

# АНАЛІЗ, ОЦІНКА ТА ПРОГНОЗУВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.2: 330.43

Ю.С. ХАРИН, С.Н. СТАЛЕВСКАЯ

## РОБАСТНОСТЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ МАЛОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

**Анотація.** У статті розроблена нова малопараметрична модель авторегресії порядку  $s$  з  $r$  частковими зв'язками  $AR(s,r)$ , побудована оцінка максимальної правдоподібності параметрів моделі  $AR(s,r)$ , розглянуто її властивості. Для часових рядів малої тривалості спостереження показано перевагу використання моделі  $AR(s,r)$  в порівнянні з класичною повної моделлю. Представлені результати комп'ютерних експериментів на модельних і реальних економіко-статистичних даних.

**Ключові слова:** авторегресія, малопараметрична модель, оцінка максимальної правдоподібності, оптимальна прогнозує статистика.

**Аннотация.** В статье предложена новая малопараметрическая модель временного ряда – авторегрессия порядка  $s$  с  $r$  частичными связями  $AR(s,r)$ , построена оценка максимального правдоподобия параметров модели  $AR(s,r)$ , исследованы ее свойства. Для временных рядов малой длительности наблюдения показано преимущество использования модели  $AR(s,r)$  по сравнению с классической полной моделью при прогнозировании будущих значений временного ряда. Представлены результаты компьютерных экспериментов на модельных и реальных экономико-статистических данных.

**Ключевые слова:** авторегрессия, малопараметрическая модель, оценка максимального правдоподобия, оптимальная прогнозирующая статистика.

**Abstract.** This paper is devoted to new small-parametric model of time series – autoregressive model of order  $s$  with  $r$  partial connections  $AR(s, r)$ , the maximum likelihood estimator is constructed for parameters of the  $AR(s, r)$ -modes, its properties are analyzed. The advantages of this model  $AR(s, r)$  for short-duration time-series are showed in comparison with classical full model  $AR(s)$  for statistical forecasting of future values. Results of computer experiments are presented for simulated and economic time series.

**Keywords:** autoregression, small-parametric model, maximum likelihood estimator, optimal forecasting statistic.

### Введение

При моделировании и анализе экономических систем и процессов часто возникают задачи прогнозирования стохастических процессов с «длинной памятью», когда текущие значения зависят от  $s \gg 1$  предыдущих значений (например, на финансовых рынках [1–2], в розничной торговле [3–4]). При попытке построить авторегрессионную модель  $AR(s)$  порядка  $s$  может оказаться, что количество параметров  $s$  модели соизмеримо с количеством наблюдений  $T$ . Построение традиционных МНК-оценок параметров модели  $AR(s)$  по  $T$

наблюдениям приводит к неустойчивым оценкам, и, как следствие, к ненадежным прогнозам. В связи с этим актуальной является проблема построения робастных прогнозирующих статистик с использованием малопараметрических моделей. В [5–6] этот подход был предложен и успешно использован для процессов, описываемых цепями Маркова высокого порядка  $s$ .

## 1. AR( $s$ ) модель, ее искажения и робастные прогнозирующие статистики

Авторегрессионная модель  $s$ -го порядка AR( $s$ ) для наблюдаемого временного ряда  $x_t \in \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$  определяется стохастическим разностным уравнением [7, 8]:

$$x_t = \sum_{i=1}^s \theta_i x_{t-i} + \xi_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1)$$

где  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)' \in \mathbf{R}^s$  — вектор-столбец  $s$  неизвестных коэффициентов авторегрессии;  $\{\xi_t\}$  — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие гауссовское (нормальное) распределение вероятностей  $N(0, \sigma^2)$  с нулевым средним  $E\{\xi_t\} = 0$  и неизвестной конечной дисперсией  $D\{\xi_t\} = \sigma^2$ .

Эта гипотетическая модель, часто используемая при эконометрическом моделировании, на практике выполняется лишь приближенно, с некоторыми искажениями. Приведем краткий обзор часто встречающихся на практике типов искажений авторегрессионной модели AR( $s$ ), более полный обзор имеется в [9, 10]:

- D<sub>1</sub> – параметрические искажения модели, когда для прогнозирования вместо неизвестного истинного вектора параметров  $\theta$  используется некоторая оценка  $\tilde{\theta} = \theta + \Delta\theta$ , где вектор  $\Delta\theta$  – это так называемая ошибка спецификации (misspecification error);
- D<sub>2</sub> – билинейные искажения модели [11], когда в правой части (1) присутствуют билинейные члены относительно  $\{x_{t-i}\}$  и  $\{\xi_{t-j}\}$ ;
- D<sub>3</sub> – неоднородность случайных ошибок  $\{\xi_t\}$  по среднему и дисперсии [9];
- D<sub>4</sub> – наличие аддитивных выбросов и выбросов в «инновационном процессе»  $\xi_t$ ;
- D<sub>5</sub> – наличие пропущенных значений в последовательности наблюдений  $\{x_t\}$ .

Наличие искажений гипотетической модели AR( $s$ ) приводит к неустойчивости «оптимальной» прогнозирующей статистики, построенной в расчете на адекватность гипотетической модели: среднеквадратическая ошибка (риск) прогнозирования существенно превосходит ожидаемое минимальное значение риска для гипотетической модели. Швейцарским математиком Питером Хьюбером [12] было предложено строить так называемые устойчивые, или робастные (от англ. слова «robust», означающего «крепкий», «стойкий», «устойчивый») прогнозирующие статистики, для которых риск «слабочувствителен» к малым искажениям гипотетической модели AR( $s$ ).

В [9, 10] развита теория построения робастных прогнозирующих статистик для различных моделей временных рядов и различных типов искажений. В последующих разделах статьи для построения робастной прогнозирующей статистики в условиях искажений типа D<sub>1</sub> для AR( $s$ ) предлагается использовать малопараметрическую модель AR( $s, r$ ).

## 2. Малопараметрическая модель AR( $s, r$ )

Модель авторегрессии порядка  $s$  с  $r$  частичными связями AR( $s, r$ ) определяется следующим стохастическим уравнением:

(2)

$$x_t = \theta_{m_1} x_{t-m_1} + \theta_{m_2} x_{t-m_2} + \dots + \theta_{m_r} x_{t-m_r} + \xi_t = \sum_{i \in M} \theta_{m_i} x_{t-m_i} + \xi_t,$$

где  $1 \leq r \leq s$  – число частичных связей,  $M = \{m_1, \dots, m_r\}$  – упорядоченный набор целочисленных индексов  $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_r = s$ , который будем называть шаблоном связей. Соотношение (2) показывает, что состояние процесса  $x_t$  в момент времени  $t$  зависит не от всех  $s$  предыдущих состояний, как в уравнении (1), а лишь от  $r$  состояний, индексы которых определяются шаблоном  $M$ . Если  $r=s$ , то имеем полное число связей, а модель (2) переходит в полносвязную модель (1):  $\text{AR}(s, s) \equiv \text{AR}(s)$ . Число параметров модели  $d(\text{AR}(s, r)) = 2r$ , и при  $r \ll s$  имеется значительный выигрыш по сравнению с числом параметров полной модели  $d(\text{AR}(s)) = s + 1$ .

### 3. Статистическое оценивание параметров $\text{AR}(s, r)$

Введем следующие обозначения:  $X_t = (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-s+1})' \in \mathbf{R}^s$  –  $s$ -вектор предыстории наблюдений от момента  $t$  до момента  $t - s + 1$ ;  $u_t = (\xi_t, 0, \dots, 0)' \in \mathbf{R}^s$  – случайный  $s$ -вектор;  $\theta_{(r)} = (\theta_i)_{i \in M} = (\theta_{m_1}, \dots, \theta_{m_r})' \in \mathbf{R}^r$  –  $r$ -вектор авторегрессионных коэффициентов для модели  $\text{AR}(s, r)$  (2); штрих означает транспонирование;  $\theta_{(s,r)} = (\tilde{\theta}_i) \in \mathbf{R}^s$ :  $\tilde{\theta}_i = \begin{cases} \theta_i, & i \in M \\ 0, & i \notin M \end{cases}$  –

«усеченный»  $s$ -вектор авторегрессионных коэффициентов, составленный следующим образом: если индекс параметра  $i$  не включен в шаблон  $M$ , то соответствующая координата вектора  $\theta_{(s,r)}$  равна нулю, если включен, то совпадает со значением параметра  $\theta_i$ ;  $(s \times s)$ -матрица  $C$  и  $(s \times s)$ -матрица  $C_{(s,r)}$ :

$$C = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_s \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{(s,r)} = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1 & \tilde{\theta}_2 & \dots & \tilde{\theta}_s \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

$A = (a_{ij})$  –  $(s \times s)$ -матрица, такая, что  $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \in M \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ ,  $A_r$  –  $(r \times s)$ -матрица, полученная

из матрицы  $A$  путем удаления  $s-r$  нулевых строк, а  $B$  –  $(s \times s)$ -матрица, дополняющая матрицу  $A$  до единичной:  $A + B = \text{Id}_s$  (здесь  $\text{Id}_s$  – единичная  $(s \times s)$ -матрица, по диагонали которой стоят единицы).

Очевидно, что в силу принятых обозначений выполняются следующие соотношения:

$$A_r A_r' = \text{Id}_r, \quad A_r' A_r = A, \quad \text{rank}(A_r) = \text{rank}(A) = r,$$

$$\theta_{(s,r)} = A_r' \theta_{(r)}, \quad \theta_{(r)} = A_r \theta_{(s,r)}, \quad \theta_{(s,s)} = \theta. \quad (3)$$

Используя введенные обозначения, математические модели (1) и (2) можно представить в следующих эквивалентных матричных формах:

– модель AR(s):

$$x_t = \theta' X_{t-1} + \xi_t, \quad X_t = C X_{t-1} + u_t, \quad (4)$$

– модель AR(s,r):

$$x_t = \theta'_{(s,r)} X_{t-1} + \xi_t, \quad x_t = \theta'_{(r)} A_r X_{t-1} + \xi_t, \quad X_t = C_{(s,r)} X_{t-1} + u_t. \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть наблюдается конечная реализация длительностью  $T+s$  процесса AR(s,r), определяемая (2):  $\{x_t : t = -s+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, T\}$ . Если  $(r \times r)$ -матрица  $\sum_{t=1}^T A_r X_{t-1} X'_{t-1} A'_r$  невырождена, то оценками максимального правдоподобия для параметров  $\theta_{(r)}$  и  $\sigma^2$  для модели (2) в случае гауссовости случайных ошибок  $\{\xi_t\}$  являются статистики:

$$\hat{\theta}_{(r)} = \left( \sum_{t=1}^T A_r X_{t-1} X'_{t-1} A'_r \right)^{-1} \times \sum_{t=1}^T A_r X_{t-1} x_t, \quad (6)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\theta}'_{(r)} A_r X_{t-1})^2. \quad (7)$$

Доказательство. В силу модельных предположений логарифмическая функция правдоподобия для модели (2) имеет следующий вид:

$$l(\theta_{(r)}, \sigma) = -T \times \ln(\sigma \sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T (x_t - \theta'_{(r)} A_r X_{t-1})^2.$$

Дифференцируя функцию  $l(\theta_{(r)}, \sigma)$  по  $\theta_{(r)}$  и по  $\sigma^2$  и приравнивая к нулю полученные производные, приходим к соотношениям (6) и (7).

Теорема 2. Пусть  $\{x_t\}$  – временной ряд, удовлетворяющий модели (2) для  $t = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , и пусть корни характеристического уравнения  $1 - \sum_{i \in M} \theta_i z^i = 0$  лежат вне единичного круга, а случайные величины  $\{\xi_t\}$  – независимые и одинаково распределенные гауссовские случайные величины с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ . Тогда оценки максимального правдоподобия  $\hat{\theta}_{(r)}$  и  $\hat{\sigma}^2$ , определяемые (6), (7), состоятельны в смысле сходимости по вероятности:  $\hat{\theta}_{(r)} \xrightarrow{P} \theta_{(r)}$ ,  $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$  при  $T \rightarrow \infty$ .

Доказательство теоремы проводится аналогично случаю AR(s) [7].

Теорема 3. В условиях теоремы 2 при  $T \rightarrow \infty$  случайный вектор  $\sqrt{T}(\hat{\theta}_{(r)} - \theta_{(r)})$  распределен асимптотически нормально с параметрами:

$$L\{\sqrt{T}(\hat{\theta}_{(r)} - \theta_{(r)})\} \rightarrow N(0, \sigma^2 F_{(s,r)}^{-1}),$$

где

$$F_{(s,r)} = A_r \left( \sum_{i=0}^{\infty} C_{(s,r)}^i \Sigma (C'_{(s,r)})^i \right) A_r', \quad \Sigma = E\{u_t u_t'\}.$$

Доказательство. Для временного ряда, описываемого моделью (2), (5), справедливо следующее представление:  $X_t = C_{(s,r)} X_{t-1} + u_t = \sum_{i=0}^{\infty} C_{(s,r)}^i u_{t-i}$ . Тогда

$$E\{X_t X_t'\} = \sum_{i=0}^{\infty} C_{(s,r)}^i \Sigma (C'_{(s,r)})^i, \quad A_r \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t X_t' \right) A_r' \xrightarrow{P} F_{(s,r)}, \quad E\{X_{t-1} u_t'\} = 0, \quad E\{X_{t-1} \xi_t'\} = 0.$$

Предельное распределение вектора

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{(r)} - \theta_{(r)}) = \sqrt{T} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T A_r X_{t-1} X_{t-1}' A_r' \right)^{-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T A_r X_{t-1} \xi_t$$

совпадает с предельным распределением вектора  $F_{(s,r)}^{-1} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T A_r X_{t-1} \xi_t$ . В силу леммы 5.5.6 и теоремы 7.7.7 [7] этот случайный вектор распределен асимптотически нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $\sigma^2 F_{(s,r)}^{-1}$ .

#### 4. Прогнозирование с использованием модели AR(s,r)

В случае если наблюдаемый временной ряд описывается моделью AR(s,r), и вектор параметров модели  $\theta_{(r)}$  известен, а также корни характеристического уравнения  $1 - \sum_{i \in M} \theta_i z^i = 0$  лежат вне единичного круга, тогда оптимальным (в среднеквадратическом смысле) прогнозом для  $x_{T+1}$  по предыдущим значениям  $X_T$  является прогноз [7]:

$$\hat{x}_{T+1}^* = \theta_{(r)}' A_r X_T; \quad (8)$$

при этом среднеквадратический риск для этой прогнозной статистики равен

$$v^* = E\left\{ \left( \hat{x}_{T+1}^* - x_{T+1} \right)^2 \right\} = \sigma^2.$$

На практике коэффициенты авторегрессии неизвестны, и тогда при прогнозировании используется их статистическая оценка  $\hat{\theta}_{(r)}$ :

$$\hat{x}_{T+1} = \hat{\theta}_{(r)}' A_r X_T. \quad (9)$$

Прогнозирование последующих значений  $x_{T+2}, x_{T+3}, \dots$  осуществляется рекурсивно [7–8] с использованием рекуррентных формул (8) и (9).

На практике часто неизвестен шаблон  $M$ . Для фиксированных  $s$  и  $r$  условно-оптимальный шаблон  $\hat{M}$  находится из условия минимизации выборочной вариации:

$$\hat{M} = \arg \min_{M \subset \{1, \dots, s\}, |M|=r} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \hat{\theta}'_{(s,r)} X_{t-1} - x_t \right)^2 \right\}. \quad (10)$$

Сравним теперь «малопараметрическую» прогнозирующую статистику (9) с традиционной прогнозирующей статистикой (на основе модели AR(s)):

$$\tilde{x}_{T+1} = \tilde{\theta}' X_T, \quad (11)$$

где  $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_i) \in \mathbf{R}^s$  – традиционная МНК-оценка [7, 8]:

$$\tilde{\theta} = \left( \sum_{t=1}^T X_{t-1} X'_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=1}^T X_{t-1} x_t,$$

вычисляемая при условии  $\left| \sum_{t=1}^T X_{t-1} X'_{t-1} \right| \neq 0$ . Для этого сравним среднеквадратические ошибки (риски) этих прогнозирующих статистик (9) и (11):

$$V\{\hat{x}_{T+1}\} = E\{(\hat{x}_{T+1} - x_{T+1})^2\}, \quad V\{\tilde{x}_{T+1}\} = E\{(\tilde{x}_{T+1} - x_{T+1})^2\}.$$

Прежде всего, заметим, что при  $r = s$  эти риски совпадают:

$$V\{\tilde{x}_{T+1}\} = V\{\hat{x}_{T+1}\}.$$

Далее в силу модельных предположений, принятых обозначений и (5), (9) для модели AR(s,r) имеем:

$$\begin{aligned} V\{\hat{x}_{T+1}\} &= E\left\{ \left( \hat{\theta}'_{(r)} A_r X_T - \theta'_{(r)} A_r X_T - \xi_{T+1} \right)^2 \right\} = E\left\{ \left( (\hat{\theta}_{(r)} - \theta_{(r)})' A_r X_T - \xi_{T+1} \right)^2 \right\} = \\ &= \sigma^2 + \text{tr} \left( E \left\{ A_r X_T X_T' A_r' (\hat{\theta}_{(r)} - \theta_{(r)}) (\hat{\theta}_{(r)} - \theta_{(r)})' \right\} \right). \end{aligned}$$

В силу теоремы 3 при  $T \rightarrow \infty$  получаем асимптотическое выражение этого риска

$$V\{\hat{x}_{T+1}\} \sim \sigma^2 \left( 1 + \frac{1}{T} \text{tr} (A_r F A_r' F_{(s,r)}^{-1}) \right) \sim \sigma^2 \left( 1 + O\left(\frac{r}{T}\right) \right). \quad (12)$$

Аналогично можно показать, что

$$V\{\tilde{x}_{T+1}\} \sim \sigma^2 \left( 1 + O\left(\frac{s}{T}\right) \right). \quad (13)$$

Из сравнения (12), (13) виден существенный выигрыш в величине риска от использования AR(s,r) модели по сравнению с AR(s) при  $s \sim T$  и  $r \ll s$ .

## 5. Численные эксперименты

### 5.1. Модельные данные

В  $i$ -ом эксперименте ( $i = 1, \dots, N$ ) сгенерируем временной ряд  $\{x_t^{(i)}\}$ , описываемый моделью AR(20), согласно формуле (1), в котором  $\theta_j = (-1)^j \times 0.002$  для  $j \in \{1, 2, \dots, 19\} \setminus \{10\}$ ,  $\theta_{10} = -0.3$ ,  $\theta_{20} = 0.4$ ,  $\sigma^2 = 0.25$ . Пример реализации такого процесса приведен на рис. 1.

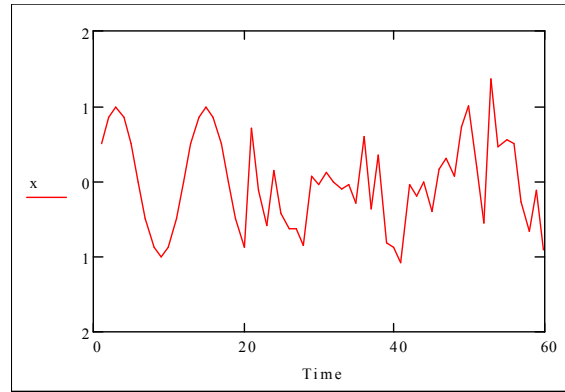


Рисунок 1 – Реализация процесса  $\{x_t\}$

Погрешность оценивания будем характеризовать следом выборочной матрицы вариаций:

$\text{tr} \hat{V}_{(s,r)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\theta - \hat{\theta}_{(s,r)}^{(i)})' (\theta - \hat{\theta}_{(s,r)}^{(i)})$ , где  $N = 1000$  – количество экспериментов,  $\hat{\theta}_{(s,r)}^{(i)}$  – оценка максимального правдоподобия в  $i$ -ом эксперименте, вычисленная по формуле (6) для  $(s,r) = (20,20)$  (то есть оценка  $\tilde{\theta}$  для модели AR(20)) и  $(s,r) = (20,2)$  (то есть оценка  $\hat{\theta}_{(s,r)}$  для модели AR(20,2)); а погрешность прогнозирования будем характеризовать

среднеквадратической ошибкой прогнозирования:  $\hat{V} = \frac{1}{24 \times N} \sum_{i=1}^N \sum_{t=T+1}^{T+24} (x_t^{(i)} - \hat{x}_{t,(s,r)}^{(i)})^2$ , где

$\hat{x}_{t,(s,r)}^{(i)} = (\hat{\theta}_{(s,r)}^{(i)})' X_{t-1}$  – прогноз, построенный на основании соответствующей оценки в  $i$ -ом эксперименте. Прогнозирование проводилось на глубину  $\tau = 24$ .

Результаты экспериментов приведены на рис. 2 и 3 для различных значений  $T + s$ .

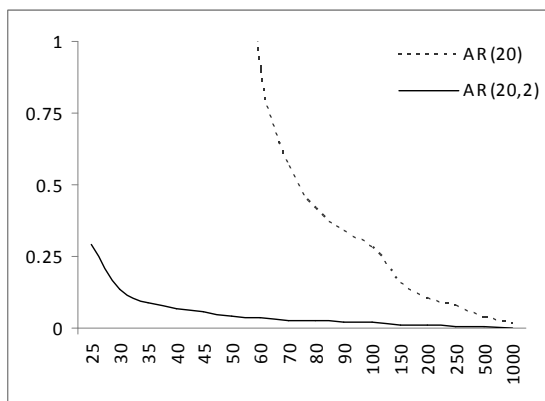


Рисунок 2 – След выборочной матрицы вариаций оценок параметров для моделей AR(12) и AR(12,2)

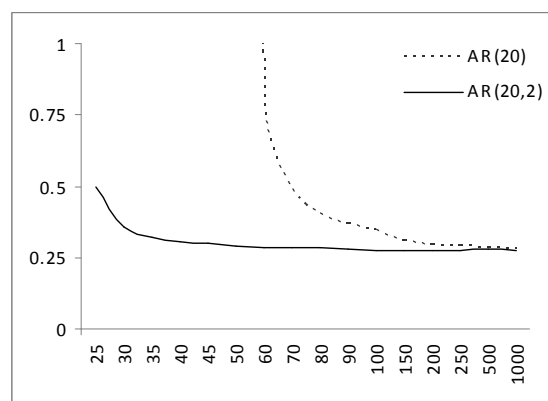


Рисунок 3 – Среднеквадратическая ошибка прогнозирования  $\hat{V}$  для моделей AR(12) и AR(12,2)

Для длительности наблюдений  $T + s < 70$ , модель AR(20) построить оказалось невозможно в силу плохой обусловленности матрицы  $\sum_{t=1}^T X_{t-1} X'_{t-1}$ . Для модели AR(20,2) точность оценивания параметров и прогнозирования достаточно хорошая.

## 5.2. Реальные экономико-статистические данные

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим статистические данные [13] «Динамика ежемесячных цен на попкорн с карамелью с 04/2004 года по 03/2009 года» (60 наблюдений), график этого временного ряда представлен на рис. 4. При различных значениях параметров  $T + s \in \{16, \dots, 54\}$  строились оценки максимального правдоподобия для моделей AR(12) и AR(12,2) (оптимальный шаблон выбирался согласно формуле (10)). Остальные  $60 - (T + s)$  наблюдений использовались для оценивания среднеквадратической ошибки прогнозирования:  $\hat{V} = \frac{1}{60 - T - s} \sum_{t=T+1}^{60-s} (x_t - \hat{x}_t)^2$ . Результаты экспериментов, приведенные на рис. 5, показывают хорошую точность прогнозирования в условиях малой длительности наблюдения с использованием модели AR(12,2).

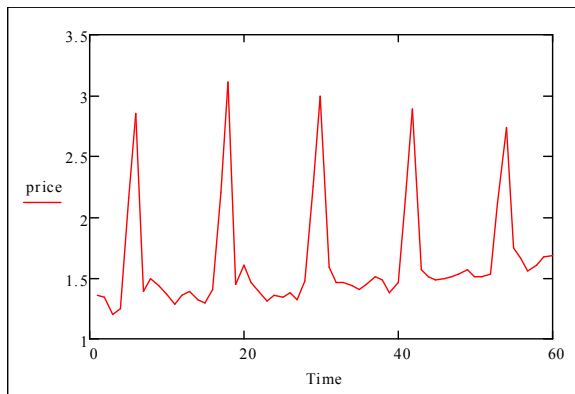


Рисунок 4 – Цены на попкорн с 04/2004 по 03/2009

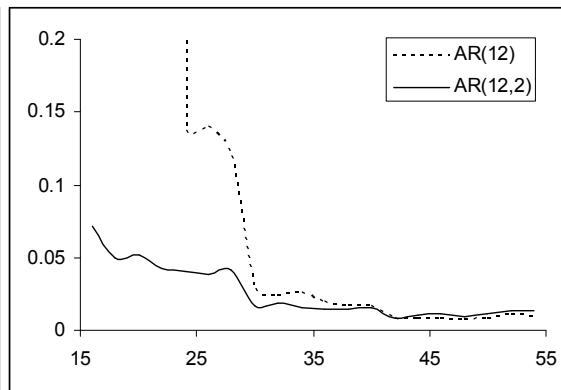


Рисунок 5 – Среднеквадратическая ошибка прогнозирования  $\hat{V}$  для моделей AR(12) и AR(12,2)

Согласно формуле (10) для AR(12,2) получена оценка шаблона  $\hat{M} = \{10, 12\}$ . Отметим, что для длительности наблюдений  $T + s < 25$ , модель AR(12) построить оказалось невозможно в силу плохой обусловленности матрицы  $\sum_{t=1}^T X_{t-1} X'_{t-1}$ , тогда как прогноз на основе AR(12,2) имеет высокую точность уже при  $T + s \geq 16$ .

## Заключение

В статье предложена новая малопараметрическая модель авторегрессии порядка  $s$  с  $r$  частичными связями AR( $s, r$ ). Построена оценка максимального правдоподобия для параметров модели, доказаны ее свойства: состоятельность, асимптотическая нормальность. Теоретически показан существенный выигрыш в величине риска прогнозирования от использования AR( $s, r$ ) модели по сравнению с AR( $s$ ) при  $s \sim T$  и  $r \ll s$ . Компьютерные эксперименты, проведенные на модельных и на реальных данных, демонстрируют высокую точность прогнозирования с использованием модели AR( $s, r$ ) даже при малой длительности



наблюдения временного ряда, когда невозможно построить прогноз с использованием полной модели AR(s).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Akgiray V, Booth G. The stable law model of stock returns // J.Business Econom. Statis. — 1988. — Vol. 6. — P. 51 – 57.
2. Ding Z., Granger C., Engle R. A long memory property of stock market returns and a new model // – Journal of empirical finance. – 1983. – Vol. 1. – P. 83 – 106.
3. Baillie R.T. Long memory processes and fractional integration in econometrics // J. Econometrics, – 1996. – Vol.73. – P.5 – 59.
4. Bollerslev T., Mikkelsen O.H. Modeling and pricing long memory in stock market volatility // Journal of Econometrics. – 1996. – Vol. 73. – P. 151 – 184.
5. Харин Ю.С. Цепи Маркова с  $g$ -частичными связями и их статистическое оценивание // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т.48, № 1. – С. 40 – 44.
6. Харин Ю.С., Петлицкий А.И. Цепи Маркова  $s$ -го порядка с  $g$ -частичными связями и их статистическое оценивание // Дискретная математика. – 2007. – Том 12, вып. 2. – С. 109 – 130.
7. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов / М.: Мир, 1976. – 756 с.
8. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: исследование зависимостей / М.: ФиС, 1985. – 487 с.
9. Харин Ю.С. Оптимальность и робастность в статистическом прогнозировании / Минск: БГУ, 2008. – 264 с.
10. Kharin Yu. Robustness in statistical forecasting / Springer, 2013. – 356 p.
11. Kharin Yu., Charemza W., Maevskiy V. Bilinear forecast risk assessment for nonsystematic inflation: theory and evidence // Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance. – 2014. – Vol. 17. – P.205 – 232.
12. Хьюбер П. Робастность в статистике / М.: Мир, 1984. – 304 с.
13. Интернет-источник <http://usda.mannlib.cornell.edu/MannUsda/viewDocumentInfo.do;jsessionid=F154BA78C7C50C021C8CA924EDB72FD5?documentID=1002>

*Стаття надійшла до редакції 02.12.2014*