34. Tomkus M. Identifying Business Models of Banks: Analysis of Biggest Banks from Europe and United States of America. - Aarhus University, Business and Social Sciences. – January 2014 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.pure.au.dk/portal-asb-student/files/69715984/be_apendixu.pdf

УДК 519.872:621.321.1

Л.А.Пономаренко,
С.М.Константінов,
Ю.Л.Пономаренко

МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ ОПТИМІЗАЦІЇ СИСТЕМ ТЕЛЕТРАФІКУ

МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ ОПТИМІЗАЦІЇ СИСТЕМ ТЕЛЕТРАФІКУ

Розглядаються класичні й нові методи теорії прийняття рішень, які дають змогу визначати оптимальні стратегії доступу в системах телетрафіку.

Ключові слова: *телетрафік, пріоритет, стратегія доступу.*

Рассматриваются классические и новые методы теории принятия решений, которые дают возможность определять оптимальные стратегии доступа в системах телетрафика.

Ключевые слова: *телетрафик, приоритет, стратегия доступа.*

Classic and modern decision making methods are considered, which enable to define optimal access strategies in teletraffic systems.

Keywords*: teletraffic, priority, access strategy.*

Вступ.

Поліпшення основних експлуатаційних характеристик традиційних і мультимедійних бездротових систем і мереж зв’язку є досить актуальним завданням, над вирішенням якого працює велика кількість дослідників. Існують різні постановки відповідних задач, розв’язування яких досягається, в основному, за рахунок вибору відповідних значень параметрів тієї стратегії доступу, яка використовується. Іншими словами, клас припустимих стратегій доступу визначається заздалегідь, і задача полягає у визначенні оптимальних (у певному сенсі) параметрів стратегії доступу.

Такий підхід до розв’язання названих задач звужує множину стратегій, серед яких визначається оптимальна стратегія доступу. Для розв’язання таких задач у більш широкому класі стратегій доцільно використати підхід марковських процесів прийняття рішень (МППР).

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Монографічне викладення основ класичної теорії МППР можна знайти в [1-3]. Принципи фазового укрупнення викладені в працях В.С.Королюка та його учнів [4-6]. Вони використані також у книзі [7] (розділ 3). Одержані там результати базуються на наступній гіпотезі: вважається, що фазовий простір станів (ФПС) початкового ланцюга розпадається на такі підмножини, що при будь-яких керуваннях імовірності переходів всередині підмножин суттєво перевищують імовірності переходів між станами, що входять до різних підмножин. На основі використання цих гіпотез розроблений наближений ієрархічний алгоритм оптимізації переходів між станами основного ланцюга, який дозволяє суттєво зменшити розмірність початкової оптимізаційної задачі.

Декомпозиційний підхід також використаний у роботі [8] для задач МППР, в яких твірна матриця початкового керованого ланцюга Маркова (ЛМ) має спеціальні структуру. Підхід до наближеного аналізу МППР у дещо інших модифікаціях раніше розглядався у роботах [9, 10]. Він в ідейному плані близький до роботи [11]. Огляд робіт за схожою тематикою можна також знайти в статтях [12-14].

Мета статті.

У системах телетрафіку, як правило, виклики (вимоги) відрізняються між собою як навантажувальними характеристикам, так і важливістю (терміновістю). Ця обставина робить актуальним дослідження моделей із різними дисциплінами обслуговування та різними видами пріоритетів для пошуку оптимальних значень керуючих параметрів, що є метою даної статті.

Постановка завдання.

Будь-яка пріоритетна дисципліна обслуговування в системах телетрафіку задає правила для (А) прийому виклику системою, (В) вибору типу виклику, який спрямовується на обслуговування при звільненні каналу, і (С) призначення каналу обслуговування. При цьому необхідність у визначенні правила С виникає у тих системах, де канали не ідентичні (наприклад, відрізняються один від іншого швидкістю обслуговування і/або вартістю включення й вартістю роботи за одиницю часу тощо).

Названі вище правила А - С реалізуються за допомогою запровадження пріоритетів двох типів: позасистемних (екзогенних) і внутрішньосистемних (ендогенних).

При використанні позасистемних пріоритетних дисциплін правила А – С визначаються на підставі певного заздалегідь розробленого регламенту і не враховують поточного стану системи, причому стан системи може оцінюватися і враховуватися різними способами. З точки зору зручності практичного використання кращими є пріоритети саме цього типу, які не потребують при їх реалізації особливих витрат на математичне забезпечення. Проте реальні системи телетрафіку функціонують в умовах невизначеності параметрів вхідних трафіків, що у багатьох випадках робить неможливим жорстке попереднє призначення пріоритетів. Ці обставини зробили актуальними питання вивчення моделей систем телетрафіку із внутрішньосистемними пріоритетами.

Основний матеріал.

Внутрішньосистемні пріоритети у системах телетрафіку можуть визначатися за такою схемою. Із кожним станом пов’язується скінчена множина припустимих рішень (управлінь) і кожному рішенню призначається певний параметр, який оцінює ймовірність прийняття даного рішення у поточному стані. Критерії якості у конкретних системах телетрафіку визначаються по-різному, виходячи із призначення систем. Разом із тим, актуальним є дослідження моделей із критерієм, що являє собою функціонал (лінійний чи нелінійний), який оцінює сумарні витрати (економічні, технічні), пов’язані із перебуванням систем у тих чи інших станах. У таких випадках для марковських моделей існує універсальний метод оцінювання таких функціоналів, який полягає у вираженні останніх через стаціонарні ймовірності станів. Це вдається завдяки унікальній властивості марковських систем, для яких стаціонарна ймовірність стану дорівнює частці часу перебування системи у відповідному стані протягом досить великого проміжку часу спостереження.

Тоді задача визначення оптимальних внутрішньосистемних пріоритетів полягає у виборі відповідних рішень у конфліктних станах, де є необхідність вибирати рішення із деякої скінченої чи нескінченої множини рішень. Таким чином, дослідження моделей марковських систем телетрафіку із внутрішньосистемними пріоритетами еквівалентне дослідженню деякої задачі МППР.

Сформулюємо один із можливих способів визначення МППР.

МППР із нескінченим горизонтом планування і без дисконтування вважається заданим, якщо визначені такі об’єкти:

1. Заданий ланцюг Маркова (ЛМ) зі скінченим фазовим простором станів $X := \{x_1, x_2,\ldots,x_N\}$ (будемо далі використовувати символ x_k, $k = 1,\ldots, N$, для позначення станів, а у формулах для позначення стану використовувати символ k).

2. Задана скінчена множина рішень D, $D := \bigcup_{k\in x} D_k$, де D_k – множина припустимих управлінь (рішень) у стані $x_k \in X$.

3. Задані ймовірнісний закон прийняття рішень $\alpha_k^d := \Pr\{\text{управління } d | \text{стані } x_k\}$ і відповідна йому перехідна матриця $P = \left\| p^d(k,k') \right\|$, де $p^d(k,k')$ - ймовірність переходу зі стану x_k у стан $x_{k'}$ при виборі у стані x_k управління $d \in D_k$. При цьому

$$\alpha_k^d \ge 0, \sum_{d\in D_k} \alpha_k^d = 1, \forall x_k \in X;$$

$$p^d(k,k') \geq 0, \quad \sum_{k' \in X} p^d(k,k') = 1, \forall x_k \in X, \forall d \in D_k.$$

4. Заданий вектор середніх втрат за один крок $C = (C_1, C_2, \ldots, C_N)$, де $C_k = \sum_{d \in D_k} c_k^d \alpha_k^d$.

Тут c_k^d - втрати за один крок, якщо у стані x_k прийняте управління $d \in D_k$, при цьому c_k^d – рівномірно обмежені величини; C_k – математичне сподівання втрат, пов'язаних із виходом зі стану x_k за один крок, $k = 1, \ldots, N$.

Задача оптимізації ЛМ формулюється так: потрібно знайти таку стратегію управління, щоб мінімізувати середні втрати за один крок:

$$W = \sum_{k \in X} C_k \xrightarrow[d \in D]{} \min. \tag{1}$$

Задача (1) розв'язується, як правило, при обмеженнях, що задаються траєкторіями відповідних марковських процесів і системами рівнянь рівноваги для визначення стаціонарних імовірностей $p(x_k)$, $x_k \in X$, з урахуванням управлінь $d \in D$. Відповідна їй задача лінійного програмування (ЛП) має вигляд:

$$W := \sum_{k,d} c_k^d x_k^d \to \min; \tag{2}$$

$$\sum_d x_{k'}^d - \sum_{k,d} p^d(k,k') x_k^d = 0, k' = 1,2,\ldots,N; \tag{3}$$

$$\sum_{k,d} x_k^d = 1; x_k^d \geq 0; k = 1,2,\ldots,N; d = 1,2,\ldots,M. \tag{4}$$

Тут M – потужність множини D.

Будь-яке оптимальне рішення задачі (2) – (4) має таку властивість: для кожного стану x_k існує єдине $d = d(k)$, для якого $x_k^{d(k)} > 0$ і всі $x_k^d = 0$ при $d \neq d(k)$. Це означає, що оптимальна стратегія є нерандомізованою і не залежить від початкового розподілу ланцюга.

Задачі МППР розв'язуються звичайно методами динамічного (ДП) або лінійного (ЛП) програмування. При цьому за обчислювальною складністю обидва підходи майже рівнозначні й призводять до аналогічних результатів. Разом із тим, для розв'язування задач оптимізації реальних систем телетрафіку доцільно використовувати методи ЛП. Це пояснюється двома обставинами. По-перше, навантаження систем телетрафіку визначається на практиці із певною погрішністю, і тому для дослідників і проектувальників цих систем великий інтерес становить питання визначення того, в яких діапазонах зміни значень навантажень трафіків оптимальна стратегія зберігає свої параметри. Як відомо, сучасні пакети прикладних програм ЛП дозволяють проводити досить глибокий після оптимізаційний аналіз, зокрема, відповісти й на згадане вище запитання. По-друге, при використанні ЛП є можливість врахувати й деякі додаткові нелінійні обмеження (хоча при цьому не гарантується нерандомізованість знайденої стратегії). У той же час, застосування ДП не дає змоги розв'язувати ці проблеми.

Ієрархічний алгоритм фазового укрупнення для дослідження МППР. Описаний вище підхід до дослідження задач МППР назвемо точним. Цей підхід виявляється ефективним при дослідженні задач МППР, для яких ФПС вихідного керованого ЛМ містить невелику кількість мікростанів (МС).

Очевидно, що ФПС моделей систем телетрафіку при великій кількості трафіків и при великих значеннях структурних параметрів системи (кількість каналів і місць для очікування) містить величезну кількість МС. Тому для великих систем телетрафіку застосування точного підходу до розв'язування задач їх оптимізації наштовхується на суттєві обчислювальні труднощі, які важко переборювати навіть із використанням сучасних комп'ютерів. Звідси виникає проблема спрощення опису таких систем і пошуку ефективних методів їх оптимізації.

Тут пропонується новий ієрархічний алгоритм типу фазового укрупнення, який одночасно використовує принцип декомпозиції й не накладає жодних обмежень на структуру перехідних матриць відповідних керованих ланцюгів Маркова. Цей алгоритм дає змогу розв'язувати задачі оптимізації керованих ЛМ практично довільної розмірності. Оскільки на кожному щаблі ієрархії алгоритм містить ідентичні кроки, то будемо описувати роботу алгоритму лише на першому щаблі.

Нехай скінченновимірний МППР із нескінченим горизонтом планування і без дисконтування визначений за допомогою об'єктів (1)-(4), як було вказано у попередньому розділі.

Крок 1. Розглядається деяке розщеплення ФПС X, схематичне зображення якого подано на рис. 1:

$$X = \bigcup_{v=1}^{V} X_v, X_v \bigcap X_v^{/} = \varnothing, v \neq v'. \tag{5}$$

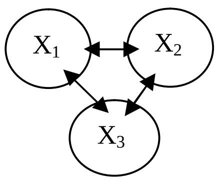


Рис. 1. Схема розбиття ФПС X при V = 3.

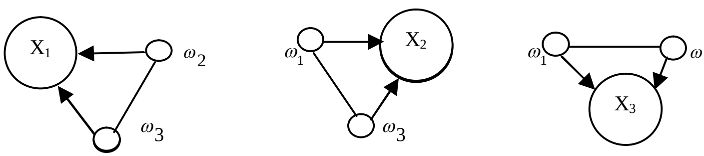
Крок 2. Всі мікростани, що входять до підмножини X_v, об'єднуються в один укрупнений стан (УС), який позначається ω_v, v = 1, 2,…,V. Всі одержані таким шляхом УС складають деякий простір $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_v\}$.

Крок 3. На підставі розщеплення (5) будуються функції укрупнення $U_v : X \to \hat{X}_v$, де $\hat{X}_v := X \cup \Omega \setminus \{\omega_v\}$, v = 1, 2, …,V, які визначаються таким чином:

$$U_v = \begin{cases} x, & \text{якщо} \quad x \in X_v, \\ \omega_{v'}, & \text{якщо} \quad x \in X_{v'}, v' \neq v. \end{cases} \tag{6}$$

Функції укрупнення (6) визначають V укрупнених (відносно вихідної) моделей, при цьому v-та укрупнена модель (УМ) має ФПС $\hat{X}_v, v = 1,2,...,V$.

Різні варіанти побудови укрупнених моделей зображені на рис. 2.



(a) – v = 1 (б) – v = 2 ($в$) – v = 3

Рис. 2. Структура ФПС $\hat{X}_v$ при V=3.

Крок 4. Визначається множина допустимих рішень D_v для v-ї УМ. Вона шукається як проекція множини D на множину X_v.

$$D_v := \bigcup_{x \in X_v} D_x . \tag{7}$$

Крок 5. Визначаються елементи перехідної матриці v-ї укрупненої моделі $P_v = \left\| P_v^d(x,x') \right\|, x, x' \in \hat{X}_v$:

$$P_v^d(x,x') = \begin{cases} p^d(k,k')\rho(k), & \text{якщо} \quad x = x_k, x' = x'_k; \\ \sum\limits_{k' \in X'_v} p^d(k,k')\rho(k), & \text{якщо} \quad x = x_k, x' = \omega_k; \\ \sum\limits_{k' \in X'_v} \sum\limits_{d \in D_k} p^d(k,k')\rho(k), & \text{якщо} \quad x = \omega'_v, x' = x'_k; \\ \sum\limits_{\substack{k \in X'_v \\ k' \in X''_v}} \sum\limits_{d \in D_k} p^d(k,k')\rho(k), & \text{якщо} \quad x = \omega'_v, x' = \omega''_v. \end{cases} \quad (8)$$

Оскільки стаціонарний розподіл початкової моделі невідомий, то при дослідженні v-ї укрупненої моделі неможливо користуватися значеннями $P_v^d(x,x'), d \in D^v$, що визначаються за допомогою формули (8). Отже, необхідно використовувати різні схеми апроксимації, оцінити значення невідомих елементів перехідної матриці зверху або (та) знизу.

Зауваження. З практичної точки зору таку оцінку доцільно проводити зверху, бо при цьому кінцеві результати будуть більш надійними. Зокрема, для такої оцінки може бути використаний такий факт:

якщо $a_i \geq 0, i = 1,2,...,S,\ 0 < \sum\limits_{i=1}^{S} b_i \leq 1,$ то $\sum\limits_{i=1}^{S} a_i b_i \leq \max\limits_i \{a_i\}.$

Крок 6. Елементи вектора середніх втрат (для v-ї укрупненої моделі ${}^vC_x^d$ - втрати за один крок, якщо у стані $x \in \hat{X}_v$ прийняте управління $d \in D^v$ відповідно до формули (8)) визначаються через невідомий стаціонарний розподіл початкової моделі. Тому тут також виникає необхідність апроксимації значення цих величин, які для випадків оцінки зверху й знизу визначаються відповідно наступними формулами:

$$
{}^{v}\overline{C}_{x}^{d}=\begin{cases} C_{k}^{d}, & якщо \quad x=x_{k}\in\hat{X}_{v}, \\ \min\limits_{d\in D_{k}}\min\limits_{k\in X'_{v}}(C_{k}^{d}), & якщо \quad x=\omega'_{v}\in\hat{X}_{v}, v'\neq v. \end{cases} \tag{9}
$$

$$
{}^{v}\underline{C}_{x}^{d}=\begin{cases} C_{k}^{d}, & якщо \quad x=x_{k}\in\hat{X}_{v}, \\ \min\limits_{d\in D_{k}}\min\limits_{k\in X'_{v}}(C_{k}^{d}), & якщо \quad x=\omega'_{v}\in\hat{X}_{v}, v'\neq v. \end{cases} \tag{10}
$$

Крок 7. Для апроксимації значень критерію якості (1) використовуються оцінки зверху і знизу, що визначаються такими формулами:

$$
{}^{v}\overline{W}:=\sum_{x\in\hat{X}_{v}}{}^{v}\overline{C}(x), \tag{11}
$$

$$
{}^{v}\underline{W}:=\sum_{x\in\hat{X}_{v}}{}^{v}\underline{C}(x), \tag{12}
$$

де ${}^{v}\overline{C}(x):=\sum\limits_{x\in D^{v}}{}^{v}\overline{C}_{x}^{d}\alpha_{x}^{d}$; ${}^{v}\underline{C}(x):=\sum\limits_{x\in D^{v}}{}^{v}\underline{C}_{x}^{d}\alpha_{x}^{d}$.

Крок 8. Якщо в усіх УМ всі параметри (елементи перехідної матриці та критерії якості) оцінюються зверху, то одержимо V “мажорантних“ задач відносно початкової задачі оптимізації. В іншому випадку, тобто якщо в усіх УМ названі параметри оцінюються знизу, то одержимо V “мінорантних” задач відносно початкової задачі оптимізації. Після розв’язання задачі оптимізації v-ї УМ (“мажорантної” чи “мінорантної”) знаходяться наближені оптимальні значення $\alpha_{k}^{d}, x_{k}\in X_{v}$, і, таким чином, після паралельного розв’язування всіх V аналогічних задач знаходяться наближено оптимальні значення всіх α_k^d, де $x_k \in X$.

Точність запропонованого методу оцінюється так:

$$\max_v {}^v\underline{W}^* \le W^* \le \min_v {}^v\overline{W}^*, \quad (13)$$

де $W^*, {}^v\overline{W}^*, {}^v\underline{W}^*$ – відповідно оптимальні значення критерію якості у початковій, *v*-й "мажорантній" та *v*-й "мінорантній" задачах, $v = 1, 2, \ldots, V$.

Важливою перевагою розробленого наближеного алгоритму є те, що на відміну від відомих алгоритмів він не накладає жодних обмежень на структуру перехідної матриці початкової моделі, а також передбачає можливість його багаторазового застосування для побудови УМ і, таким чином, одержання ієрархії задач оптимізації керованих ЛМ. Останнє означає, що якщо для понадвеликого ЛМ в результаті одноразового застосування розробленого алгоритму не вдається достатньою мірою знизити розмірність задачі оптимізації початкової моделі, то слід повторно застосувати даний алгоритм тепер уже до укрупнених моделей. Цим самим отримують ієрархію моделей. При цьому на кожному щаблі ієрархії дії за описаним вище алгоритмом повторюються.

На похибку запропонованого наближення впливають два фактора: схема розщеплення ФПС початкової моделі і схеми апроксимації невідомих параметрів в укрупнених моделях.

Висновки.

Ясно, що укрупнені моделі визначаються вибором конкретної схеми розщеплення ФПС початкової моделі, і, таким чином, можна використовувати різні схеми розщеплення. Стосовно оцінки невідомих параметрів в укрупнених моделях слід зазначити, що при використанні більш точних схем апроксимації отримують рішення, які ближчі до вихідного. При цьому оцінка (13) залишається вірною в усіх випадках. Ці підтверджуються результатами числових експериментів, проведених із використанням ієрархічного варіанту даного алгоритму для оптимізації марковських систем обслуговування з пріоритетами.

Список використаних джерел

1. Ховард Р.А. Динамическое программирование и марковские процессы. – М.: Советское радио, 1964. – 191 с.
2. Derman C. Finite state Markovian decision processes. – N.Y.: Academic Press, 1970.
3. Kallenberg L.C.M. Linear programming and finite Markovian control problems. – Amsterdam: Math. Centre Tracts, 1983.
4. Первозванский А.А., Гейцгорн В.Г. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. – М.: Наука, 1979. – 365 с.
5. Ross K.W., Waradarajan R. Multichain Markov decision processes with a simple pathconstraint: A decomposition approach // Math. of Oper. Res. – 1991. – vol.16, no.1. – pp.195-207.
6. Меликов А.З., Пономаренко Л.А., Рюмшин Н.А. Математические модели многопотоковых систем обслуживания. – К.: Техника, 1991. – 244 с.
7. Меликов А.З., Пономаренко. Иерархический алгоритм типа фазового укрупнения для оптимизации управляемых цепей Маркова // Автоматизация производственных процессов (Киев). – 1996. - № 1. – С. 86-90.
8. Hahnewald-Busch A. Verfahren zur aggregation in zustrandstraum bei Markovschen Entscheidungsproble-men // Wiss.Berlin Tech.Hochsch. – Leipzig. – 1986. - № 7. – pp. 10-12.
9. Stidham S., Weber R.A. Survey of Markov decision models for control of networks of queues // Queueing Systems. – 1993. – vol. 13. – P.291-314.
10. White D.J. Real application of Markov decision processes // Interfaces. – 1985. – vol.15< no. 6. – pp.73-83.
11. Hordijk A., Kallenberg L.G. Linear programming and Markov decision chains // Manage. Sci, **25** (1979). – pp. 353-362.