УДК 004.942
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.1.13

АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ ДЛЯ СТВОРЕННЯ АЛГОРИТМУ ОПИСУ ПЕРЕСІЧЕНОЇ МІСЦЕВОСТІ

О.М. ТРОФИМЧУК, О.О. КРЯЖИЧ

Розглянуто варіант кусково-поліноміальної апроксимації із застосуванням методу можливих напрямів, а також метод Дж. Зойтендейка для розв'язання задач опису складних функцій. Зокрема, наведено задачу з одним квадратичним обмеженням, для розв'язання якої використано методи квадратичного програмування з попереднім записом двійкових задач поставленій задачі. Використано підхід, який ґрунтується на теорії двійковості із застосуванням прямого алгоритму симплекс-методу. Подано алгоритм для подальшої реалізації методу у вигляді комп'ютерної програми. Зроблено висновки з визначенням практичної значущості результатів досліджень, зокрема щодо можливості розширення інструментарію осіб, які приймають рішення, для опису зон ураження пересічених територій у випадку техногенних аварій, обґрунтування нового підходу до побудови тривимірних моделей опукло-вгнутих об'єктів.

ВСТУП

У 2014 р. Україна зіштовхнулася із загрозою виникнення терористичних актів у найбільш промислово розвинутому регіоні — на Донбасі, у Луганській і Донецькій областях. Ці області України багато років мають високий ризик виникнення техногенних аварій, зумовлений тим, що більшість підприємств уже виробили свій ресурс і потребують модернізації та оновлення; те саме стосується і складів, могильників та засобів транспортування небезпечних речовин. Окрім того, на території цього регіону розташовані об'єкти хімічної промисловості, деякі з яких зупинено в аварійному режимі та відправлено на несанкціонований демонтаж без дотримання технологічного регламенту.

Кількість небезпечних речовин, що виробляються, зберігаються, переробляються та транспортуються на території Луганської і Донецької областей, вимірюється тисячами тонн, а отже, у разі виникнення техногенної аварії та несвоєчасно вжитих заходів (що може бути зумовлено об'єктивними причинами — проведенням військових дій, забороною доступу до території, зайнятої озброєними формуваннями іншої сторони і т. ін.), аварія може стати катастрофою глобального масштабу, що вийде далеко за межі однієї країни.

Для швидкого залучення сил реагування на техногенну аварію необхідно створити відповідні ситуаційні центри, що проводитимуть моніторинг та аналітику ситуації і пропонуватимуть рішення щодо запобігання виникненню критичних ситуацій. Одним із завдань такої аналітичної роботи є чітке визначення можливої межі розповсюдження небезпечної речовини на місцевості з урахуванням особливостей навколишнього середовища.

Мета роботи — розроблення варіанта опису апроксимації функції за методом Дж. Зойтендейка для подальшого створення алгоритму для опису пересіченої місцевості.

Для реалізації поставленої мети вирішуються такі завдання:

– обґрунтовується вибір методу Дж. Зойтендейка для апроксимації функцій поліномами;

– пропонується математичний апарат для опису будь-якої пересіченої місцевості, що дозволить визначати зону ураження.

Питання апроксимації функцій поліномами свого часу ґрунтовно були досліджені В.О. Василенком [1], В.К. Дзядиком [2], Б.О. Поповим [3], Ю. Люком [4] та іншими українськими і зарубіжними вченими. Проте метод Дж. Зойтендейка [5] не набув поширення через складність розрахунків з його використанням. Однак, попри те, що навіть персональні комп'ютери дозволяють вирішувати складні завдання, цей метод є цікавим для подальших досліджень та застосування в практичній роботі.

ПРОБЛЕМАТИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Задачі оптимізації широко застосовуються у багатьох прикладних галузях [6], зокрема таких, як економіка, медицина, хімія. Але часто такі задачі потребують розв'язання у математичних і технічних напрямах. Огляд моделей лінійного програмування доводить, що ці моделі не завжди адекватні реальним ситуаціям. Так, за лінійного підходу часто ігноруються такі явища, як адекватність моделі, раціональність та ін. Обмеження, що застосовуються під час побудови моделі, можуть призводити до нелінійного формулювання задачі, тобто знаходження мінімального чи максимального значення функції за нелінійних обмежень [7].

Стосовно розглядуваних задач дослідження, то для роботи з програмами, що дозволяють візуалізувати на картах зони ураження сильнодійними отруйними речовинами (СДОР), інструменти моделювання дають змогу наносити ці зони на карти і схеми у вигляді кола, півкола або сектора, який має кутові розміри і радіус, що дорівнює глибині зараження. Зона фактичного зараження, як правило, має форму еліпса, включається у зону можливого зараження. Така візуалізація не дає картини, що є наближеною до реальності, адже є різні особливості місцевості і хмара СДОР не буде чітким еліпсом або колом. Наприклад, якщо на шляху хмари буде річка, хмару СДОР частково потягне за течією. Високі будівлі і споруди на шляху СДОР також частково розірвуть контур. Якщо стався викид речовини, що тяжіє до низу, заповненими будуть низини, які значно простягатимуться в боки від еліпса чи кола зони на карті подій, визначеній як зона ураження. Тобто особа, що приймає рішення (ОПР) з ліквідації техногенної аварії, отримує не точну інформацію про її розповсюдження, а сама інформація у часі є не життєздатною, бо не відтворює реального стану розвитку ситуації.

Особи, що приймають рішення, потребують інструментарію, який дозволив би визначати окремі випадки розповсюдження СДОР і окреслювати більш чіткі контури зони ураження. Проте використання широко застосованих градієнтних методів може бути неефективним для задач «яружної» цільової функції, тобто, коли лінії цільової функції дуже витягнуті (мають форму еліпсів) у межах оптимальної точки. Такі функції є складними і дослідники уникають їх використовувати — функцію можна уявити як дно яру, русла річки з певною крутизною стінок, положистістю при зниженні дна яру вздовж твірної та шириною дна. Саме дно може бути прямим або звивистим і являє собою підмножину точок, де поділ на існуючі та неіснуючі змінні зникає, тому з будь-якого напряму функція змінюється повільно.

Якщо точка x_k розміщена на межі припустимої області X, то будь-який малий крок $\alpha_k > 0$ у напрямі антиградієнта за методами градієнтного спуску може призвести до неприпустимої точки $(x_k \in X)$. Запобігання такому випадку передбачено в методах можливих напрямів, до яких належать метод проекції градієнта, метод умовного градієнта, опуклий симплексний метод Зангвілла і метод Дж. Зойтендейка. Загальна ідея підходу полягає у виборі мінімально можливого напряму пошуку в межовій точці x_k з урахуванням усіх обмежень та кута з напрямленням антиградієнта в цій точці.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай на проміжку $[a,b]$ задано неперервну обмежену функцію $f(x)$. Розглядаємо кусково-поліноміальну функцію $P(x) \in C^1(a,b)$, яка найбільше наближує $f(x)$ за підходом Чебишева. Виразом $C^1(a,b)$ означуємо клас функцій, неперервних на відрізку $[a,b]$ разом з першою похідною. Очевидно, що для $P(x)$ справедливим буде подання:

$$\begin{cases} f_1(x) & x \in [a, C_1]; \\ f_2(x) & x \in [a, C_2]; \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_S(x) & x \in [C_S, b]. \end{cases}$$

Точки $a = C_0 < C_1 < C_2 < ... < C_S < C_{S+1} = b$ будемо вважати невідомими.

Функції $f_i(x)$, $i = \overline{1,S}$ є поліноміальними зі степенем не меншим за 2. Тобто наведено задачу для випадку, якщо $f_i(x)$ має однаковий степінь і є задачею побудови сплайн-функції із фіксованими вузлами [8].

Задача побудови $P(x)$ зводиться до кількох завдань побудови поліномів найкращого наближення $f_i(x)$ у розумінні підходу Чебишева до функції $f(x)$ для $x \in [C_i, C_{i+1}]$ $(1 = \overline{0,k})$. Цей факт виходить з принципу оптимальності Беллмана. Саме тому достатньо розглянути побудову полінома найкращого наближення до $f(x)$ на деякому інтервалі. Цей поліном повинен також задовольняти умови, що забезпечують відповідну гладкість $P(x)$.

ПОБУДОВА ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ

Нехай задано функцію $f(t)$ і деяку дискретну множину точок:

$$\mathrm{E} = \{Y_0, Y_1 ..., Y_{N+1}\} \in [a,b], \;\; Y_0 = a, \quad Y_{N+1} = b.$$

Потрібно відшукати поліном заданого степеня k :

$$\Pi_k(t) = \sum_{i=0}^{k} x_i t^i,$$

який мінімізує величину $\varepsilon(x)=\max\limits_{t_i\in\mathrm{E}}\left|f(t_i)-\Pi_k(t_i)\right|$ за всіма x з області $\Delta\subset\mathrm{E}_{n+1}$, де

$$\Delta=\{x\in\mathrm{E}_{n+1}: f^{(i)}(a)=\Pi_k^{(i)}(a);\; f^{(i)}(b)=\Pi_k^{(i)}(b);\; i=0,1\}\ .$$

Якщо припустити, що $t_j^i=a_{ij}\ \left|i=\overline{0,k};\ j=\overline{0,n+1}\right|$, то задача, що розглядається, буде еквівалентною задачі лінійного програмування [9]:

$$\begin{cases} \min \varepsilon \\ \sum\limits_{i=0}^{k} a_{ij}x_i-\varepsilon\le f(Y_i) \\ -\sum\limits_{i=0}^{k} a_{ij}x_i-\varepsilon\le -f(Y_i), \\ \sum\limits_{i=0}^{k} a_{i,0}x_i=f(Y_0), \\ \sum\limits_{i=0}^{k} a_{i,n+1}x_i=f(Y_{n+1}), \\ \sum\limits_{i=1}^{k} i a_{i-1,0}x_i=f'(Y_0), \\ \sum\limits_{i=1}^{k} i a_{i-1,n+1}x_i=f'(Y_{n+1}), \\ \varepsilon\ge 0;\ j=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{1}$$

Специфіка наведеної задачі лінійного програмування полягає в тому, що матриця обмежень $A=(a_{ij})$; $i=0,k$; $j=0,n+1$ має прямокутний вигляд і кількість рядків домінує над кількістю стовпців, $K<<N$. Тому для розв'язання поставленої задачі обрано метод можливих напрямів Дж. Зойтендейка [5]. Оскільки метод передбачає наявність нерівності, то умова виразу (1) буде записана як дві нерівності і надалі припускається, що всі обмеження (1) мають вигляд нерівностей.

АЛГОРИТМ ЗА МЕТОДОМ МОЖЛИВИХ НАПРЯМІВ ДЖ. ЗОЙТЕНДЕЙКА

Нехай довільна задача лінійного програмування має вигляд

$$\begin{cases} \max\sum\limits_{j=1}^{k} d_j x_j, \\ \sum\limits_{j=1}^{k} a_{ij}x_j\le b_i, \\ x_j\ge 0,\ i=\overline{1,P};\ j=\overline{1,k}. \end{cases} \tag{2}$$

Як і всі методи лінійного програмування, градієнтний метод потребує відшукання точки, яка задовольняє обмеження задачі лінійного програмування. Позначимо її через $X^0 = (x_1^0, ..., x_k^0)$. Тоді для X^0 виконується:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^0 \le b_i ; \quad (3)$$

$$x_j^0 \ge 0 \quad i = \overline{1, P}; \; j = \overline{1, k}.$$

На відміну від симплексного і двоїстого методів розв'язання задачі лінійного програмування X^0 може і не бути базисною точкою, що значно спрощує розв'язання задачі. У цьому дослідженні припустимо, що така точка відома. Тоді ірраціональна процедура знаходження розв'язання задачі (2) зводиться до такого:

а) з точки X^0 обираємо напрям S, за яким величина $\sum_{j=1}^{k} d_j S_j$ має найбільше значення і вектор $S = (S_1, ..., S_k)$ задовольняє обмеження $\sum_{j=1}^{k} P_{ij} S_j \le 0$, $i = \overline{1, P_1}$ $(P_1 \le P + K)$, де матриця $P = (P_{ij})$ побудована з умов матриці обмежень (2), які для точки X^0 виконуються як рівняння, тобто для матриці P маємо:

$$\sum_{j=1}^{k} P_{ij} x_j^0 = b_1 , \quad i = \overline{1, P_1} . \quad (4)$$

Додаємо до рівняння (4) умову невід'ємного невідомого. Після вибору напряму S обираємо довжину кроку λ для переходу в наступну точку X^1, виходячи з умови, що X^1 має задовольняти вираз (3);

б) величину λ вибираємо з відношення

$$\lambda = \left\{ \min \frac{b_1 - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^0}{\sum_{j=1}^{k} a_{ij} S_j} \middle| \sum_{j=1}^{k} a_{ij} S_j > 0, \quad i = 1, P \right\};$$

в) будуємо точку $X^1 = X^0 + \lambda S$, яка задовольняє умову (3). Величина, на яку збільшилася лінійна форма задачі (2), дорівнює $\lambda \sum_{j=1}^{k} d_j S_j$;

г) повторюємо пункти а) і б) відносно точки X^1, отримуємо X^2. Це повторюємо доти, поки не буде знайдено напрям, для якого величина $\sum d_j S_j$ стає від'ємною. Цей факт доводить, що не існує точки, яка задовольняє умову (3), у якій лінійна форма набувала б значення попередньої форми. Тому точка, на якій зупинився процес, буде розв'язком задачі (2).

Для побудови алгоритму слід більш детально зупинитися на виборі напряму S. Знаходження вектора $S = (S_1,...,S_k)$ зводиться до знаходження розв'язку задачі математичного програмування:

$$\sum_{j=1}^{k} d_j S_j \to \max ; \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{k} P_{ij} S_j \le 0 , \qquad i = \overline{1, P_1} , \tag{6}$$

до якої, як правило, додають ще одне обмеження (нормалізацію) на вектор $S = (S_1,...,S_k)$. Для дослідження обираємо обмеження:

$$\sum_{j=1}^{k} S_j^2 \le 1.$$

Можливі й інші варіанти нормалізації: а) $-1 \le S_j \le 1$; б) $S_j \le 1$, коли $d_j \ge 0$; $S_j \ge -1$, коли $d_j < 0$.

Будь-яка з нормалізацій має свої особливості. Так обмеження (7) призводить до більшого обсягу дій над кожною з ітерацій, проте кількість ітерацій менша порівняно з іншими типами ітерацій. Оскільки розміри задачі (5)–(7) відносно невеликі, то кількість ітерацій для її розв'язання також невелика, що доводить непотрібність громіздких прийомів нормалізацій інших типів.

ПРАКТИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ

25 квітня 2012 р. на складі метанолу ПАТ «Концерн «Стирол» виникла пожежа. За п'ять з половиною годин пожежа була локалізована і ліквідована. Пожежа відбувалася у безпосередній близькості від ємкостей для зберігання аміаку, які на той час були порожніми у результаті проведення планових ремонтно-попереджувальних робіт, що й запобігло виникненню техногенної аварії.

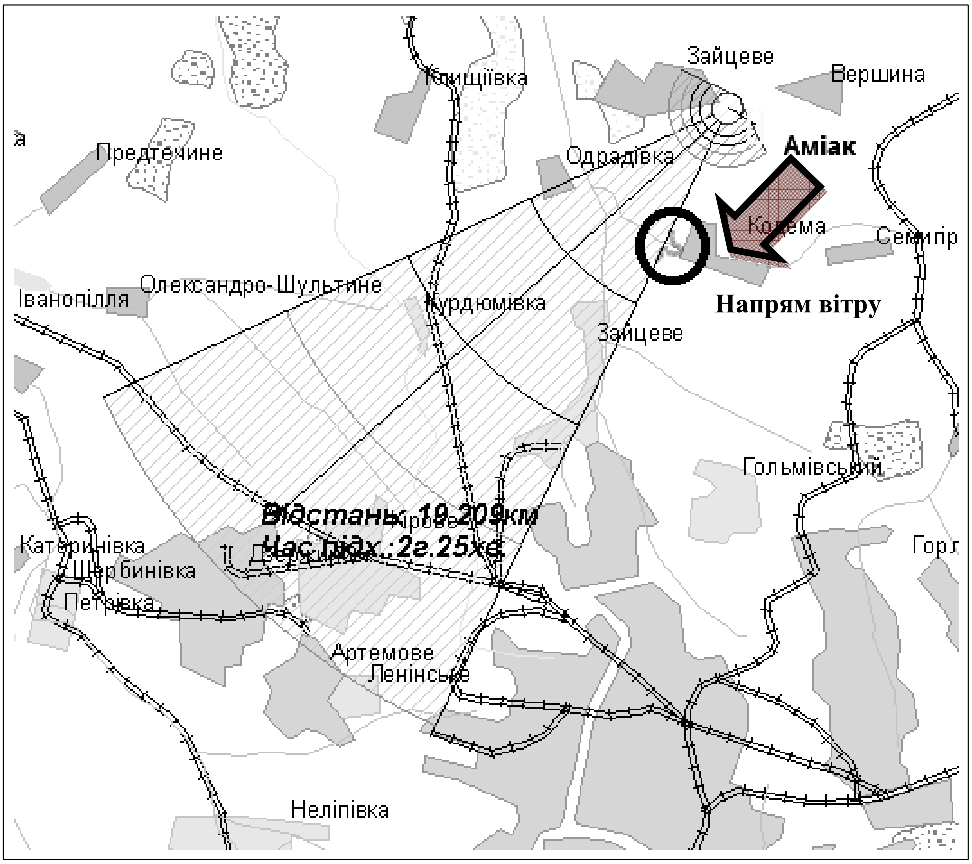
На 2012 р. були передбачені заходи для проведення робіт із завершення видалення, вивезення й утилізації залишків відходів виробництва мононітрохлорбензолу (450 т) із ДП «Горлівський казенний хімічний завод», зруйновані робочі майданчики якого розташовані за 800 м від сховищ зберігання аміаку ПАТ «Концерн «Стирол». Ще одна важлива проблема пов'язана з утилізацією тротилу на зазначеному заводі. Розроблено проект з вилучення та утилізації залишків виробництва тротилу з аварійних ємкостей і комунікацій цеху з його виробництва. Роботи так і не були розпочаті.

За результатами проведених досліджень ситуація, пов'язана зі станом могильників, за ступенем загроз навколишньому середовищу та здоров'ю людини класифікована як надзвичайна і підтверджена експертним висновком Міністерства надзвичайних ситуацій України.

Із початком бойових дій на території Донецької області з боку різних бойових угруповань лунали вимоги відвести війська Національної гвардії України, або вони підірвуть наявний у ДП «Горлівський казенний хімічний завод» тротил [10], що призведе до значних руйнацій за межами підприємства, зокрема на ПАТ «Концерн «Стирол», що спричинить масштабну екологічну катастрофу не лише в регіоні, а й за його межами.

Ситуація, висвітлена засобами масової інформації [11], була змодельована на підставі інформації з відкритих джерел щодо аварійних ситуацій, які виникали на вказаних об’єктах, та за підсумками проведених польових досліджень 20–22 квітня 2012 р. Для моделювання застосовуються умови, відповідно до яких інформація отримується і обробляється в режимі реального часу.

Моделювання проводилося за допомогою програмного виробу «Прогнозування та оцінка наслідків катастроф з хімічною речовиною на об’єктах Збройних сил України («Хмара»). За результатами моделювання подано візуалізацію (див. рисунок), на якій сектором визначено зону розповсюдження хмари СДОР. Ламаною смугою на контурі сектора нанесено реальний контур поширення хмари СДОР з урахуванням особливості місцевості та русла річки за течією, що розраховується та моделюється за наведеним у роботі алгоритмом.



Розповсюдження хмари СДОР у разі виникнення вибуху тротилу на ДП «Горлівський казенний хімічний завод»

Наведений варіант кусково-поліноміальної апроксимації із застосуванням методу можливих напрямів є попереднім результатом роботи. Проте, оскільки задачі визначення рівномірних наближень сплайнами з мінімальною похибкою розвивалися у багатьох працях лише теоретично, практична розробка з метою програмної реалізації є актуальною та необхідною. Наведений підхід та первинний алгоритм можуть бути застосовані у сфері підтримки прийняття рішень для вирішення багатьох завдань, пов’язаних з описом складних об’єктів, розробленням програм для пожежних роботів, що призначені входити у закриті приміщення для виконання відповідних функцій, працювати на територіях радіаційного забруднення та виконувати інші завдання.

ВИСНОВКИ

Задача (5)–(7) — це задача з одним квадратичним обмеженням. Для її розв’язання можна застосувати методи квадратичного програмування, якщо попередньо записати двійкові задачі означеним задачам. У монографії Дж. Зойтендейка [5] запропоновано один з підходів для розв’язання цієї задачі, який ґрунтується саме на засадах теорії двійковості і використовує прямий алгоритм симплекс-методу. Саме цей метод був застосований для вибору напряму для розв’язання задачі кусково-поліноміальної апроксимації. Таким чином, для розроблення програмної реалізації алгоритму належить застосувати деталізацію підходу, запропоновану Дж. Зойтендейком.

Практичне значення цієї роботи полягає у можливості розширення інструментарію ОПР для опису зон ураження пересічених територій при техногенних аваріях, запропонування нового методу визначення траєкторії руху пожежних роботів з метою забезпечення їх просування у складних приміщеннях, обґрунтування нового підходу до побудови тривимірних моделей опукло-вгнутих об’єктів.

ЛІТЕРАТУРИ

1. *Василенко В.А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы / В.А. Василенко. — Новосибирск: Наука, 1983. — 218 с.
2. *Дзядик В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядик. — М.: Наука, 1977. — 512 с.
3. *Попов Б.А.* Равномерное приближение сплайнами / Б.А. Попов. — К.: Наук. думка, 1989. — 272 с.
4. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
5. *Зойтендейк Г.* Методы возможных направлений / Г. Зойтендейк— М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. — 178 с.
6. *Довгий С.О.* Системи підтримки прийняття рішень на основі статистично-ймовірнісних методів / С.О. Довгий, П.І. Бідюк, О.М. Трофимчук. — К.: Логос, 2014. — 419 с.
7. *Довгий С.О.* Методи прогнозування в системах підтримки прийняття рішень / С.О. Довгий, П.І. Бідюк, О.М. Трофимчук, О.І. Савенков. — К.: Азимут-Україна, 2011. — 608 с.
8. *Альберг Дж.* Теория сплайнов и её приложения / Дж. Альберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш; пер. с англ. — М.: Мир, 1972. — 318 с.
9. *Ремез Е.Я.* Основы численных методов чебышевского приближения / Е.Я. Ремез. — К.: Наук. думка, 1969. — 620 с.
10. *Боевики* заминировали и угрожают взорвать в Донецкой области химзавод. [Электронный ресурс]. — http://www.62.ua/article/559907.
11. *Боевики* угрожают взорвать химзавод «Стирол» [Электронный ресурс]. — http://censor.net.ua/news/295664/lidery_terroristov_girkin_i_bezler_ischezli_v_neizvestnom_ napravlenii_boeviki_ugrojayut_vzorvat_himzavod.

Надійшла 15.03.15