УДК 656.13.022: 519.2
В.Г. Галушко

Моделирование распределений суммы независимых случайных величин

Запропоновані ймовірнісні моделі визначення розподілу суми незалежних випадкови величин для комплексу задач при: - розрахунку по відомим параметрам розподілу із двох випадкових величин; - рішенню інтегральних рівнянь з використанням Mathcad; - створені прикладних програм на Фортрані.
Ключові слова: *автомобільні перевезення, випадкові обсяги вантажів, закони розподілу, ймовірнісні моделі.*

Предложены вероятностные модели определения распределений суммы независимых случайных величин для комплексов задач при: расчете по известным параметрам слагаемым распределений; решении интегральных уравнений с использованием Maihcad; разработке прикладных программ на Фортране.
Ключевые слова: *автомобильные перевозки, случайные объемы грузов, законы распределения, вероятностные модели.*

The probabilistic models of determination of distributing of sum of independent casual sizes are offered for the complexes of tasks at: calculation on the known numerical descriptions by the element of distributing; decision of integral equalizations with the use of Maihcad; to applied program development on Fortran.
Keywords: *motor-car transportations, casual volumes of loads, distributing laws, probabilistic models.*

Актуальность. Определения суммы нескольких случайных величин, как дискретных так и непрерывных, позволяют решать многие прикладные задачи [1-4] в различных отраслях науки и техники (экономике, информатике, на транспорте и т.д.)

Так вопросы эффективного планирования и управления перевозками на транспортных сетях базируются на вероятностных методах накопления грузов в пунктах сети в условиях влияния многочисленных случайных факторов [3] с характерной **неопределенностью** [5] (состояние системы не относится к идеальным условиям, когда ситуация детерминирована). Более того, неопределенность сопряжена с отдельными рисками не своевременной доставки грузов по вине экспедитора и водителя, а также их совместного влияния, как суммы композиции законов распределения отдельных рисков. Аналогично накопление грузов в пунктах сети за 2 суток также определяется как сумма 2 случайных величин с заданным законом.

Анализ теоретических исследований

Анализ моделей по определению распределений **суммы двух случайных величин** с заданными законами распределения, а также законов распределения суммы независимых случайных величин (композиции законов распределения слагаемых) позволяет использовать эти методы по следующим направлениям: определение числовых характеристик суммы по заданным числовым характеристикам слагаемых;.сведение задачи к решению интегральных уравнений в системе Mathcad; составление прикладных программ на Фортране, используя методологию замены распределений непрерывных случайных величин дискретными.

Для некоторых частных случаев, при известных числовых характеристиках распределения случайных величин слагаемых, распределение параметров закона распределения их суммы для дискретных и непрерывных распределений определятся довольно не сложно.

Так при сложении двух **дискретных** независимых случайных величин, распределенных по закону **Пуассона** с параметрами a_1 и a_2, математическое ожидание закона Пуассона суммы $Y = X_1 + X_2$ определяются как

$$a = a_1 + a_2. \quad (1)$$

Аналогично сумма двух независимых биномиальных случайных величин в n_1 и n_2 испытаниях, а также распределенных по закону Паскаля, имеют соответственно распределения биномиальное и Паскаля с параметрами [4], равных сумме ($n= n_1 + n_2$) и ($x=x_1 + x_2$).

Для **непрерывных** случайных величин при сложении двух независимых случайных величин X_1 и X_2, распределенных по **нормальному закону**, с математическими ожиданиями a_1 и a_2 и средними квадратичными отклонениями σ_1 и σ_2 , числовые характеристики нормального закона случайной величины $Y = X_1 + X_2$ будут равны:

$$a = a_1 + a_2, \qquad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \quad (2)$$

Аналогично, при сложении двух независимых непрерывных случайных величин, имеющих распределения Коши и Гамма, распределение их суммы также распределены по этим законам [4].

Для независимых показательных законов распределения с параметрами $\lambda_1 \neq \lambda_2$ плотность распределения определяется [2-3] как

$$g(y) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_2 y}) \quad (3)$$

Однако при решении многих практических задач могут быть известны лишь эмпирические распределения случайных величин или заданы параметры законов распределения, а определение параметров их суммы в аналитическом виде требует разработки методов их расчета.

Целью статьи является разработка математических моделей определения вероятностных распределений суммы для двух независимых случайных величин и их практическая реализация с использованием программных средств **Mathcad** и **Фортрана.**

Изложение основного материала. Рассмотрим систему (X_1, X_2) двух **непрерывных** случайных величин и их сумму

$$Y = X_1 + X_2 \tag{4}$$

Известно, что для **независимых** случайных величин X_1 и X_2 плотность распределения суммы равна [2,3].

$$g(y) = \int_{\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(y - x_1) dx_1 \tag{5}$$

$$g(y) = \int_{\infty}^{\infty} f_1(y - x_2) f_2(x_2) dx_2 \tag{6}$$

Рассмотрим определение распределения суммы независимых непрерывных случайных еличин ***g(y)***, распределенных по законам Релея и показательному

$$f_1(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; \quad f_2(x) = \lambda e^{-\lambda x}. \tag{7}$$

Подставляя искомые уравнения (7) в уравнения (5) и выполнив необходимые преобразования получим

$$g(y)=\int_0^y \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \lambda e^{-\lambda(y-x)} dx = \frac{\lambda}{\sigma^2} e^{-\lambda y} \int_0^y x e^{-x(\frac{x}{2\sigma^2}-\lambda)} \, dx \quad \textbf{(7)}$$

Определение плотности распределения суммы ***g(y)*** сводится к интегральному уравнению (8), которое может быть решено в системе Mathcad. Для закона Релея **(*σ* =8.7)** и показательного ***(*** ***λ*=*a***=0.1) результаты приведены в табл. 1..

Таблица. 1.

Результаты расчета ***g(y***

α:=0,1	σ:=8,7	κ:=1 … 9
x_k= -2	$x_{\kappa+1}$ = x_k + 2	$в_\kappa$= $x_{\kappa+1}$ +2

$$\frac{\alpha}{\sigma^2} \mathrm{e}^{-\alpha b_k} \int_0^{-b_k} x e^{-\left[x\left(\frac{x}{2\sigma^2}-\alpha\right)\right]} dx$$

2,441 · 10^-3
8,792 · 10^-3
0,017
0,026
0,034
0,04
0,043
0,043
0,041
0,038
0,034
0,029
0,025

0,021
0,017
0,014

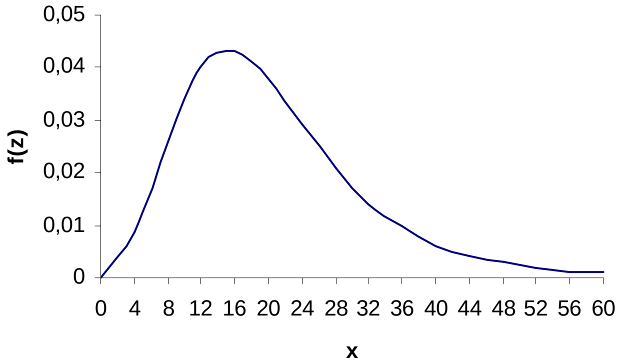

Рис.1. Плотность распределения ***g(y).***

Рассмотрим общий подход определения распределения суммы независимых **дискретных** случайных величин ***r(k)***(k=0,1,2, …). Пусть заданы дискретные случайные величины ***p(i)*** (i=0,1,2,…, n) и ***q(j)*** (j=0,1,2,…, m)**,** которые могут подчиняться различным законам или задаваться как распределения эмпирических данных.

Для определения распределения ***r(k)*** предложено следующее уравнение

$$r(k) = \sum_{i=0}^{k} p(i) * q(k-i) \tag{9}$$

Разработан алгоритм решения уравнения (9), который использован при составлении программы на Фортране расчета вероятностных распределений суммы двух независимых дискретных случайных величин *r(k)*, которая приведена ниже

Программа вычисления распределения ***r(k).***

```
! PROGRAM Z=X+Y_F90
      INTEGER I, J, K, N
      REAL P(0:30),Q(0:30),R(0:30),A(0:30)
      character*16     ::innam,outnam

    ! write (*,*) 'input file='
    ! read (*,'(a16)') innam
    ! open (1, file=innam)

      write(*,*)'Output file='
      read(*,'(a16)') outnam
      open (3,file=outnam)

      N =14
      DO 1 K=1,30
         P(K)=0
         Q(K)=0
   1 continue
      P(0)=0;     P(1)=0.21;P(2)=0.3;     P(3)=0.26;     P(4)=0.15;
P(5)=0.06; P(6)=0.02
      Q(0)=0;    Q(1)=0.21;Q(2)=0.3;    Q(3)=0.26;    Q(4)=0.15;
Q(5)=0.06; Q(6)=0.02
      I=-1
      K=-1
   2 R(0)=0
      DO 3 J=1,N
   3 R(J)=0
10 K=K+1
   4 IF (K-N) 5,5,12
   5 I=I+1
     IF (I-K) 7,7,8
```

```
 7 R(K)=R(K)+P(I)*Q(K-I)
   GO TO 5
8 A(K)=R(K)
 11   I=-1
  GO TO 2
 12 WRITE (3,9) (A(J-1),J=1,K)
   9 FORMAT (30F7.3)
    STOP
  END

! END Z=X+Y.F90
```

Пусть заданных два независимых распределения ***P(I)*** и ***P(j)*** дискретных случайных величин с количеством значений, равных **7**

P(0)=0; P(1)=0.21;P(2)=0.3; P(3)=0.26; P(4)=0.15; P(5)=0.06; P(6)=0.02 **(**10)

Q(0)=0;Q(1)=0.21;Q(2)=0.3;Q(3)=0.26;Q(4)=0.15;Q(5)=0.06 ; Q(6)=0.02 **(11)**

Для ***к*** **=6+6 =**12 результаты расчета ***r(k)*** принимают следующие значения

r (0)=0.000; *r* (1)=0.000; *r* (2)=0.044; *r* (3)=0.126; *r* (4)=0.199; ***r*** **(5)=**0.219; ***r*** **(**6**)=**0.183;

r (7)=0.122; *r* (8)= 0.066; *r* (9)= 0.028; *r* (10)= 0.010; *r* (11)= 0.002; *r* (12)=0.000 (12)

Следует особо отметить, что программа расчета по предложенному уравнению (9) составлена для исходных дискретных значений случайных величин. Однако, она может в некоторых практических случаях использована и для непрерывных независимых случайных величин. Для этого необходимо, для заданных случайных величин диапазон изменения которых необходимо разбить на дискретные значения кратные единице и определить вероятности дискретных значегтй. Для закона Вейбулла [3] с параметрами α =2 и β=3 при заданных дискретных значениях I = 0,1,…,6 вероятности $P(I)$ рассчитаны по плотности и представлены в уравнении (10), а расчет $r(k)$ в уравнении (12). Отметим, что суммы определяемых вероятностей $P(I)$ и $Q(J)$ должны равняться 1, а в случаях отличия на незначительную величину необходимо использовать известные методы уточнения (усечения) распределений [2,3]. Выполненные практические расчеты показывают, что при количестве дискретных значений от 6 до 20 и выполнение необходимых корректировок $P(I)$ и $Q(J)$ предложенная методология (замены непрерывных распределений дискретными) дает удовлетворительные результаты для практического использования. Однако, при больших значениях интервалов случайных величин необходимо провести дополнительные исследования и выполнить разработку прикладных программ.

Выводы. Предложены различные подходы вычисления распределений суммы независимых случайных величин включающих**:**

– решения интегральных уравнений в системе Mathcad**;**

– составление прикладных программ на Фортране, используя методологию замены распределений непрерывных случайных величин дискретными.

Литература

1. Королюк В.С. Справочник по теории вероятностей и математической статистике./ В.С. Королюк., В.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин . — К.: Наукова думка. 1978., —582с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров – . М.: Высшая школа, 2000. – 480с.
3. Галушко В.Г. Статистические распределения в приложениях./В.Г. Галушко— К.: “Зовнішня торгівля”, 2011. — 104с.

4. Хастинг Н. Справочник по статистическим распределениям. / Н. Хастинг, Дж. Пикок — М.: Статистика, 1980. — 95с.
5. Кузьмин Е.А. Неопределенность в экономике: понятия и положения./ Е.А. Кузьмин // Вопросы управления. – . 2012. – №2(2), — С.80-92 elibrary abstract.

УДК 519.21:681.142 **І.А.Глущенко**

Оцінка ефективності реалізації програм розвитку регіональної енергетики

Запропоновано метод оцінки ефективності реалізації плану регіонального розвитку та розглянуто його використання при будівництві енергогенеруючих об’єктів, що використовують нетрадиційні та вторинні джерела енергії.

***Ключові слова**: оцінка ефективності, регіональний розвиток, план будівництва, критерії оцінки.*

Предложен метод оценки еффективности реализации плана регионального развития и рассмотрено его использование при строительстве энергогенерирующих объектов, которые используют нетрадиционные и вторичные источники энергии.

***Ключевые слова**: оценка эффективности, региональное развитие, план строительства, критерии оценивания.*

The method of evaluating the effectiveness of the plan for regional development and considered its use in the construction of power facilities based on alternative and secondary energy sources