} dt. \quad (35)$$

Учитывая мартингальное свойство функционала Ляпунова–Красовского $v^0(t, \xi(t), x^*[t], h)$ (см. условие 1 теоремы 1) на сильных решениях системы (1)–(3), имеем с вероятностью единица следующие равенства:

$$\boldsymbol{E}\{v^0(t_k, \xi(t_k), x^*[t_k], \eta_k) / y_{k-1}, x^*[t_{k-1}], \eta_{k-1}\} =$$
$$= v^0(t_{k-1}, \xi(t_{k-1}), x^*[t_{k-1}], \eta_{k-1}), \ k = \overline{1, n}. \tag{36}$$

Подставив (36) в неравенства (34), (35), получим неравенство

$$\boldsymbol{E}\{v^0(t_n, \xi(t_n), x^*[t_n], \eta_{k_n}) / y_{n-1}, x^*[t_{n-1}], \eta_{k_{n-1}}\} - v^0(t_0, y_0, x_0, \eta_{k_0}) \geq$$
$$\geq -\sum_{k=0}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{E}\{W(t, \xi(t), x^*[t], \eta_k, u^*[t]) / y_{k-1}, x^*[t_{k-1}], \eta_{k-1}\} dt \geq$$
$$\geq -\sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{E}\{W(t, \xi(t), x^*[t], \eta_k, u^*[t]) / y_{k-1}, x^*[t_{k-1}], \eta_{k-1}\} dt. \tag{37}$$

По предположению (29) интегралы при $t_n \to \infty$ в правой части (37) являются сходящимися, и, учитывая сходимость ряда (29) условия 6, можно получить

$$v^0(t_0, y_0, x_0, \eta_{k_0}) = \boldsymbol{I}_{u^0}(t_0, y_0, x_0, \eta_{k_0}) \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{E}\{W(t, \xi(t), x^*[t], \eta_k, u^*[t]) / y_{k-1}, x^*[t_{k-1}], \eta_{k-1}\} dt =$$
$$= \boldsymbol{I}_{u^*}(t_0, y_0, x_0, \eta_{k_0}). \tag{38}$$

Действительно, из сходимости ряда в правой части (37) при выполнении условия 6 следует, что подынтегральное выражение в (38) стремится к нулю при $t \to \infty$, значит, $\lim\limits_{n \to \infty} \boldsymbol{E}\{v^0(t_n, y_n, x^*[t_n], \eta_{k_n}\} = 0.$

Очевидно, что логично рассматривать естественный случай, когда из условия $\boldsymbol{E}\{W\} \underset{t \to \infty}{\to} 0$ следует $\boldsymbol{E}\{v^0\} \underset{t \to \infty}{\to} 0.$

Таким образом, неравенство (38) отрицает неравенство (31). Это противоречие доказывает утверждение об оптимальности управления $u^0(t_k, y, \varphi, h)$, $k \geq 0$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Если $\xi(t_k)$ как марковская цепь допускает разложение условной вероятности перехода

$$\boldsymbol{P}\{\omega : \xi(t + \Delta t) = y_j / \xi(t) = y_i, \, y_i \neq y_j\} = q_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t), \ i, j = \overline{1. k}, \tag{39}$$

то получим управление, которое должно удовлетворять оптимальному функционалу Ляпунова–Красовского $v_k^0(t, y, \varphi, h)$ и оптимальному управлению $u_k^0(t, y, \varphi, h)$ $\forall \, t \in [t_k, t_{k+1})$.

С учетом формулы (39) первое уравнение для v^0 можно получить, подставив в левую часть (38) выражение для усредненного инфинитезимального оператора $(\boldsymbol{Q} v_k^0)|_{u^*}$ [10]. Тогда искомое уравнение в точках (t_k, y_j, x) имеет вид

$$\frac{\partial v_k^0}{\partial t}+\left(\frac{\partial v_k^0}{\partial \varphi}\right)^{\mathrm{T}}\cdot a(t, y, \varphi, u)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_k^0}{\partial x^2}(b(t, y_i, \varphi), b^{\mathrm{T}}(t, y_i, \varphi))\right)+$$

$$+\sum_{j\neq i}^{l}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} v_k^0(t, y_j, z/\varphi, h)p_{ij}(t, z/\varphi)dz - v_k^0(t, y_i, \varphi, h)\right]q_{ij}(t)+W(t, y, \varphi, h, u)=0, \tag{40}$$

где $\left(\frac{\partial v_k^0}{\partial \varphi}\right)\equiv\left(\frac{\partial v^0}{\partial \varphi_1},\ldots,\frac{\partial v^0}{\partial \varphi_m}\right)^{\mathrm{T}}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}=\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}\right\}_{i,j=1}^{m}$ — первая и вторая производные Фреше [6]; $p_{ij}(t, z/x)$ определяется по соответствующей формуле (4).

Вторую производную Фреше по оптимальному управлению $u_k^0(t, y, \varphi, h)$ получим из (40) дифференцированием по переменной u, поскольку $u=u^0$ обеспечивает минимум левой части (40), а именно

$$\left.\left[\left(\frac{\partial v^0}{\partial \varphi}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^{\mathrm{T}}\right]\right|_{u=u_k^0} = 0, \tag{41}$$

где $\frac{\partial a}{\partial u}$ — $m\times r$-матрица Якоби, составленная из элементов $\left\{\frac{\partial a_n}{\partial u_s}, n=\overline{1,m}, s=\overline{1,r}\right\}$; $\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)\equiv\left(\frac{\partial W}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial W}{\partial u_r}\right)$, $k\geq 0$.

Замечание 3. Методика доказательства теоремы 1 обобщает доказательство соответствующей теоремы 2.1 об оптимальной стабилизации стохастической системы для непрерывной траектории [10]. Это объясняется тем, что, несмотря на разрывные траектории марковских процессов $\{x(t), \xi(t), \eta_k\}$, имеет место стохастическая непрерывность пары $\{x(t), \xi(t)\}$ $\forall\, t\in[t_k, t_{k+1}]$, $k>k_0\geq 0$, обеспечивающая непрерывность по t функции $v_t\equiv \boldsymbol{E}\{v(t, \xi(t), \varphi_t, \eta_k)|\ t_0, y_0, \varphi_0, h\}$ $\forall\, t\in[t_k, t_{k+1})$.

Замечание 4. Уравнение (41), из которого находят оптимальное управление $u_k(t)\in \boldsymbol{R}^r$ $\forall\, t\in[t_k, t_{k+1}]$, $k=0,1,2,\ldots$, по форме совпадает с $u(t)$, возникающим в детерминированных задачах оптимальной стабилизации [11–13], ввиду чего создается впечатление, что не учитывается случайных изменений структуры системы. Действительно, случайные $\xi(t)$ и η_k, $k>k_0\geq 0$, существенно влияют на уравнение (40), а следовательно, оптимальные управления $u^0(t, y, \varphi, h)$ и $v^0(t, y, \varphi, h)$ находятся из (40) и (41), в которых учитываются все возможные скачки процесса $\{x(t), \xi(t), \eta_k\}$.

Замечание 5. Задача оптимальной стабилизации согласно теореме 1 заключается в решении сложной нелинейной системы уравнений (41) в частных производных Фреше для определения неизвестных функционалов Ляпунова–Красовского $v_{ik}^0\equiv v_k^0(y, \varphi, h)$, $i=\overline{1,l}$, $k\geq k_0$.

Отметим, что эта система получается исключением управления $u_k^0=u^0(y, \varphi, h)$ из уравенений (40), (41). Решение такой системы, даже при наличии современной компьютерной техники и технологий, достаточно сложное. Поэтому результат этой работы имеет скорее теоретический характер. Что касается нелипшецевых систем, то результаты по аппроксимации решений можно найти в работах [25, 26].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. — М.: Наука, 1992. — 336 с.
2. Беллман Р. Динамическое программирование / Пер. с англ. В.Я. Катковника. — М.: ИЛ, 1960. — 400 с.
3. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977. — 352 с.
4. Гихман И.И, Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. — К.: Наук. думка, 1977. — 252 с.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. — К.: Наук. думка, 1982. — 612 с.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы / Пер. с англ. Л.И. Головиной и Б.С. Митягина под. ред. А. Г. Костюченко. — М.: ИЛ, 1962. — Т.1. — 895 с.
7. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1969. — 859 с.
8. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2 т. — М.: Физматгиз, 1994. — Т. 1. — 544 с.
9. Казаков Н.Е., Артемьев В.М. Оптимизация динамических систем случайной структуры. — М.: Наука, 1980. — 382 с.
10. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. — Екатеринбург: УГАПС, 1998. — 222 с.
11. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Наука, 1969. — 212 с.
12. Красовский Н.Н., Летов А.М. К теории аналитического конструирования регуляторов // Автоматика и телемеханика. — 1962. — № 6. — С. 11–18.
13. Красовский Н.Н., Лидский Э.А. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами // Автоматика и телемеханика. — 1961. — **22**, № 9. — С. 1145–1150; № 10. — С. 1273–1278; № 11. — С. 1425–1431.
14. Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление. — М. : Мир, 1969. — 200 с.
15. Липцер Р.А., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. — М.: Наука, 1986. — 483 с.
16. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1987. — 328 с.
17. Свердан М.Л. , Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем. — Снятин: Над Прутом, 1996. — 448 с.
18. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
19. Ясинский В.К., Ясинский Е.В. Задачи устойчивости и стабилизации стохастически динамических систем с конечным последействием. — Киев: ТВіМС, 2005. — 578 с.
20. Ясинський В.К., Ясинський Є.В, Юрченко І.В. Стабілизація у динамічних системах випадкової структури. — Чернівці: Золоті литаври, 2011. — 738 с.
21. Bertram J.E., Sarachik P.E. Stability of circuits with randomly time-varying parameters // Proc. of Intern. Symp. on Circuits and Inform. Theory. Los-Angeles, Calift., IRE Transactions. 1959. CT — **6**. — P. 260–270.
22. Ясинський В.К. , Королюк В.С. Теорія ймовірностей. Комп'ютерний практикум. — Чернівці: Золоті литаври, 2011. — 487 с.
23. Ясинський В.К., Юрченко І. В., Ясинська Л.І. Методи стохастичного моделювання систем. — Чернівці: Прут, 2002. — 416 с.
24. Ясинський В.К. Сучасна теорія випадкових процесів. — Чернівці: Видавничий дім «Родовід», 2014. — 292 с.
25. Зубченко В.П., Мішура Ю.С. Швидкість збіжності у схемі Ейлера для стохастичних диференціальних рівнянь із неліпшицевою дифузією та пуассонівською мірою // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 1. — С. 40–60.

26. С о к о л о в с к а я Е . В . Об аппроксимации сверху дифференциальных включений с нелипшицевой правой частью // Вестник СамГУ — естественнонаучная серия. — 2002. — № 2 (24), — С. 39–47.

Надійшла до редакції 16.06.2015

В.К. Ясинський, Б.В. Савчук, С.М. Козир

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В ДИФУЗІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ ІТО З МАРКОВСЬКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ТА ЗОВНІШНІМИ МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ

Анотація. Другим методом Ляпунова–Красовського одержано достатні умови асимптотичної стохастичної стійкості в цілому, стійкості в цілому, експоненціальної стійкості в средньому квадратичному тривіального розв'язку систем стохастичних дифузійних диференціально-функціональних рівнянь з марковськими перемиканнями, а також проілюстровано теорію на двох модельних задачах.

Ключові слова: стохастична динамічна система, система з післядією, марковське збурення.

V.K. Yasinskyy, B.W. Savchuk, S.M. Kozyr

OPTIMAL CONTROL IN DIFFUSION STOCHASTIC NONLINEAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL ITO EQUATIONS WITH MARKOV PARAMETERS AND EXTERNAL MARKOVIAN SWITCHING

Abstract. The Lyapunov–Krasovskii second method is used to obtain the sufficient conditions for asymptotic stochastic stability on the whole, global stability, the stability in mean of trivial solutions of systems of stochastic diffusion functional-differential equations with Markov switching, and the theory is illustrated using two model problems.

Keywords: stochastic dynamical system, system with aftereffect, Markov perturbation.

Ясинский Владимир Кириллович,
доктор физ.-мат. наук, профессор Черновицкого национального университета имени Юрия Федьковича, e-mail: yasinsk@list.ru.

Савчук Богдан Васильевич,
аспирант Черновицкого национального университета имени Юрия Федьковича, e-mail: sbohdanv@gmail.com.

Козырь Сергей Михайлович,
старший преподаватель Донецкого национального университета, Винница, e-mail: s.trump@gmail.com.