

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.01.022>

УДК 539.3

А.М. Багно

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: alexbag2016@gmail.com

О локализации поверхностных волн в слое идеальной сжимаемой жидкости, взаимодействующем с упругим полупространством

Представлено академиком НАН Украины А.Н. Гузем

На основании трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Эйлера для жидкой среды исследовано распространение квазилэмбовских волн в системе: слой идеальной сжимаемой жидкости — упругое полупространство. Построены дисперсионные кривые для нормальных волн в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние толщины жидкого слоя на дисперсию фазовых скоростей квазилэмбовских мод в гидроупругом волноводе. Исследованы свойства локализации поверхностных волн в упруго-жидкостных волноводах. Числовые результаты приведены в виде графиков и дан их анализ.

Ключевые слова: дисперсия волн, фазовая скорость, упругое полупространство, слой идеальной сжимаемой жидкости, квазилэмбовские моды, локализация поверхностных волн.

Задача о распространении нормальных волн в слое жидкости, взаимодействующем с упругим полупространством, принадлежит к классическим задачам механики. Ей посвящена обширная библиография. Вместе с тем имеются еще вопросы, изученные недостаточно полно и до настоящего времени остающиеся актуальными. Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости и модели идеальной сжимаемой жидкости, а также с привлечением более общих моделей твердых и жидких сред, приведены в [1–4]. Значительное практическое использование акустических волн ставит задачу изучения дисперсионных характеристик и свойств локализации квазилэмбовских мод в гидроупругом волноводе, состоящем из упругого полупространства и слоя идеальной сжимаемой жидкости, в широком диапазоне частот, охватывающем как длинноволновую, так и коротковолновую части спектра для толщин жидкого слоя соизмеримых с длиной волны. В настоящей работе для анализа дисперсионных характеристик и локализации нормальных волн в системе жидкий слой — упругое полупространство в широком интервале частот используются трехмерные линеаризованные уравнения Эйлера для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. При этом предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя. В качестве подхода выбраны постановки задач

и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости и упругого тела, предложенные в работах [5–9].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о распространении нормальных волн в гидроупругой системе, состоящей из упругого полупространства и жидкого слоя. Решение получим с привлечением трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Эйлера для жидкости, находящейся в состоянии покоя. В рамках принятых моделей основные соотношения для системы изотропное упругое тело — идеальная сжимаемая жидкость будут иметь вид [5–9]:

1) упругое тело

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0; \quad \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad z_k \in V_1;$$

2) идеальная сжимаемая жидкость

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0, \quad z_k \in V_2;$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2; \quad a_0 = \text{const}, \quad z_k \in V_2;$$

$$P_{ij} = -\delta_{ij} p.$$

При этом специфику взаимодействия упругих и жидких сред отражают динамические $\sigma_{ij} = P_{ij}$, $z_k \in S$ и кинематические $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}$, $z_k \in S$ граничные условия, задаваемые на поверхности контакта твердых тел и жидкости S .

Здесь введены следующие обозначения: u_i — компоненты вектора перемещений твердого тела \mathbf{u} ; ρ — плотность материала упругого полупространства; λ и μ — константы Ляме материала упругого тела; v_i — составляющие вектора возмущений скорости жидкости \mathbf{v} ; ρ^* и p — возмущения плотности и давления в жидкости; ρ_0 и a_0 — плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; P_{ij} и σ_{ij} — составляющие напряжений, соответственно, в жидкости и упругом теле; V_1 и V_2 — объемы занимаемые, соответственно, упругим телом и жидкостью; S — поверхность контакта упругой и жидкой сред.

Далее предположим, что изотропное упругое полупространство занимает объем: $-\infty < z_1 < \infty$, $-\infty < z_2 \leq 0$, $-\infty < z_3 < \infty$ и контактирует со слоем идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей объем: $-\infty < z_1 < \infty$, $0 \leq z_2 \leq h$, $-\infty < z_3 < \infty$. Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси oz_3 . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости oz_1z_2 .

Воспользуемся представлениями общих решений уравнений движения упругих и жидких сред, полученными в работах [5–9]. Для плоского случая, который рассматривается далее, общие решения будут такими:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1; \quad v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t},$$

где введенные функции χ_1 и χ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0.$$

Данная задача характеризуется следующими динамическими и кинематическими граничными условиями:

$$\sigma_{12} \Big|_{z_2=0} = 0; \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=0} = P_{22} \Big|_{z_2=0}; \quad P_{22} \Big|_{z_2=h} = 0; \quad v_2 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z_2=0}. \quad (1)$$

Далее параметры, характеризующие процесс распространения волн, разыскиваем в классе бегущих волн и выбираем в виде

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)] \quad (j = 1, 2),$$

где k — волновое число; ω — круговая частота; $i^2 = -1$.

Заметим, что выбранный в работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаем две задачи Штурма — Лиувилля на собственные значения для уравнений движения жидкости и упругого тела, а также определяем соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (1) получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования. Исходя из условия существования нетривиального решения, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \| e_{lm}(c, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \omega h/c_s) \| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 4}), \quad (2)$$

где c — фазовая скорость нормальных волн; c_s ($c_s^2 = \mu/\rho$) — скорость волны сдвига в упругом теле; μ — модуль сдвига материала упругого полупространства; h — толщина слоя жидкости.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и сдвиговая волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхности контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе.

Отметим, что полученное дисперсионное уравнение (2) является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев. В частности, если a_0 устремить к бесконечности, то (2) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия с идеальной несжимаемой жидкостью. Если положить $\rho_0 = 0$, получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [1, 4, 5]. При $\rho_0 \neq 0$ и $h \rightarrow \infty$ равенство (2) перейдет в уравнение Стоунли — Шольте [1, 4, 5].

Числовые результаты и их анализ. В дальнейшем дисперсионное уравнение (2) решаем численно. При этом расчеты проводим для двух гидроупругих систем, состоящих из ре-

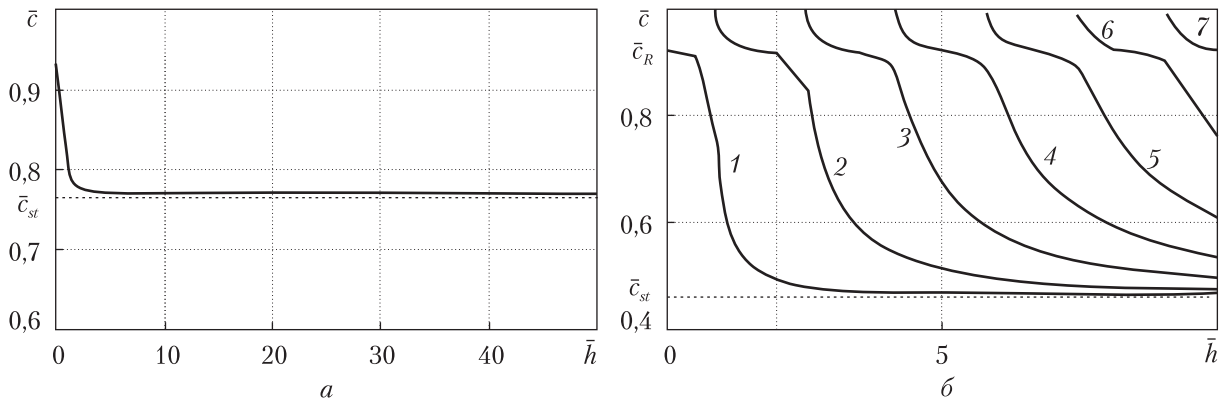


Рис. 1

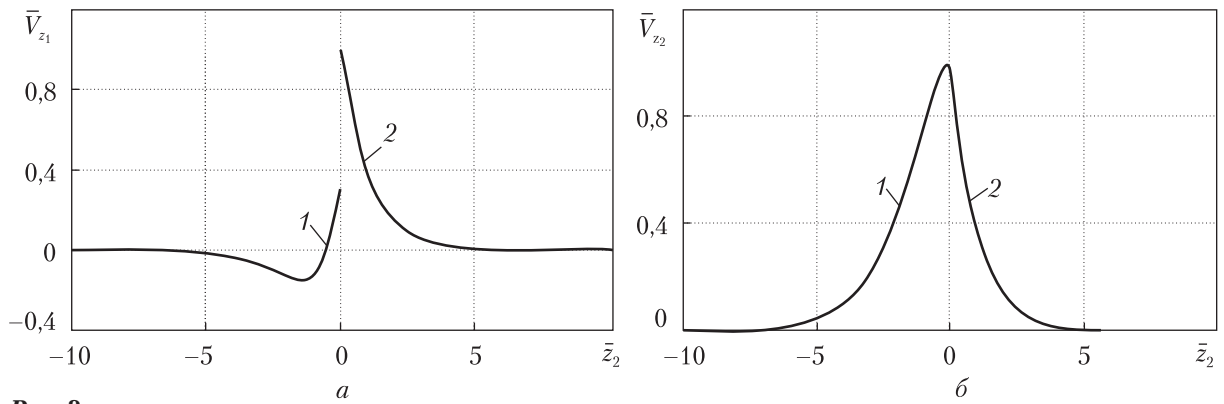


Рис. 2

альных упругих тел и жидкости. Первая состоит из органического стекла и воды. Она характеризуется следующими параметрами: упругое тело — $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 3,96 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$; жидкость — $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$. У этого волновода материал упругого тела (органическое стекло) является жестким. Вторая представляет собой волновод из стали и воды. При этом параметры выбираем такими: упругое тело — $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; жидкость — $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 0,463021$. Этот волновод отличается тем, что материал упругого тела (сталь) относится к разряду более жестких, чем органическое стекло.

Результаты вычислений представлены на рис. 1–3. При этом на рис. 1, а и рис. 2 представлены графики для упругого полупространства из органического стекла (менее жесткий материал) и воды ($\bar{a}_0 = 1,152595$). На рис. 1, б и 3 приведены графики для упругого полупространства из стали (более жесткий материал) и слоя воды.

На рис. 1 изображены дисперсионные кривые для гидроупругих волноводов, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских мод \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) от безразмерной величины толщины слоя жидкости (частоты) \bar{h} ($\bar{h} = \omega h/c_s$).

На рисунках для наглядности штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первых мод при возрастании толщины (частоты) жидкого слоя \bar{h} .

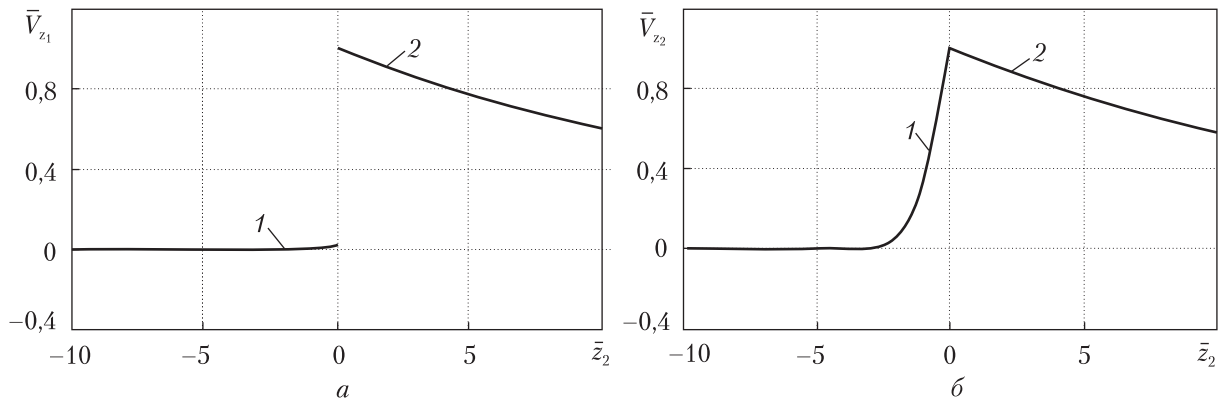


Рис. 3

Графики, представленные на рис. 2, отражают распределение смещений для гидроупругого волновода, состоящего из органического стекла ($\bar{z}_2 \leq 0$) и воды ($0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}$). На них приведены зависимости нормированных величин продольных $V_{\bar{z}_1}$ (рис. 2, а) и поперечных $\bar{V}_{\bar{z}_2}$ (рис. 2, б) смещений (скоростей $\partial u_i / \partial t$ и v_i) от безразмерной поперечной координаты \bar{z}_2 для поверхностной волны 1 (рис. 1, а). При нормировании величины указанных смещений отнесены к их наибольшим значениям $|\bar{V}_{z_1} \max|$ и $|\bar{V}_{z_2} \max|$.

Аналогичные зависимости для гидроупругой системы сталь – вода приведены на рис. 3. Заметим, что разрыв продольных смещений в упругом теле (кривая 1) и в жидкости (кривая 2) на границе контакта сред ($\bar{z}_2 = 0$) (рис. 2, а и 3, а) обусловлен невязкостью (идеальностью) жидкости. Кроме того, графики, приведенные на рис. 2 и 3, получены для первой нижней квазиповерхностной моды 1 в коротковолновой части спектра при частоте (толщине) $\bar{h} = 100$.

Анализ числовых результатов. Из графика, приведенного на рис. 1, а, следует, что скорость поверхностной волны в упругом полупространстве из органического стекла (менее жесткий материал), взаимодействующем со слоем воды, изменяется от скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933557$) при $\bar{h} \rightarrow 0$ до скорости волны Стоунли – Шольте \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,7717101$) при $\bar{h} \rightarrow \infty$. Вычисления показали, что при $\bar{h} = 100$ фазовая скорость этой моды лишь незначительно отличается от скорости волны Стоунли и поэтому ее можно считать поверхностной. Из графиков распределения амплитуд смещений (скоростей), представленных на рис. 2, видно, что движения этой моды при $\bar{h} = 100$ происходят как в упругом теле, так и в жидкости. При этом глубина проникновения ее в упругое полупространство больше, чем в жидкость.

Рис. 1, б характеризует поведение дисперсионных кривых для системы упругое полупространство из стали (более жесткий материал) – слой воды. Как видно из графиков, фазовая скорость первой моды изменяется от скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923007$) при $\bar{h} \rightarrow 0$ до скорости волны Стоунли – Шольте \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,462886$) при $\bar{h} \rightarrow \infty$. Скорости мод высокого порядка при частотах их зарождения равны скорости волны сдвига в упругом полупространстве \bar{c}_s и в дальнейшем с увеличением толщины жидкого слоя (частоты) \bar{h} стремятся к скорости волны звука в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,463021$). Как и в предыдущем случае, проведенные расчеты показали, что при $\bar{h} = 100$ скорость квазиповерхностной моды 1 практически достигает величины скорости волны Стоунли. Из графиков смещений (скоростей), приведенных на рис. 3, видно, что глубина проникновения этой моды в жидкость

значительно больше глубины проникновения ее в упругое тело. При этом движения в этой моде при $\bar{h} = 100$ происходят, главным образом, в жидком слое.

В работе [10] показано, что фазовая скорость и структура волны Стоунли — Шольте при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидком и скоростью волны Рэлея в твердом полупространствах. При этом, если $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$, то глубина проникновения волны Стоунли в упругое полупространство больше глубины проникновения в жидкое полупространство. В случае выполнения условия $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$ глубина проникновения волны Стоунли в жидкость больше глубины проникания в твердое тело. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы органическое стекло (менее жесткий материал) — вода таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 1,152595$) больше скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933557$). Для пары сталь (более жесткий материал) — вода имеет место соотношение $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,923007$. Из графиков, приведенных на рис. 2 и 3, следует, что полученные результаты согласуются с выводами статьи [10]. Это свидетельствует о том, что эти закономерности волн характерны не только при взаимодействии жидкого и твердого полупространств, но также справедливы и для низшей поверхностной моды, распространяющейся в гидроупругой системе слой жидкости — упругое полупространство.

Заключение. Анализ полученных результатов показал, что низшая мода с увеличением частоты трансформируется в поверхностную волну Стоунли и ее локализация в средах зависит от соотношения между скоростью волны звука в жидком слое и скоростью волны Рэлея в упругом полупространстве. При этом в случае контакта жидкости с менее жестким материалом ($\bar{a}_0 > \bar{c}_R$) значительная часть потока энергии сосредотачивается в твердом теле. С уменьшением этого соотношения поток энергии перемещается из упругого тела в жидкий слой. При $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$ жидкий слой становится основным волноводом, по которому осуществляется перенос большей части волновой энергии, а вклад упругого тела в общий поток энергии становится незначительным.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 288 с.
2. Викторов И.А. К расчету фазовых скоростей поверхностных волн на границе твердого полупространства с жидким слоем. *Акуст. журн.* 1977. **23**, № 6. С. 947–948.
3. Bagno A.M., Guz A.N. Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey). *Int. Appl. Mech.* 1997. **33**, No 6. P. 435–463.
4. Guz A. N., Zhuk A. P., Bagno A. M. Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.* 2016. **52**, No 5. P. 449–507.
5. Guz A. N. Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1980. **16**, No 3. P. 175–190.
6. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: 2 тома. Киев: Наук. думка, 1986. Т. 2. 536 с.
7. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.
8. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
9. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. 428 p.
10. Волькенштейн М.М., Левин В.М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела. *Акуст. журн.* 1988. **34**, № 4. С. 608–615.

Поступило в редакцию 21.02.2017

REFERENCES

1. Viktorov, I. A. (1981). Sound surface waves in solids. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Viktorov, I. A. (1977). To computation of phase velocities of surface waves on the interface of solid semi-space with a liquid layer. *Acoustic J.*, 23, No. 6, pp. 947-948 (in Russian).
3. Bagno, A.M., Guz, A.N. (1997). Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey). *Int. Appl. Mech.*, 33, No. 6, pp. 435-463.
4. Guz, A. N., Zhuk, A. P., Bagno, A. M. (2016). Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.*, 52, No. 5, pp. 449-507.
5. Guz, A. N. (1980). Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 16, No. 3, pp. 175-190.
6. Guz, A. N. (1986). Elastic waves in bodies with initial stresses. 2 vols. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
7. Guz, A. N. (2004). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Kiev: A.S.K. (in Russian).
8. Guz, A. N. (1998). Dynamics of compressible viscous fluid. Kiev: A.S.K. (in Russian).
9. Guz, A. N. (2009). Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
10. Volkenstein, M. M. & Levin, V. M. (1988). Structure of Stoneley wave on the boundary of a viscous liquid and a solid. *Acoustic J.*, 34, No. 4, pp. 608-615 (in Russian).

Received 21.02.2017

O.M. Bazno

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: alexbag2016@gmail.com

ПРО ЛОКАЛІЗАЦІЮ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ У ШАРІ ІДЕАЛЬНОЇ
СТИСЛИВОЇ РІДИНИ, ЩО ВЗАЄМОДІЄ З ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ

На основі тривимірних лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла та лінеаризованих рівнянь Ейлера для рідкого середовища досліджено поширення квазілембовських хвиль у системі пружний півпростір — шар ідеальної стисливої рідини. Побудовано дисперсійні криві для нормальних хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив товщини шару ідеальної стисливої рідини на дисперсію фазових швидкостей квазілембовських мод у гідропружному хвилеводі. Досліджено властивості локалізації поверхневих хвиль у пружно-рідинних хвилеводах. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

Ключові слова: дисперсія хвиль, фазова швидкість, пружний півпростір, шар ідеальної стисливої рідини, квазілембовські моди, локалізація поверхневих хвиль.

O.M. Bahno

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: alexbag2016@gmail.com

ON THE LOCALIZATION OF SURFACE WAVES IN THE LAYER
OF AN IDEAL COMPRESSIBLE FLUID INTERACTING WITH THE ELASTIC HALF-SPACE

The propagation of quasi-Lamb waves in the system “layer of ideal compressible liquid — elastic half-space” is studied, by using the three-dimensional equations of the classical elasticity theory for a solid body and the linearized Euler equations for a fluid. The dispersion curves for normal waves over a wide range of frequencies are constructed. The influence of the thickness of the layer of an ideal compressible fluid on the dispersion of the phase velocity of quasi-Lamb modes in a hydroelastic waveguide is analyzed. The localization properties of the surface waves in elastic-fluid waveguides are studied. The numerical results obtained are presented in the form of plots and analyzed.

Keywords: dispersion of waves, phase velocity, elastic half-space, layer of an ideal compressible fluid, quasi-Lamb modes, localization of surface waves.