ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.02.003
УДК 517.956.223

Т.М. Касіренко

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: kasirenko@imath.kiev.ua

Загальні еліптичні крайові задачі у просторах Хермандера—Ройтберга

Представлено академіком НАН України А.М. Самойленком

Доведено теореми про характер розв'язності і регулярність розв'язків загальних еліптичних крайових задач у гільбертових просторах Хермандера, модифікованих за Ройтбергом. Для цих просторів показниками регулярності служать довільне дійсне число і досить загальна вагова функція частотних змінних.

Ключові слова: *еліптична задача, простір Хермандера, RO-змінна функція, фредгольмів оператор, апріорна оцінка, регулярність розв'язку.*

У теорії загальних еліптичних крайових задач важливе місце належить теоремам про повний набір ізоморфізмів, який породжують ці задачі на підходящих парах нормованих функціональних просторів, побудованих на основі просторів Соболєва довільного дійсного порядку. Такі теореми були доведені Ж.-Л. Ліонсом, Е. Мадженесом і Я.А. Ройтбергом у 60—70-х роках минулого століття і знайшли важливі застосування (див. [1, 2]). Втім для низки задач математичного аналізу і теорії рівнянь з частинними похідними шкала соболєвських просторів є недостатньо тонко градуйованою за допомогою числового параметра [3, 4]. У цьому зв'язку Л. Хермандер [3, п. 2.2] ввів і дослідив широкі класи нормованих просторів, для яких показником регулярності служить не число, а досить загальна вагова функція, залежна від частотних змінних. Недавно В.А. Михайлець і О.О. Мурач [4] побудували теорію розв'язності еліптичних крайових задач у гільбертових ізотропних просторах Хермандера, що утворюють уточнену соболєвську шкалу. Ці простори параметризовані дійсним числом s і функцією φ, повільно змінною на нескінченності за Караматою. Вона уточнює основну регулярність, задану дійсним числом. Одним із центральних результатів цієї теорії є теорема про повний набір ізоморфізмів, породжений регулярною еліптичною крайовою задачею на парах просторів Хермандера, модифікованих за Ройтбергом [4, п. 4.2.3].

Мета даної роботи — доповнити зазначену теорію теоремами про характер розв'язності і регулярність розв'язків загальних (взагалі кажучи, нерегулярних) еліптичних крайових задач у просторах Хермандера—Ройтберга з довільним дійсним показником s. Серед отриманих результатів — теорема про повний набір ізоморфізмів, породжений цими задачами у вказаних просторах. Відзначимо, що в роботі розглядаються еліптичні задачі, для яких порядки крайових умов можуть бути рівними або більшими, ніж порядок відповідного еліптичного рівняння. Крім того, показник φ пробігає більш широкий клас функціональних параметрів, ніж в [4, п. 4.2].

1. Постановка задачі. Нехай Ω — обмежена область в $\mathbf{R}^n$, де $n \geqslant 2$. Припускаємо, що її межа $\Gamma := \partial\Omega$ є замкненим (тобто компактним і без краю) многовидом класу C^∞ вимірності $n-1$, причому C^∞-структура на Γ індукована евклідовим простором $\mathbf{R}^n$.

В області Ω розглядаємо крайову задачу вигляду

$$Au = f \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$B_j u = g_j \text{ на } \Gamma, \quad j = 1, \ldots, q. \tag{2}$$

Тут $A := A\,(x, D)$ — лінійний диференціальний оператор на $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$ довільного парного порядку $2q \geqslant 2$, а кожне $B_j := B_j(x, D)$ — лінійний крайовий диференціальний оператор на Γ довільного порядку $m_j \geqslant 0$. Усі коефіцієнти цих операторів є комплекснозначними нескінченно диференційовними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно. Тому розглядатимемо комплексні функціональні простори. Можливий випадок, коли $m := \max\{m_1, \ldots, m_q\} \geqslant 2q$. У зв'язку з цим покладемо $r := \max\{2q, m+1\}$.

Припускаємо, що крайова задача (1), (2) є еліптичною в області Ω, тобто диференціальний оператор A є правильно еліптичним на $\overline{\Omega}$, а набір крайових диференціальних операторів $B := (B_1, \ldots, B_q)$ задовольняє умову Лопатинського щодо A на Γ [5, п. 1.2].

Пов'яжемо із задачею (1), (2) лінійне відображення $u \mapsto (Au, Bu)$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. У роботі досліджуються властивості продовження за неперервністю цього відображення в підходящих парах гільбертових просторів Хермандера, модифікованих за Ройтбергом.

Для опису області значень цього продовження нам потрібна така спеціальна формула Гріна [6, формула (4.1.10)]:

$$(Au, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{r-2q} (D_\nu^{j-1} Au, w_j)_\Gamma + \sum_{j=1}^{q} (B_j u, h_j)_\Gamma =$$

$$= (u, A^+ v)_\Omega + \sum_{k=1}^{r} \left(D_\nu^{k-1} u, K_k v + \sum_{j=1}^{r-2q} R_{j,k}^+ w_j + \sum_{j=1}^{q} Q_{j,k}^+ h_j \right)_\Gamma$$

для довільних функцій $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $w_1, \ldots, w_{r-2q}, h_1, \ldots, h_q \in C^\infty(\Gamma)$. Тут $D_\nu := i\partial / \partial_\nu$, де i — уявна одиниця, а ν — орт внутрішньої нормалі до межі Γ області Ω, та через $(\cdot,\cdot)_\Omega$ і $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ позначено скалярні добутки в гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ функцій, квадратично інтегровних на Ω і Γ відповідно, а надалі й розширення цих скалярних добутків за неперервністю. Як звичайно, A^+ позначає диференціальний оператор, формально спряжений до A. Крім того, усі $R_{j,k}^+$ і $Q_{j,k}^+$ є дотичними диференціальними операторами, формально спряженими відповідно до лінійних дотичних диференціальних операторів $R_{j,k} := R_{j,k}(x, D_\tau)$ і $Q_{j,k} := Q_{j,k}(x, D_\tau)$ відносно $(\cdot,\cdot)_\Gamma$. Останні взято із зображення крайових диференціальних операторів $D_\nu^{j-1} A$ і B_j у вигляді

$$D_{\nu}^{j-1}A(x,D)=\sum_{k=1}^{r}R_{j,k}(x,D_{\tau})D_{\nu}^{k-1},\quad B_{j}(x,D)=\sum_{k=1}^{r}Q_{j,k}(x,D_{\tau})D_{\nu}^{k-1}.$$

Відмітимо, що $\operatorname{ord}R_{j,k}\leqslant 2q+j-k$ і $\operatorname{ord}Q_{j,k}\leqslant m_j-k+1$, причому, звісно, $R_{j,k}=0$ при $k\geqslant 2q+j+1$ і $Q_{j,k}=0$ при $k\geqslant m_j+2$. Нарешті, кожне $K_k:=K_k(x,D)$ — деякий лінійний крайовий диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord}K_k\leqslant 2q-k$ з коефіцієнтами класу $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Якщо $r=2q$, то в розглянутій формулі Гріна і пов'язаних з нею формулах відсутні функції $w_1,\ldots,w_{r-2q}$ і суми з індексом підсумовування j, що пробігає значення від 1 до $r-2q$.

Беручи до уваги цю спеціальну формулу Гріна, розглянемо в області Ω таку крайову задачу:

$$A^{+}v=\omega \text{ в } \Omega, \tag{3}$$

$$K_k v+\sum_{j=1}^{r-2q}R_{j,k}^{+}w_j+\sum_{j=1}^{q}Q_{j,k}^{+}h_j=\theta_k \text{ на } \Gamma,\quad k=1,\ldots,r. \tag{4}$$

Вона містить $r-q$ додаткових невідомих функцій $w_1,\ldots,w_{r-2q},h_1,\ldots,h_q$ у крайових умовах. Ця задача є формально спряженою до задачі (1), (2) відносно розглянутої формули Гріна. Зауважимо, що крайова задача (1), (2) еліптична тоді і тільки тоді, коли формально спряжена задача (3), (4) еліптична ([6, теорема 4.1.1]).

2. Простори Хермандера та їх модифікації за Ройтбергом. Означимо спочатку клас RO, до якого належать функціональні параметри, що служать показниками регулярності для просторів Хермандера, використаних у роботі. За означенням, клас RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi:[1,\infty)\to(0,\infty)$, для яких існують числа $b>1$ і $c\geqslant 1$ такі, що $c^{-1}\leqslant\varphi(\lambda t)/\varphi(t)\leqslant c$ для довільних $t\geqslant 1$ і $\lambda\in[1,b]$ (числа b і c можуть залежати від φ). Такі функції називають RO-змінними (або OR-змінними) на нескінченності. Клас RO введений В.Г. Авакумовичем у 1936 р. та достатньо вивчений (див., наприклад, [7, додаток 1]).

Надалі важлива така властивість класу RO [7, с. 88]: для кожної функції $\varphi\in\mathrm{RO}$ існують числа $s_0,s_1\in\mathbf{R}$, $s_0\leqslant s_1$, і $c_0,c_1>0$ такі, що

$$c_0\lambda^{s_0}\leqslant\varphi(\lambda t)/\varphi(t)\leqslant c_1\lambda^{s_1} \text{ для всіх } t\geqslant 1,\quad \lambda\geqslant 1. \tag{5}$$

Позначимо через $\sigma_0(\varphi)$ точну верхню грань множини всіх чисел $s_0\in\mathbf{R}$, для яких виконується ліва нерівність у формулі (5). Крім того, позначимо через $\sigma_1(\varphi)$ точну нижню грань множини всіх чисел $s_1\in\mathbf{R}$, для яких виконується права нерівність в (5). Числа $\sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi)$ є відповідно нижнім і верхнім індексами Матушевської функції $\varphi\in\mathrm{RO}$. Звісно, $-\infty<\sigma_0(\varphi)\leqslant\sigma_1(\varphi)<\infty$.

Позначимо через RO_0 клас усіх функцій $\varphi\in\mathrm{RO}$ таких, що $\sigma_0(\varphi)=\sigma_1(\varphi)=0$. Відзначимо, що до класу RO_0 належить будь-яка неперервна функція $\varphi:[1,\infty)\to(0,\infty)$, повільно змінна на нескінченності за Караматою, зокрема, кожна функція вигляду $\varphi(t)=(\ln t)^{r_1}\times(\ln\ln t)^{r_2}\ldots(\ln\ldots\ln t)^{r_k}$ при $t>>1$, де $k\in\mathbf{N}$ і $r_1,\ldots,r_k\in\mathbf{R}$ довільні.

Нехай $s \in \mathbf{R}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}_0$. Лінійний простір Хермандера $H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^n)$, де $n \geqslant 1$, складається з усіх повільно зростаючих на $\mathbf{R}^n$ розподілів таких, що їх перетворення Фур'є $\hat{w}$ локально інтегровне за Лебегом на $\mathbf{R}^n$ і задовольняє умову

$$\| w \|^2_{H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^n)} := \int_{\mathbf{R}^n} \langle \xi \rangle^{2s} \varphi^2(\langle \xi \rangle) \, | \hat{w}(\xi) |^2 d\xi < \infty ;$$

тут $\langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ — згладжений модуль вектора $\xi \in \mathbf{R}^n$. Простір $H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^n)$ гільбертів і сепарабельний відносно норми $\| \cdot \|_{H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^n)}$. Зазначимо, що в роботі розподіли трактуються як *анти*лінійні неперервні функціонали на відповідному просторі пробних функцій. Множина $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ пробних фінітних функцій є щільною в $H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^n)$.

Простір $H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^n)$ є ізотропним гільбертовим випадком простору $\mathcal{B}_{p,k}$, введеного і дослідженого Л. Хермандером [3, п. 2.2]. А саме: $H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{B}_{2,k}$, якщо $k(\xi) = \langle \xi \rangle^s \varphi(\langle \xi \rangle)$ для довільного $\xi \in \mathbf{R}^n$. Зауважимо, що в гільбертовому випадку $p = 2$ простори Хермандера збігаються з просторами, введеними Л.Р. Волевичем і Б.П. Панеяхом [8, §2].

Аналоги простору $H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^n)$ для Ω і Γ означаються у стандартний спосіб; тепер $n \geqslant 2$. А саме: простір $H^{s,\varphi}(\Omega)$ складається, за означенням, зі звужень в область Ω усіх розподілів $w \in H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^n)$ і наділений нормою

$$\| u \|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} := \inf \left\{ \| w \|_{H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^n)} : w \in H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^n), w = u \quad \text{в} \quad \Omega \right\}.$$

Простір $H^{s,\varphi}(\Omega)$ гільбертів і сепарабельний; множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в ньому.

Лінійний простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ складається, коротко кажучи, з усіх розподілів на Γ, які в локальних координатах дають елементи простору $H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^{n-1})$. Дамо детальне означення. Нехай довільним чином вибрано скінченний атлас із C^∞-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\pi_j : \mathbf{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, p$. Тут відкриті множини $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p\}$ складають покриття многовиду Γ. Нехай також функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, p$, утворюють розбиття одиниці на Γ, що задовольняє умову $\operatorname{supp} \chi_j \subset \Gamma_j$. За означенням, лінійний простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів h на Γ таких, що $(\chi_j h) \circ \pi_j \in H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^{n-1})$ для кожного $j \in \{1, \ldots, p\}$. Тут $h_j := (\chi_j h) \circ \pi_j$ є зображенням розподілу h у локальній карті π_j. У просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ задана норма

$$\| h \|_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} := (\| h_1 \|^2_{H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^{n-1})} + \ldots + \| h_p \|^2_{H^{s,\varphi}(\mathbf{R}^{n-1})})^{1/2}.$$

Цей простір гільбертів і сепарабельний відносно заданої в ньому норми та з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці на Γ [4, теорема 2.31]. Множина $C^\infty(\Gamma)$ щільна в $H^{s,\varphi}(\Gamma)$.

Клас функціональних просторів $\left\{ H^{s,\varphi}(G) : \quad s \in \mathbf{R}, \quad \varphi \in \mathrm{RO}_0 \right\}$, де $G \in \{\mathbf{R}^n, \Omega, \Gamma\}$, є частиною розширеної соболєвської шкали на G і містить у собі уточнену соболєвську шкалу. Ці шкали були введені і досліджені В.А. Михайлецем і О.О. Мурачем [4, 9, 10]. Якщо $\varphi(\cdot) \equiv 1$, то $H^{s,\varphi}(G)$ стає гільбертовим простором Соболєва $H^s(G)$ порядку $s \in \mathbf{R}$. У загальній ситуації, $H^{s+\varepsilon}(G) \subset H^{s,\varphi}(G) \subset H^{s-\varepsilon}(G)$ для довільного числа $\varepsilon > 0$. Ці вкладення неперервні та щільні, а якщо $G \in \{\Omega, \Gamma\}$, то і компактні. Вони показують, що числовий параметр s характеризує основну регулярність розподілів з $H^{s,\varphi}(G)$, а функціональний параметр φ її уточнює.

Для кожного натурального числа k означимо гільбертів простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$, який є модифікацією за Ройтбергом простору $H^{s,\varphi}(\Omega)$. У соболєвському випадку, коли $\varphi(\cdot)\equiv 1$, ця модифікація була введена Я.А. Ройтбергом [11], а у випадку, коли функція φ є повільно змінною на нескінченності за Караматою, — В.А. Михайлецем і О.О. Мурачем [12] (див. також [2, п. 2.1] і [4, п. 4.2.2]).

Попередньо потрібно означити простір $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$. Якщо $s\geqslant 0$, то покладемо $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega):=$ $:=H^{s,\varphi}(\Omega)$. Якщо $s<0$, то простір $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ є, за означенням, поповненням лінійного многовиду $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ за гільбертовою нормою

$$\|u\|_{H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)}:=\{\,|(u,w)_{\Omega}|\cdot\|w\|^{-1}_{H^{-s,1/\varphi}(\Omega)}: w\in H^{-s,1/\varphi}(\Omega),\quad w\neq 0\}.$$

Нехай тепер $k\in\mathbf{N}$ і $E_k:=\{j-1/2: j\in\mathbf{N},\quad j\leqslant k\}$. Якщо $s\in\mathbf{R}\setminus E_k$, то простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ є, за означенням, поповненням лінійного многовиду $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ за гільбертовою нормою

$$\|u\|_{H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)}:=(\|u\|^2_{H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)}+\sum_{j=1}^{k}\|(D_{\nu}^{j-1}u)\,|\,\Gamma\|^2_{H^{s-j+1/2,\varphi}(\Gamma)})^{1/2}.$$

Якщо $s\in E_k$, то простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ є, за означенням, результатом інтерполяції з параметром 1/2 пари гільбертових просторів $H^{s-\varepsilon,\varphi,(k)}(\Omega)$ і $H^{s+\varepsilon,\varphi,(k)}(\Omega)$, де $0<\varepsilon<1$. Цей простір гільбертів і не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору числа ε.

Для кожного цілого $k\geqslant 0$ гільбертів простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ сепарабельний, і множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна у ньому. Якщо $s>k-1/2$, то $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)=H^{s,\varphi}(\Omega)$ з точністю до еквівалентності норм. У випадку, коли $\varphi(\cdot)\equiv 1$, будемо пропускати індекс φ у позначеннях просторів, введених у роботі. Виконуються компактні та щільні вкладення $H^{s+\varepsilon,(k)}(\Omega)\subset$ $\subset H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)\subset H^{s-\varepsilon,(k)}(\Omega)$ для довільного числа $\varepsilon>0$.

Простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$, де $k\in\mathbf{N}$, називаємо простором Хермандера—Ройтберга, а у випадку $\varphi(\cdot)\equiv 1$ — простором Соболєва—Ройтберга.

3. Результати. Позначимо через N множину всіх розв'язків $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ задачі (1), (2) у випадку, коли $f=0$ на Ω і кожне $g_j=0$ на Γ. Крім того, позначимо через N_* множину всіх розв'язків $(v,w_1,\ldots,w_{r-2q},h_1,\ldots,h_q)$ класу $C^{\infty}(\overline{\Omega})\times(C^{\infty}(\Gamma))^{r-q}$ формально спряженої задачі (3), (4) у випадку, коли $\omega=0$ на Ω і кожне $\theta_k=0$ на Γ. Оскільки обидві задачі еліптичні в Ω, то простори N і N_* скінченновимірні [6, наслідок 4.1.1].

Теорема 1. *Для будь-яких $s\in\mathbf{R}$ і $\varphi\in\mathrm{RO}_0$ відображення $u\mapsto(Au,Bu)$, де $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$(A,B): H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)\to\mathbf{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) \tag{6}$$

Тут

$$\mathbf{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma):=H^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{q}H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma).$$

Цей оператор нетерів. Його ядро дорівнює N, а область значень складається з усіх векторів $(f,g):=(f,g_1,\ldots,g_q)\in\mathbf{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$ таких, що

$$(f,v)_{\Omega}+\sum_{j=1}^{r-2q}(D_{\nu}^{j-1}f,w_j)_{\Gamma}+\sum_{j=1}^{q}(g_j,h_j)_{\Gamma}=0$$

для кожного $(v,w_1,\ldots,w_{r-2q},h_1,\ldots,h_q)\in N_*$. *Індекс оператора (6) дорівнює* $\dim N-\dim N_*$ *та не залежить від* s *і* φ.

Нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T:E_1\to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називають нетеровим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $E_2/T(E_1)$ скінченновимірні. Якщо цей оператор нетерів, то його область значень замкнена в просторі E_2, а індекс $\operatorname{ind}T:=\dim\ker T-\dim(E_2/T(E_1))$ скінченний.

Зауважимо, що у випадку $s>r-1/2$ обмежений нетерів оператор (6) діє в (немодифікованих) просторах Хермандера.

Якщо $N=\{0\}$ і $N_*=\{0\}$, то оператор (6) здійснює ізоморфізм між просторами $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ і $\mathbf{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$. У загальній ситуації цей оператор породжує ізоморфізм між деякими їх підпросторами скінченної ковимірності. Останні виділяємо за допомогою деяких косих проекторів. Розглянемо розклад простору $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ у пряму суму скінченновимірного підпростору N і підпростору, який складається з усіх векторів $u\in H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ таких, що $(Tu,\omega)_{\Omega}=0$ для довільного $\omega\in N$. Тут лінійний обмежений оператор $T:H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)\to$ $\to H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ є продовженням за неперервністю тотожного відображення, заданого на $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Позначимо через P проектор простору $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ на останній підпростір паралельно N. Крім того, існує простір $G\subset C^{\infty}(\overline{\Omega})\times(C^{\infty}(\Gamma))^q$, незалежний від s і φ, такий, що $\dim G=\dim N_*$ і $\mathbf{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$ є прямою сумою скінченновимірного підпростору G і області значень оператора (6). (Якщо $m\leqslant 2q-1$, то можна узяти $G:=N_*$). Позначимо через Q проектор простору $\mathbf{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$ на цю область значень паралельно підпростору G. Проектори P і Q не залежать від s і φ.

Теорема 2. *Для довільних* $s\in\mathbf{R}$ *і* $\varphi\in\mathrm{RO}_0$ *звуження відображення* (6) *на підпростір* $P(H^{s,\varphi,(r)}(\Omega))$ *є ізоморфізмом цього підпростору на* $Q(\mathbf{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma))$.

Цей результат є теоремою про повний набір ізоморфізмів, породжених еліптичною крайовою задачею (1), (2) у просторах Хермандера—Ройтберга.

Дослідимо локальну регулярність узагальнених розв'язків еліптичної крайової задачі (1), (2) у цих просторах. Спочатку дамо означення такого розв'язку. Для цілого $k\geqslant 0$ позначимо через $H^{-\infty,(k)}(\Omega)$ об'єднання усіх просторів $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$, де $s\in\mathbf{R}$ і $\varphi\in\mathrm{RO}_0$. Аналогічно позначимо через $\mathbf{H}^{-\infty,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$ об'єднання усіх просторів $\mathbf{H}^{l,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$, де $l\in\mathbf{R}$ і $\varphi\in\mathrm{RO}_0$. За теоремою 1, для довільного вектора $(f,g)\in\mathbf{H}^{-\infty,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$ існує елемент $u\in H^{-\infty,(r)}(\Omega)$ такий, що $(A,B)u=(f,g)$. Цей елемент називаємо узагальненим розв'язком (у сенсі Я.А. Ройтберга) крайової задачі (1), (2).

Нехай V — відкрита множина в $\mathbf{R}^n$ така, що $\Omega_0:=\Omega\cap V\neq\varnothing$; покладемо $\Gamma_0:=\Gamma\cap V$. Позначимо через $H^{s,\varphi,(r)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ лінійний простір усіх елементів $u\in H^{-\infty,(r)}(\Omega)$ таких, що $\chi u\in H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ для кожної функції $\chi\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\Omega_0\cup\Gamma_0$. Аналогічно позначимо через $\mathbf{H}^{l,\varphi,(r-2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ лінійний простір усіх векторів $(f,g)\in\mathbf{H}^{-\infty,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$ таких, що $\chi(f,g)\in\mathbf{H}^{l,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$ для кожної вказаної функції χ.

Теорема 3. *Припустимо, що елемент* $u\in H^{-\infty,(r)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі (1), (2), праві частини якої задовольняють умову* $(f,g)\in\mathbf{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ *для деяких параметрів* $s\in\mathbf{R}$ *і* $\varphi\in\mathrm{RO}_0$. *Тоді* $u\in H^{s,\varphi,(r)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$.

У випадку, коли $\varphi(\cdot)\equiv 1$, теореми 1—3 встановлені Я.А. Ройтбергом [11] для регулярних еліптичних крайових задач та ним і Ю.В. Костарчуком [13—15] для нерегулярних еліптичних крайових задач. Їх доведення наведено також Я.А. Ройтбергом у [2, розд. 4, 7]. У вказаних роботах не була використана формальна спряжена крайова задача (3), (4) для опису області значень оператора (6); пізніше це було зроблено в [6, п. 3.4, 4.1]. У випадку, коли функція φ повільно змінна на нескінченності за Караматою, а еліптична крайова задача (1), (2) регулярна, ці теореми встановлені В.А. Михайлецем і О.О. Мурачем [12] (див. також [4, п. 4.2]).

4. Обґрунтування результатів. Нехай $s\in\mathbf{R}$ і $\varphi\in\mathrm{RO}_0$. Теорему 1 виводимо з випадку $\varphi(\cdot)\equiv 1$ за допомогою інтерполяції з функціональним параметром пар просторів Соболєва—Ройтберга. А саме: виберемо число $\varepsilon>0$ таке, що виконується хоча б одна з нерівностей $s-\varepsilon>r-1/2$ і $s+\varepsilon<r+1/2$. На підставі [2, теорема 4.1.3] маємо нетерові обмежені оператори $(A,B):H^{s\mp\varepsilon,(r)}(\Omega)\to\mathbf{H}^{s\mp\varepsilon-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$. Вони є продовженням за неперервністю відображення $u\mapsto(Au,Bu)$, де $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Нехай $\psi(t):=t^{1/2}\varphi(t^{1/(2\varepsilon)})$ при $t\geqslant 1$ та $\psi(t):=\varphi(1)$ при $0<t<1$. Функціональний параметр ψ інтерполяційний [4, теорема 1.9]. Застосувавши інтерполяцію з параметром ψ до цих операторів і скориставшись [4, теорема 1.7], отримаємо нетерів обмежений оператор

$$(A,B):[H^{s-\varepsilon,(r)}(\Omega),H^{s+\varepsilon,(r)}(\Omega)]_{\psi}\to[\mathbf{H}^{s-\varepsilon-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma),\mathbf{H}^{s+\varepsilon-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)]_{\psi}.$$

Тут через $[X_0,X_1]_{\psi}$ позначено гільбертів простір, який є результатом інтерполяції з параметром ψ пари гільбертових просторів X_0 і X_1 (див., наприклад, [4, п. 1.1.1]). Скориставшись узагальненням теореми 4.22 з [4] на випадок $\varphi\in\mathrm{RO}_0$, робимо висновок, що простори, у яких діє останній оператор, збігаються з точністю до еквівалентності норм з відповідними просторами, що фігурують у (6). Це узагальнення доводиться аналогічно випадку, розглянутому в щойно цитованій роботі. Отже, маємо обмежений нетерів оператор (6). Інші його властивості, вказані у теоремі 1, випливають на підставі [4, теорема 1.7] з відомих властивостей оператора (A,B) у просторах Соболєва—Ройтберга.

Теорему 2 виводимо з теореми 1, згідно з якою відображення $u\mapsto(Au,Bu)$ є бієктивним обмеженим оператором на парі підпросторів $P(H^{s,\varphi,(r)}(\Omega))$ і $Q(\mathbf{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma))$. Тому він є ізоморфізмом за теоремою Банаха про обернений оператор. При цьому вказаний перед теоремою 2 розклад простору $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ обґрунтовується подібно до доведення формули (4.90) з [4], а зазначений розклад простору $\mathbf{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$ виводиться з леми Гохберга—Крейна [5, лема 2.4.4].

Теорему 3 спочатку доводимо у випадку, коли $\Omega_0=\Omega$ і $\Gamma_0=\Gamma$. Припустимо, що u і (f,g) задовольняють її умову у цьому випадку. Оскільки $(f,g)\in Q(\mathbf{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma))$, то, за теоремою 2, існує розв'язок $u'\in P(H^{s,\varphi,(r)}(\Omega))$ крайової задачі $(A,B)u'=(f,g)$. Тому $u-u'\in N$; отже, $u\in H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$. У загальній ситуації теорема 3 виводиться з цього випадку за допомогою міркувань, подібних до доведення теореми 7.2.1 з [2].

Автор висловлює вдячність О.О. Мурачу за керівництво роботою.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Москва: Мир, 1971. 372 с.
2. Roitberg Ya.A. Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1996. x+414 p.

3. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва: Мир, 1965. 380 с.
4. Mikhailets V.A., Murach A.A. Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. Berlin, Boston: De Gruyter, 2014. xii+297 p.
5. Agranovich M.S. Elliptic boundary problems. *Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Partial differential equations, IX*. Berlin: Springer, 1997. P. 1—144.
6. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J. Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. Providence: Amer. Math. Soc., 1997. x+414 p.
7. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Москва: Наука, 1985. 144 с.
8. Волевич Л.Р., Панеях Б.П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. *Успехи мат. наук*. 1965. **20**, № 1. С. 3-74.
9. Михайлец В.А., Мурач А.А. Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II. *Укр. мат. журн*. 2006. **58**, № 3. С. 352—370.
10. Михайлец В. А., Мурач А. А. Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы. *Укр. мат. журн*. 2013. **65**, № 3. С. 368—380.
11. Ройтберг Я.А. Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений. *Докл. АН СССР*. 1964. **157**, № 4. С. 798—801.
12. Михайлец В.А., Мурач А.А. Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств. *Укр. мат. журн*. 2008. **60**, № 4. С. 497—520.
13. Ройтберг Я.А. Теоремы о гомеоморфизмах и формула Грина для общих эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными. *Мат. сборник*. 1970. **83**, № 2. С. 181—213.
14. Костарчук Ю.В., Ройтберг Я.А. Теореми про ізоморфізми для еліптичних граничних задач з граничними умовами, які не є нормальними. *Укр. мат. журн*. 1973. **25**, № 2. С. 271—277.
15. Костарчук Ю.В. Локальное повышение гладкости обощенных решений эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными. *Укр. мат. журн*. 1973. **25**, № 4. С. 536—540.

Надійшло до редакції 24.10.2017

REFERENCES

1. Lions, J.-L. & Magenes, E. (1972). Non-homogeneous boundary-value problems and applications. Vol. 1. New York, Heidelberg: Springer.
2. Roitberg, Ya. A. (1996). Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers.
3. Hörmander, L. (1963). Linear partial differential operators. Berlin: Springer.
4. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2014). Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. Berlin, Boston: De Gruyter.
5. Agranovich, M. S. (1997). Elliptic boundary problems. Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Partial differential equations, IX. Berlin: Springer.
6. Kozlov, V. A., Maz'ya, V. G. & Rossmann, J. (1997). Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. Providence: Amer. Math. Soc.
7. Seneta, E. (1976). Regularly varying functions. Berlin: Springer.
8. Volevich, L. R. & Paneah, B. P. (1965). Certain spaces of generalized functions and embedding theorems. Russ. Math. Surveys, 20, No. 1, pp. 1-73.
9. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2006). Refined scales of spaces and elliptic boundary-value problems. II. Ukr. Math. J., 58, No. 3, pp. 398-417.
10. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2013). Extended Sobolev scale and elliptic operators. Ukr. Math. J., 65, No. 3, pp. 435-447.
11. Roitberg, Ja. A. (1964). Elliptic problems with non-homogeneous boundary conditions and local increase of smoothness of generalized solutions up to the boundary. Soviet. Math. Dokl., 5, pp. 1034-1038.
12. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2008). An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces. Ukr. Math. J., 60, No. 4, pp. 574-597.
13. Roitberg, Ja. A. (1970). Homeomorphism theorems and Green's formula for general elliptic boundary value problems with boundary conditions that are not normal. Sb. Math., 12, No. 2, pp. 177-212.

14. Kostarchuk, Ju. V. & Roitberg, Ja. A. (1973). Isomorphism theorems for elliptic boundary value problems with boundary conditions that are not normal. Ukr. Math. J., 25, No. 2, 222-226.
15. Kostarchuk, Ju. V. (1973). Local increase of the smoothness of generalized solutions to elliptic boundary value problems with boundary conditions that are not normal. Ukr. Mat. Zh., 25, No. 4, 536–540 (in Russian).

Received 24.10.2017

Т.Н. Касиренко

Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: kasirenko@imath.kiev.ua

ОБЩИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
В ПРОСТРАНСТВАХ ХЕРМАНДЕРА—РОЙТБЕРГА

Доказаны теоремы о характере разрешимости и регулярности решений общих эллиптических краевых задач в гильбертовых пространствах Хермандера, модифицированных по Ройтбергу. Для этих пространств показателями регулярности служат произвольное действительное число и достаточно общая весовая функция частотных переменных.

Ключевые слова: *эллиптическая задача, пространство Хермандера, RO-меняющаяся функция, фредгольмов оператор, априорная оценка, регулярность решения.*

T.M. Kasirenko

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: kasirenko@imath.kiev.ua

GENERAL ELLIPTIC BOUNDARY-VALUE
PROBLEMS IN HÖRMANDER—ROITBERG SPACES

We prove theorems on the character of solvability and regularity of solutions of general elliptic boundary-value problems in Hilbert Hörmander spaces modified by Roitberg. An arbitrary real number and a sufficiently general weight function of frequency variables serve as the indices of regularity for these spaces.

Keywords: *elliptic problem, Hörmander space, RO-varying function, Fredholm operator, a priori estimate, regularity of a solution.*