УДК 338.1 **О.І. Ляшенко**

Економічне зростання при умові розповсюдження знань в залежності від загального рівня капіталоозброєності праці

Розглядається узагальнена параметрична модель, яка описує сімейство моделей між двома крайніми випадками – неокласичною моделлю децентралізованого типу та дворівневою АК-моделлю. Припускається, що всі відкриття є неочікуваними побічними продуктами інвестицій та що ці відкриття миттєво стають загальним знанням.

Ключові слова: *економічне зростання, розповсюдження знань, АК-модель, виробнича функція, ендогенне зростання.*

Рассматривается обобщенная параметрическая модель, описывающая сумуйство моделей между двумя крайними случаями – неоклассической моделью децентрализованного типа и двухуровневой АК-моделью. Предполагается, что все открытия являются неожиданными побочными продуктами инвестиций и что эти открытия мгновенно становятся общим знанием.

Ключевые слова: *экономический рост, распространение знаний, АК-модель, производственная функция, эндогенный рост.*

The generalized parametric model is considered. It describes the family of models between two extreme cases - neoclassical model of decentralized type and AK-model. It is assumed that all discoveries are unexpected by-products of investments and become common knowledge instantly.

Keywords: *economic growth, knowledge dissemination, AK- model, production function, endogenous growth.*

Актуальність. Початок сучасної теорії економічного зростання поклала стаття Рамсея [1], в якій запропонована міжчасова функція корисності. Ця функція знайшла своє широке використання, таке ж, як і загальновідома виробнича функція Кобба-Дугласа [2]. Важливі результати були одержані в роботах Солоу [3] і Свена [4], в яких неокласична виробнича функція була об’єднана з припущенням про сталість норми збереження. Це дозволило створити досить просту модель економічної рівноваги. Модель Солоу-Свена показала, що при відчутності тривалих покращень в технології зростання на душу населення в кінці кінців зупиняється. Загальновизнано, що це є закономірним наслідком припущення про зменшуючи віддачу капіталу.

Касс [5] і Купманс [6] вбудували аналіз Рамсея оптимального споживання в неокласичну модель зростання шляхом ендогенного де термінування норми збереження. В моделі Касса-Купманса рівновага підтримується децентралізованою конкурентною структурою, в якій капітал і праця оплачуються своїми граничними продуктами. При цьому децентралізовані розв’язки є Парето-оптимальними. На цьому була завершена побудова базової неокласичної моделі зростання. Далі теорія зростання ставала все більш технічною і втрачала зв'язок з емпіричними додатками.

У кінці 1980-х років завдяки роботам Ромера [7] і Лукаса [8] виник новий інтерес до дослідження економічного зростання. Замість того, щоб підтримувати довгостроковий темп зростання штучно коефіцієнтом екзогенного технологічного прогресу в роботах цих авторів довгостроковий темп зростання визначається всередині самої моделі (звідси пішла назва «моделі ендогенного зростання»).

Ряд авторів – Франкель [9], Гриліхес [10], Ромер [7], Лукас [8] побудували моделі ендогенного зростання, в яких центральну роль відіграють ефекти розповсюдження знань (досвіду). Фірма, що збільшує об'єм свого фізичного капіталу, одночасно дізнається, як виробляти більш ефективно. Такий негативний вплив досвіду на виробництво називається навчанням на власному досвіді або навчанням на власних інвестиціях. Ці нові елементи моделі ілюструються на прикладі неокласичної виробничої функції з трудоінтенсивною технологією для фірми *i*:

$$Y_i = F\left(K_i, A_i L_i\right), \tag{1}$$

де K_i та L_i – звичайні ресурси; A_i – індекс знань, доступних даній фірмі.

Робляться два припущення відносно зростання продуктивності [2]. По-перше, навчання на власному досвіді відбувається через чисті інвестиції кожної фірми. Отже, приріст капіталу фірми веде до паралельного приросту у неї об'єму знань. По-друге, знання кожної фірми є суспільним товаром, який будь-яка інша фірма може одержати за нульовою ціною. З цих припущень випливає, що зміна технологічного множника кожної фірми A_i відповідає одержанню нового знання в усій економіці, тому вона пропорційна зміні в об'ємі агрегованого капіталу K або агрегованої капіталоозброєності K/L. Таким чином, виробничу функцію (1) для фірми *i*, зокрема, можемо записати у вигляді

$$Y_i = F\left(K_i, \frac{K}{L} L_i\right). \tag{2}$$

У даній статті ми використаємо екстремальне припущення, що всі відкриття є неочікуваними побічними продуктами інвестицій та що ці відкриття миттєво стають загальним знанням. Така специфікація дозволяє зберегти структуру досконалої конкуренції, хоча результати виявляються неоптимальними за Парето. Одним із припущень в даній моделі є те, що розповсюдження знань здійснюється на рівні всієї економіки. Визначення між розповсюдженням знань вкрай важливе для подальшого практичного застосування даної моделі.

Мета статті – проаналізувати запропоновану узагальнену параметричну модель

$$Y_i = F\left(K_i, \left(\frac{K}{L}\right)^{\lambda} L_i\right), \quad 0 \le \lambda \le 1 \tag{3}$$

яку можна розглядати як серію проміжних моделей між крайніми випадками: $\lambda = 0$ (неокласична модель децентралізованого типу) та $\lambda = 1$ (дворівнева модель типу *AK*-моделі). При цьому основна увага приділяється визначенню особливої ролі параметра $\lambda \in (0,1)$.

Виклад основного матеріалу

Неокласична виробнича функція. Виробнича функція $F(K,L)$ називається неокласичною, якщо вона має такі властивості:

1) стала ефективність зі зростанням виробництва:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L) \text{ для всіх } \lambda > 0. \tag{4}$$

2) додатна та зменшуючи віддача ресурсів:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0; \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0. \tag{5}$$

3) умови Інади (1963):

$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L\to 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty; \quad \lim_{K\to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L\to \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0. \tag{6}$$

4) істотність:

$$F(0,L) = F(K,0) = 0. \tag{7}$$

З перших трьох властивостей випливає, що випуск прямує до нескінченості при прямуванні будь-якого з ресурсів до нескінченості [2].

У неокласичній виробничій функції можна перейти до змінних на душу населення. Дійсно, обираючи в (4) $\lambda = \frac{1}{L}$, одержуємо

$$Y = F(K, L) = LF\left(\frac{K}{L}, 1\right) = Lf(k), \tag{8}$$

де $k = \frac{K}{L}$ – капіталоозброєність (капітал на одного працівника), $y = \frac{Y}{L}$ – продуктивність праці (випуск на одного працівника) і функція $f(k) = F(k,1)$. Таким чином, неокласична виробнича функція може бути записана в інтенсивній формі

$$y = f(k). \tag{9}$$

Тоді

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(k), \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = f(k) - kf'(k), \tag{10}$$

$$\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k \to 0} f'(k) = 0. \tag{11}$$

Неокласична модель загальної рівноваги. У конкурентній економіці капітал та праця оплачуються своїми граничними продуктами, тобто граничний продукт капіталу дорівнює ціні оренди *R*, а граничний продукт праці дорівнює ставці заробітної плати ω. Отже,

$$f'(k) = R, \quad f(k) - kf'(k) = \omega. \tag{12}$$

Вважається, що капітал є однорідним товаром, який вибуває з сталим темпом амортизації $\delta > 0$. Тоді чистий приріст об’єму фізичного капіталу за одиницю часу дорівнює валовому інвестуванню за вирахуванням амортизації:

$$\dot{K} = I - \delta K, \quad K(0) = K_0, \tag{13}$$

де $\dot{K} = \dfrac{dK}{dt}$. Рівняння (8) визначає динаміку K при заданій технології та праці.

Трудовий ресурс L змінюється з часом внаслідок зростання населення. В нашому випадку будемо вважати, що населення зростає з сталим екзогенним темпом приросту $\dfrac{\dot{L}}{L} = n \geq 0$. Якщо ми пронормуємо число людей в момент часу $t = 0$ до одиниці, то населення та робоча сила в момент часу $t > 0$ описується рівнянням

$$L(t) = e^{nt}. \tag{14}$$

Розглянемо конструкцію, в якій у явному вигляді присутні ринки. Нехай домогосподарства не володіють технологією, а володіють лише фінансовими активами та працею. Активи виробляють норму дохідності $r(t)$, а праця оплачується за ставкою заробітної плати $\omega(t)$. Таким чином, загальний дохід домогосподарств є сумою доходу від активів та від праці. Тоді після вирахування з доходу об'єму споживання $C(t)$ одержуємо динаміку активів:

$$\frac{d}{dt}\left(Активи\right) = r\left(Активи\right) + \omega L - C, \tag{15}$$

або після переходу до активів та споживання на одну людину $a = \dfrac{\left(Активи\right)}{L}, \quad c = \dfrac{C}{L}$ одержуємо

$$\dot{a} = (r - n)a + \omega - c. \tag{16}$$

З урахуванням амортизації основного капіталу з темпом $\delta \geq 0$ чиста норма доходності домогосподарства складає величину $r = R - \delta$, що еквівалентне співвідношенню $R = r + \delta$.

Потік чистого доходу або прибутку репрезентативної фірми задається рівнянням

$$\pi = F\left(K, L\right) - (r+\delta)K - \omega L. \tag{17}$$

Нехай фірма максимізує поточні значення прибутків

$$\pi = L\left[\, f(k) - (r+\delta)k - \omega\right]. \tag{18}$$

Конкуруюча фірма, для якої r та δ задані ззовні, максимізує прибуток при заданому *L* таким чином:

$$f'(k) = r + \delta\,, \tag{19}$$

де граничний продукт капіталу дорівнює ціні оренди.

В умовах повної ринкової рівноваги ω повинна бути такою, щоб прибуток дорівнював нулю. Для того, щоб прибуток був нульовий, вимагається, щоб ставка заробітної плати, рівна граничному продукту праці, відповідала значенню *k*, яке задовольняє рівнянню (19):

$$f(k) - kf'(k) = \omega. \tag{20}$$

Звернемося тепер до визначення рівноваги в економіці. В закритій економіці єдиним активом, що має додатну чисту пропозицію, є капітал, оскільки всі займи всередині економіки повинні бути відсутні. Отже, рівновага на ринку активів означає $a = k$. Якщо підставити цю рівність, а також

$$r = f'(k) - \delta, \quad \omega = f(k) - kf'(k)$$

в рівняння (16), то одержимо фундаментальне рівняння

$$\dot{k} = f(k) - (n+\delta)k - c. \tag{21}$$

Кожне домогосподарство хоче максимізувати повну корисність U , яка може бути задана як

$$U = \int_0^\infty u\left(c(t)\right) e^{nt} e^{-\rho t} dt. \tag{22}$$

Тут функція корисності $u(c)$ є монотонно зростаючою функцією, опуклою вгору: $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$. Також вважається, що $u(c)$ задовольняє умовам Інади: $u'(c) \to \infty$ при $c \to 0$; $u'(c) \to 0$ при $c \to \infty$.

Множення $u(c)$ на розмір сім'ї $L(t) = e^{nt}$ означає підсумовування по всім членам сім'ї на момент часу t. Інший множник $e^{-\rho t}$ містить дисконтну ставку часової переваги $\rho > 0$. Будемо вважати, що $\rho > n$, звідки випливає, що якщо $u(c)$ не змінюється з часом, то інтеграл (22) скінчений і повна корисність U обмежена.

Щоб позбавитись можливості побудови «фінансової піраміди» в домогосподарств, використовується умова трансверсальності

$$\lim_{t\to\infty} a(t)\cdot \exp\left(-\int_0^t \left(r(\xi)-n\right)d\xi\right) = 0. \quad (23)$$

Оптимізаційна задача домогосподарства полягає в максимізації U із співвідношення (22) при бюджетному обмеженні (16), початковому значенні активів $a(0)$ і обмеженні (23). Також присутні обмеження у вигляді нерівностей $c(t) \ge 0$. Але завдяки умові Інади $u'(c) \to \infty$ при $c \to 0$ обмеження типу $c(t) \ge 0$ ніколи не виявляються зв'язуючими і тому їх можна ігнорувати. Для розв'язання цієї задачі випишемо приведений до поточного часу гамільтоніан:

$$J = u\left(c(t)\right)e^{-(\rho-n)t} + \nu(t)\left[\omega(t) + \left(r(t)-n\right)a(t) - c(t)\right]. \quad (24)$$

Умови першого порядку для максимуму U мають вигляд:

$$\frac{\partial J}{\partial c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu = u'(c)e^{-(\rho-n)t}, \quad (25)$$

$$-\frac{\partial J}{\partial a} = \dot{\nu} \quad \Rightarrow \quad \dot{\nu} = -(r-n)\nu. \quad (26)$$

Умова трансверсальності:

$$\lim_{t\to\infty} \nu(t)a(t) = 0. \qquad (27)$$

Після диференціювання (25) по часу з врахуванням (26) одержимо основне диференціальне рівняння, що визначає рівень споживання протягом часу

$$r = \rho - \left[\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}\right]\cdot\frac{\dot{c}}{c}. \qquad (28)$$

Згідно цього рівняння домогосподарства визначають для себе рівень споживання таким чином, щоб норма доходності r була рівною сумі ставки часової переваги ρ та темпу зниження граничної корисності споживання u', яка знижується завдяки зростанню споживання c.

Величина еластичності граничної корисності $-\left[\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}\right]$ називається величиною, оберненою еластичності міжчасового заміщення. З рівняння (28) випливає, що в стаціонарному стані, в якому r та $\frac{\dot{c}}{c}$ константи, ця еластичність повинна бути константою. В такому випадку, притримуючись загальноприйнятної практики, вважається, що функція корисності має вигляд:

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \quad \theta > 0. \qquad (29)$$

Тоді еластичність граничної корисності дорівнює константі $-\theta$, а еластичність заміщення для такої функції корисності дорівнює константі $\sigma = \frac{1}{\theta}$.

Із вигляду функції корисності (29) випливає, що умова оптимальності (28) приводиться до вигляду

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho). \qquad (30)$$

Система рівнянь (21) та (30) є системою рівнянь відносно c та k. З цієї системи, що включає початкову умову $k(0)$ та умову трансверсальності, визначаються траєкторії c та k.

***АК*-модель.** Ключовою властивістю даного класу моделей ендогенного зростання є відсутність зменшуючої віддачі капіталу. Найпростішою версією виробничої функції без зменшуючої віддачі капіталу є *АК*-функція [11]:

$$Y = A \cdot K , \tag{31}$$

де A – додатна константа, яка відображає рівень технологій. Повна відсутність зменшуючої віддачі капіталу може виглядати нереалістичною, але ця ідея стає більш правдоподібною, якщо ми будемо вважати K капіталом в широкому розумінні, що включає людський капітал [12]. Випуск на людину y тут дорівнює Ak, а середній продукт капіталу сталий і дорівнює $A > 0$.

Візьмемо модельну схему з попереднього пункту, в якому домогосподарства максимізують корисність

$$U = \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \left[\frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right] dt \tag{32}$$

при обмеженні

$$\dot{a} = (r - n)a + \omega - c , \tag{33}$$

де a – активи на одну людину, r – процентна ставка, ω – ставка заробітної плати, c – споживання на одну людину, n – темп приросту населення. Як і раніше, ми вводимо обмеження, що виключає створення «фінансових пірамід» і представляє умову трансверсальності

$$\lim_{t \to \infty} a(t) \exp\left(-\int_0^t \left[r(\xi) - n \right] d\xi \right) = 0 . \tag{34}$$

Умови для оптимізації мають попередній вигляд

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho). \qquad (35)$$

Як і раніше, умови для задачі максимізації прибутку приводять до того, що граничний продукт капіталу повинен дорівнювати ціні його оренди $R = r + \delta$. Єдина відмінність тут – граничний продукт капіталу сталий і дорівнює A. Отже,

$$r = A - \delta. \qquad (36)$$

Оскільки граничний продукт праці дорівнює нулю, то ставка заробітної плати ω також дорівнює нулю. Для пояснення цього достатньо вважати, що ця нульова ставка заробітної плати стосується некваліфікованої праці, інтенсивність якої не підсилюється людським капіталом [2].

Оскілки вважається, що економіка є закритою, то виконується рівність $a = k$. Якщо підставити $a = k$, $r = A - \delta$ та $\omega = 0$ в рівняння (21), (30) і (34), то одержимо

$$\dot{k} = (A - \delta - n)k - c, \qquad (37)$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho), \qquad (38)$$

$$\lim_{t \to \infty} k(t) e^{-(A-\delta-n)t} = 0. \qquad (39)$$

Відмінною особливістю рівняння (38) є те, що зростання споживання не залежить від капіталу. Іншими словами, якщо рівень споживання на людину в момент часу $t = 0$ дорівнює $c(0)$, то

$$c(t) = c(0) e^{\frac{A-\delta-\rho}{\theta} t}, \qquad (40)$$

де величина $c(0)$ повинна ще бути визначена.

Вважаємо, що виробнича функція достатньо продуктивна, щоб гарантувати зростання c, але не настільки, щоб привести до необмеженої корисності:

$$A > \rho + \delta > (A-\delta)(1-\theta) + \theta n + \delta\,. \tag{41}$$

Для того, щоб знайти темп приросту капіталу та випуску на одну людину, розділимо (37) на k та будемо мати

$$\frac{c}{k} = (A-\delta-n) - \frac{\dot{k}}{k}\,. \tag{42}$$

У стаціонарному стані темп приросту капіталу та випуск на одного працівника сталий. Тому $\frac{c}{k}$ є константою і темп приросту капіталу на людину дорівнює темпу приросту споживання на людину. Але це вірно лише для стаціонарного стану: в принципі, темп приросту капіталу поза стаціонарним станом може не бути сталим.

Розв'язуючи систему (37)-(39), одержуємо [2]

$$c(t) = \varphi \cdot k(t)\,, \tag{43}$$

де

$$\varphi = (A-\delta)\frac{\theta-1}{\theta} + \frac{\rho}{\theta} - n > 0\,. \tag{44}$$

Тоді

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)\,. \tag{45}$$

Таким чином, в даній моделі немає перехідної динаміки: змінні $k(t)$, $c(t)$ та $y(t)$, починаючи свій шлях від значень $k(0)$, $c(0) = \varphi \cdot k(0)$ та $y(0) = Ak(0)$ відповідно, в подальшому зростають з однаковим темпом

$$\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)\,.$$

Відмінності між *AK*-моделлю та неокласичною моделлю. Істотна відмінність між *AK*-моделлю та неокласичною моделлю пов'язана з визначенням довгострокового подушового темпу приросту в *AK*-моделі довгостроковий темп приросту залежить, згідно (45), від параметрів, які визначають схильність до збереження та продуктивність капіталу. Покращення в рівні технології A збільшує середній та граничний продукти капіталу, а також піднімають сам темп приросту.

На противагу ефектам довгострокового зростання в *AK*-моделі, з моделі Рамсея витікає, що довгостроковий подушовий темп приросту штучно підтримується на рівні значення x, яке є екзогенним темпом технологічного прогресу.

Ця відмінність в результатах відображає роботу зменшуючої віддачі капіталу в неокласичній моделі та відчутність зменшуючої віддачі у випадку *AK*-моделі. Кількісно масштаб відмінностей залежить від того, наскільки швидко зменшуючи віддача встановлюється, що у випадку неокласичної моделі є визначальною характеристикою того, наскільки швидко економіка збігається до стаціонарного стану. Якщо зменшуючи віддача встановлюється повільно, то період збіжності довгий. Таким чином, відмінність між неокласичною моделлю та *AK*-моделлю істотна, якщо збіжність відбувається повільно. Якщо збіжність екстремально повільна, то ефекти зростання, які виникають в *AK*-моделі, дають повністю задовільну апроксимацію довготривалим впливам на темп зростання в неокласичній моделі.

Результати моделі Рамсея оптимальні за Парето. Цей висновок випливає з того, що результати оптимізації збігаються з результатами, які були одержані гіпотетичним соціальним управляючим, у якого та ж цільова функція, що і в типового домогосподарства. Застосувавши ту ж процедуру в даному випадку, можна показати, що рівновага в *AK*-моделі також оптимальна за Парето. Цей результат має важливий економічний сенс, оскільки означає, що виключення зменшуючої віддачі у виробничій функції, тобто заміна некласичної виробничої функції на *АК* не вносить в модель джерел яких-небудь ринкових збоїв.

Однією з інтерпретацій *АК*-моделі є представлення капіталу в широкому розумінні, тобто коли капітал включає в себе як фізичну, так і людську компоненти.

Моделі з навчанням на власному досвіді та розповсюдженням знань. Причиною наявності ендогенного зростання в *АК*-моделі, як відомо, є відсутність зменшуючої віддачі факторів, які можуть накопичуватись. Розглянемо, як деформується цей ефект при дослідженні параметричної виробничої функції (3), яку запишемо у вигляді

$$Y_i = F\left(K_i, k^{\lambda} L_i\right), \quad 0 \le \lambda \le 1, \tag{46}$$

де $k = \dfrac{K}{L}$ – агрегована величина (середня капіталоозброєність праці, що для кожної фірми є екзогенно заданою.

Винесемо в правій частині (46) змінну L_i. Тоді одержимо

$$Y_i = L_i F\left(k_i, k^{\lambda}\right), \tag{47}$$

де $k_i = \dfrac{K_i}{L_i}$ – капіталоозбрєність праці фірми.

Прибуток фірми може бути записаний у вигляді

$$\pi_i = L_i\left[F\left(k_i, k^{\lambda}\right) - (r+\delta)k_i - \omega\right], \tag{48}$$

де $r+\delta$ – ціна оренди капіталу, ω - ставка заробітної плати.

Оптимальна поведінка фірми полягає в максимізації прибутку π_i від аргументів k_i та L_i. Необхідні умови записуються у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_i}{\partial k_i} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial k_i} F\left(k_i, k^{\lambda}\right) = r + \delta, \\ \frac{\partial \pi_i}{\partial L_i} = 0 \quad &\Rightarrow \quad F\left(k_i, k^{\lambda}\right) - k_i \frac{\partial}{\partial k_i} F\left(k_i, k^{\lambda}\right) = \omega. \end{aligned} \tag{49}$$

Враховуючи, що завдяки лінійній однорідності

$$F\left(k_i, k^{\lambda}\right) = k^{\lambda} F\left(k_i k^{-\lambda}, 1\right) = k^{\lambda} f\left(k_i k^{-\lambda}\right), \tag{50}$$

то рівності (49) набувають вигляду

$$\begin{gathered} f'\left(k_i k^{-\lambda}\right) = r + \delta, \\ k^{\lambda} f\left(k_i k^{-\lambda}\right) - k_i f'\left(k_i k^{-\lambda}\right) = \omega. \end{gathered} \tag{51}$$

З першого співвідношення (51) визначається норма дохідності r, а з другого співвідношення (51) знаходиться ставка зарплати ω.

У рівновазі всі фірми знаходяться в однакових умовах, так що справедливі рівності $k_i = k$ та $K = kL$. Тоді можемо записати умови (51) в агрегованому вигляді

$$\begin{gathered} f'\left(k^{1-\lambda}\right) = r + \delta, \\ k^{\lambda} f\left(k^{1-\lambda}\right) - k f'\left(k^{1-\lambda}\right) = \omega. \end{gathered} \tag{52}$$

Розглянемо агреговану задачу соціального управляючого, що полягає в максимізації агрегованого прибутку

$$\pi = L\left[F\left(k, k^{\lambda}\right) - (r+\delta)k - \omega\right]$$

або

$$\pi = L\left[k^{\lambda} f\left(k^{1-\lambda}\right) - (r+\delta)k - \omega\right]. \tag{53}$$

Умови максимізації прибутку (53) записуються у вигляді

$$\frac{\partial \pi}{\partial k}=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot \frac{f\left(k^{1-\lambda}\right)}{k^{1-\lambda}}+(1-\lambda) f'\left(k^{1-\lambda}\right)=r+\delta,$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial L}=0 \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)k\left[\frac{f\left(k^{1-\lambda}\right)}{k^{1-\lambda}}-f'\left(k^{1-\lambda}\right)\right]=\omega. \tag{54}$$

При цьому у випадку $\lambda=0$ маємо умови

$$f'(k)=r+\delta,$$
$$f(k)-kf'(k)=\omega. \tag{55}$$

що відповідає випадку неокласичної виробничої функції $F(K,L)$. У випадку ж $\lambda=1$ маємо умови

$$f(1)=r+\delta,$$
$$0=\omega, \tag{56}$$

що відповідає випадку *АК*-моделі .

Вплив коефіцієнта λ в параметричній моделі (3) чітко видно з умов оптимізації агрегованого прибутку (54). По-перше, аргументом в рівностях (54) є величина $k^{1-\lambda}=\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\lambda}$. По-друге, основними елементами в цих співвідношеннях є середній продукт $\frac{f\left(k^{1-\lambda}\right)}{k^{1-\lambda}}$ та граничний продукт $f'\left(k^{1-\lambda}\right)$. По-третє, при збільшенні λ від 0 до 1 вплив середнього продукту на величину доходності $R=r+\delta$ збільшується, а вплив граничного продукту на цю величину зменшується. По-четверте, при збільшенні параметра λ від нуля до одиниці ставка заробітної плати зменшується аж до нуля.

Розглянемо агреговану модель оптимального економічного зростання для параметричної виробничої функції (3) при заданому критерії максимуму повної корисності (22), бюджетному обмеженні (16) з початковою умовою $a(0)$ та умові трансверсальності (23). Для функції корисності з сталою еластичністю заміщення (29) умови оптимальності приводяться до вигляду (30). Активи на душу населення $a=k$. Тоді маємо

$$\dot{k}=(r-n)k+\omega-c\,, \tag{57}$$

звідки

$$\dot{k}=\left[\lambda\frac{f\left(k^{1-\lambda}\right)}{k^{1-\lambda}}+(1-\lambda)f'\left(k^{1-\lambda}\right)-\delta-n\right]k+$$

$$+(1-\lambda)k\left[\frac{f\left(k^{1-\lambda}\right)}{k^{1-\lambda}}-f'\left(k^{1-\lambda}\right)\right]-c$$

або

$$\dot{k}=\left[\frac{f\left(k^{1-\lambda}\right)}{k^{1-\lambda}}-(n+\delta)\right]k-c\,. \tag{58}$$

Отже, маємо

$$\dot{k}=k^{\lambda}f\left(k^{1-\lambda}\right)-(n+\delta)k-c\,. \tag{59}$$

З умови оптимальності (35) отримуємо

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\theta}\left[\lambda\frac{f\left(k^{1-\lambda}\right)}{k^{1-\lambda}}+(1-\lambda)f'\left(k^{1-\lambda}\right)-\rho\right]. \tag{60}$$

Розглянемо вираз для темпу приросту k в рівнянні Солоу-Свена

$$\dot{k}=\left[s\frac{f\left(k^{1-\lambda}\right)}{k^{1-\lambda}}-(n+\delta)\right]k\,, \tag{61}$$

де $0\le s\le 1$ – норма збереження. З умови (61) випливає

$$\frac{\dot{k}}{k} = s\frac{f\left(k^{1-\lambda}\right)}{k^{1-\lambda}} - (n+\delta)\,. \tag{62}$$

Якщо стаціонарний стан існує, то пов'язаний з ним темп приросту $\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)^*$ сталий за визначенням. Ключова умова ендогенного стаціонарного зростання, як відомо, полягає в тому, щоб

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f\left(k^{1-\lambda}\right)}{k^{1-\lambda}} = \lim_{k\to\infty} f'\left(k^{1-\lambda}\right) > \frac{n+\delta}{s}\,. \tag{63}$$

У нас при $0 \le \lambda < 1$ буде

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f\left(k^{1-\lambda}\right)}{k^{1-\lambda}} = \lim_{k\to\infty} f'\left(k^{1-\lambda}\right) = 0\,. \tag{64}$$

Тому стаціонарний стан $k^*(\lambda) > 0$ існує та визначається рівнянням

$$s\frac{f\left(k^{1-\lambda}\right)}{k^{1-\lambda}} = (n+\delta)\,. \tag{65}$$

Очевидно, що

$$\left[k^*(\lambda)\right]^{1-\lambda} = k^*(0)\,.$$

Отже, функція

$$k^*(\lambda) = \left[k^*(0)\right]^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

при природній умові $k^*(0) > 1$ є зростаючою функцією по λ, а при $\lambda \to 1$ буде $k^*(\lambda) \to \infty$. Отже, модель (3) є неокласичною при $0 \le \lambda < 1$, яка при $\lambda = 1$ перетворюється на *АК*-модель.

Література

1. Ramsey F. A Mathematical Theory of Saving. [Текст] / F. Ramsey // Economic Journal, 38, December, 1928. - 543-559 p.
2. Барро Р.Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост. [Текст] / Р.Дж. Барро, Х. Сала-и-Мартин. – Москва: Бином. Лаборатория знаний, 2010. – 824 с
3. Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth. [Текст] / R.M. Solow // Quarterly Journal of Economic, 70, February, 1956. – 65-94 p.
4. Swan T.W. Economic Growth and Capital Accumulation. [Текст] / T.W. Swan // Economic Record, 32, November, 1956. – 334-361 p.
5. Cass D. Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. [Текст] / D. Cass // Review of Economic Studies, 32, July, 1965. – 233-240 p.
6. Koopmans T.C. On the Concept of the Optimal Economic Growth. [Текст] / T.C. Koopmans // The Econometric Approach to Development Planning. – Amsterdam, North Holland, 1965.
7. Romer P.M. Increasing Returns and Long-Run Growth. [Текст] / P.M. Romer // Journal of Political Economy, 94, October, 1986. – 1002-1037 p.
8. Lucas R.E. On the Mechanics of Economic Development. [Текст] / R.E. Lucas // Journal of Monetary Economics, 22, July, 1988. – 3-42 p.
9. Frankel M. The Production Function in Allocation and Growth. A Synthesis. [Текст] / M. Frankel // American Economic Review, 52, December, 1962. – 995-1022 p.
10. Griliches Z. Research Expenditures and Growth Accounting. [Текст] / Z. Griliches // Science and Technology in Economic Growth. – New Yorek, MacMillan, 1973.
11. Von Neumann J. Uber ein Okonomisches Gleichhungssystem und eine Veraligemeinerung des Brouwerschen. [Текст] / J. Von Neumann // Ergelmisse eines Mathematishe Kolloquiums, 8, 1937.
12. Knight F.H. Diminishing Returns from Investment. [Текст] / F.H. Knight // Journal of Political Economy, 52, March, 1944. – 26-41 p.