УДК 004.492

Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Сукало
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Дослідження зв'язків між узагальненими кватерніонами та процедурою подвоєння гіперкомплексних числових систем

Досліджено клас некомутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності, побудованих за допомогою некомутативної процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда систем другої вимірності та встановлено їхні зв'язки з узагальненими кватерніонами. Запропоновано алгоритми виконання операцій у них, а також методи обчислення таких алгебраїчних характеристик як спряження, нормування, вигляд дільників нуля.

Ключові слова: *кватерніон, узагальнений кватерніон, гіперкомплексна числова система, дільник нуля, псевдонорма, спряження, процедура подвоєння Грасмана-Кліфорда.*

Вступ

Гіперкомплексні числові системи (ГЧС) знаходять чимало застосувань у науці і техніці. Особливо велике значення має система квтерніонів, яка є розширенням комплексних чисел. Система кватерніонів, вперше подана В.Р. Гамільтоном у роботі [1], знайшла широке застосування в багатьох наукових напрямках: в механіці твердого тіла для опису обертання в просторі, при розв'язуванні задач навігації, орієнтації і управлінням руху; в комп'ютерній анімації, дослідженні деформації пружних конструкцій, фільтрації кольорових зображень, криптографії тощо.

Постановка задачі

У даній роботі поставлено задачу встановлення зв'язків між узагальненими кватерніонами та системами четвертої вимірності, побудованими за допомогою некомутативної процедури Грасмана-Кліфорда та дослідження арифметичних і алгебраїчних операцій і процедур у цьому класі ГЧС.

Узагальнені кватерніони

Уперше узагальнені кватерніони були застосовані при зображенні просторово-часових груп Куртом Годелем у 1949 році в роботі [2], в якій він представив розв'язок рівнянь Енштейна гравітаційного поля за допомогою цих кватерніонів.

Узагальнені кватерніони також досліджені в роботах багатьох інших авторів, наприклад [3–8]. Проаналізуємо деякі результати, що ними одержані.

Узагальнений кватерніон має вигляд

$$q = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 , \tag{1}$$

де a_i — дійсні числа, а e_i при $i = 2,..,4$ — уявні одиниці, які задовольняють наступну таблицю Келі

$H_{\alpha\beta}$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-\alpha e_1$	e_4	$-\alpha e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-\beta e_1$	βe_2
e_4	e_4	αe_3	$-\beta e_2$	$-\alpha\beta e_1$

, (2)

де α , β $\in R$.

Оскільки e_1 — дійсна одиниця, то узагальнений кватерніон q складається з двох частин: дійсної та уявної, які позначаються відповідно $S(q) = a_1 e_1$ та $V(q) = a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$, таким чином (1) можна записати у вигляді:

$$q = S(q) + V(q). \tag{3}$$

Система кватерніонів ***H*** належить до класу узагальнених кватерніонів $H_{\alpha\beta}$ при $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Якщо підставити дані значення α та β в (2), то отримаємо таблицю Келі системи кватерніонів:

H	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

. (4)

Властивості узагальнених кватерніонів детально розглянуто в роботах [6, 7]. Коротко наведемо основні з них. Операція множення вводиться таким же чином, як і для будь-яких інших гіперкомплексних чисел. Тобто виконується правило:

$$
\begin{aligned}
&\left(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4\right)\left(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4\right) = \\
&= \left(a_1b_1 - \alpha a_2b_2 - \beta a_3b_3 - \alpha\beta a_4b_4\right)e_1 + \\
&+ \left(a_2b_1 + a_1b_2 - \beta a_4b_3 + \beta a_3b_4\right)e_2 + \\
&+ \left(a_3b_1 + \alpha a_4b_2 + a_1b_3 - \alpha a_2b_4\right)e_3 + \\
&+ \left(a_4b_1 - a_3b_2 + a_2b_3 + a_1b_4\right)e_4,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

або за допомогою (3), (5) можна записати у вигляді

$$qp = S(q)S(p) - \langle V(q), V(p)\rangle + S(q)V(p) + S(p)V(q) + V(p)\times V(q), \tag{6}$$

де

$$
\begin{gathered}
S(q) = a_1e_1, \\
S(p) = b_1e_1, \\
\langle V(q), V(p)\rangle = \alpha a_2b_2 + \beta a_3b_3 + \alpha\beta a_4b_4, \\
V(p)\times V(q) = \beta\left(a_3b_4 - a_4b_3\right)e_2 + \alpha\left(a_4b_2 - a_2b_4\right)e_3 + \left(a_2b_3 - a_3b_2\right)e_4.
\end{gathered}
$$

Спряження для даних чисел вводиться як і для кватерніонів, тобто, якщо вихідне число $q = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$ то спряжене до нього має вигляд:

$$\bar{q} = a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3 - a_4e_4. \tag{7}$$

На основі спряження вводиться норма, яка визначається із рівності:

$$N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q = a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha\beta a_4^2. \tag{8}$$

Також у роботі [6] розглянуто конкретні ГЧС залежно від того, який знак мають α та β і наведено наступні випадки:

1) $\alpha = \beta = 1$, тоді гіперкомплексна числова система $H_{\alpha\beta}$ є системою кватерніонів;

2) $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $H_{\alpha\beta}$ є системою антикватерніонів;

3) $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $H_{\alpha\beta}$ — система псевдо-кватерніонів;

4) $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $H_{\alpha\beta}$ — система псевдо-антикватерніонів;

5) $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $H_{\alpha\beta}$ — система $1/4$-кватерніонів.

ГЧС четвертої вимірності, побудовані за допомогою процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда

Як показали наші дослідження [9], існують зв'язки між системами, що отримані за допомогою некомутативної процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда (ГК-процедури) та узагальненими кватерніонами. Для встановлення даних зв'язків розглянемо алгоритм побудови та властивості систем, що отримані за допомогою некомутативної ГК-процедури.

Досліджуваний у роботі [9] клас некомутативних ГЧС четвертої вимірності складається з некомутативних подвоєнь ГЧС другої вимірності за допомогою ГК–процедури.

Базис таких ГЧС складається з чотирьох елементів:

$$g = \{g_1, g_2, g_3, g_4\} = \{e_1 f_1, e_1 f_2, e_2 f_1, e_2 f_2\}.$$

Звичайно, двосимвольні елементи можна замінити односимвольними елементами з індексами. Але це буде зроблено пізніше, оскільки на даному етапі доцільно користуватися двосимвольними.

Досліджуваний клас ГЧС буде визначатися наступними умовами.

1. Елементи базисів e_1 та f_1 — одиничні елементи своїх систем.

2. Елементи таблиці Келі ГЧС g є добутки вигляду: $g_i g_k = e_j f_s e_t f_r$, значення яких можна обчислити шляхом комутації множників і використання таблиць Келі подвоюваних ГЧС; при цьому будемо вважати, що e_1 та f_1 комутують з e_2 та f_2, тобто $e_1 f_2 = f_2 e_1, e_2 f_1 = f_1 e_2$, а останні антикомутують між собою, тобто $e_2 f_2 = -f_2 e_2$.

Наприклад:

$$\begin{gathered} g_1 g_1 = e_1 f_1 e_1 f_1 = e_1 e_1 f_1 f_1 = e_1 f_1 = g_1, \\ g_2 g_1 = e_1 f_2 e_1 f_1 = e_1 e_1 f_2 f_1 = e_1 f_2 = g_2, \\ g_2 g_3 = e_1 f_2 e_2 f_1 = -e_1 e_2 f_2 f_1 = -e_2 f_2 = -g_4, \\ g_2 g_2 = e_1 f_2 e_1 f_2 = e_1 e_1 f_2 f_2 = e_1 f_2 f_2, \\ g_4 g_4 = e_2 f_2 e_2 f_2 = -e_2 e_2 f_2 f_2. \end{gathered}$$

Останні два приклади елементів таблиці Келі можна довести до кінця тільки для конкретних подвоюваних ГЧС.

3. Елементи таблиці Келі, які знаходяться під головною діагоналлю, але не в першому стовпчику, протилежні елементам, симетричним відносно головної діагоналі, тобто

$$g_3 g_2 = -g_2 g_3; g_4 g_2 = -g_2 g_4; g_4 g_3 = -g_3 g_4.$$

З урахуванням цих умов узагальнена таблиця Келі для ГЧС досліджуваного класу буде мати такий вигляд:

$$\begin{array}{c|cccc} & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ \hline g_1 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ g_2 & g_2 & e_1 f_2 f_2 & -g_4 & -e_2 f_2 f_2 \\ g_3 & g_3 & g_4 & e_2 e_2 f_1 & e_2 e_2 f_2 \\ g_4 & g_4 & e_2 f_2 f_2 & -e_2 e_2 f_2 & -e_2 e_2 f_2 f_2 \end{array}. \qquad (9)$$

Як відомо [10–13] існують три класи ізоморфізмів ГЧС другої вимірності. Виберемо з цих класів по одному представнику: систему комплексних чисел $\boldsymbol{C}$, систему подвійних чисел $\boldsymbol{W}$ і систему дуальних чисел $\boldsymbol{D}$.

Як показано в роботі [11], перші дві операнди в операторі подвоєння можна комутувати, оскільки одержані таблиці Келі відрізняються тільки порядком рядків і стовпчиків, тобто вони є ізоморфними.

З урахуванням цього досліджуваний клас ГЧС складається з шести представників класів ізоморфізмі:

1) $Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}, 4) = \boldsymbol{H}$ — система кватерніонів;
2) $Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{W}, 4) = \boldsymbol{AH}$ — система антикватерніонів;
3) $Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4)$;
4) $Д(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}, 4)$;
5) $Д(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}, 4)$;
6) $Д(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{D}, 4) = Д(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{W}, 4)$.

Таблиці Келі вищенаведених шести класів ізоморфізмів можна легко отримати, підставивши в (10) базисні елементи систем комплексних — $\boldsymbol{C}$, подвійних — $\boldsymbol{W}$ та дуальних чисел — $\boldsymbol{D}$, відповідно.

Проробивши даний алгоритм для кожного із шести випадків, отримаємо табл. 1.

Таблиця 1. Таблиці Келі гіперкомплексних числових систем 4-ї вимірності

№	Позначення	Таблиця Келі
1.	$\boldsymbol{H} = Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}, 4)$	$\begin{array}{c\|cccc} H & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & -e_1 & e_2 \\ e_4 & e_4 & e_3 & -e_2 & -e_1 \end{array}$
2.	$\boldsymbol{AH} = Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{W}, 4)$	$\begin{array}{c\|cccc} AH & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & e_1 & -e_2 \\ e_4 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 \end{array}$

Продовження табл. 1

3.	Д(***C***, ***D***, 4)	$\begin{array}{c\|cccc} \text{Д}(C,D,4) & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & 0 & 0 \\ e_4 & e_4 & e_3 & 0 & 0 \end{array}$
4.	Д(***W***, ***W***, 4)	$\begin{array}{c\|cccc} \text{Д}(W,W,4) & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & -e_1 & e_2 \\ e_4 & e_4 & -e_3 & -e_2 & e_1 \end{array}$
5.	Д(***D***, ***D***, 4)	$\begin{array}{c\|cccc} \text{Д}(D,D,4) & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & 0 & e_4 & 0 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & 0 & 0 \\ e_4 & e_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$
6.	Д(***W***, ***D***, 4)	$\begin{array}{c\|cccc} \text{Д}(W,D,4) & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & 0 & 0 \\ e_4 & e_4 & -e_3 & 0 & 0 \end{array}$

Зв'язки між системами, побудованими за допомогою процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда та узагальненими кватерніонами

Як видно з табл. 1, множення базисних елементів системи кватерніонів задовольняє (4).

Якщо аналізувати отримані результати далі, то можна побачити, що система антикватерніонів ***AH*** відповідає другому випадку узагальнених кватерніонів $\alpha = 1$, $\beta = -1$ та називається в роботі [6] системою антикватерніонів.

Системі Д(***C***, ***D***, 4) відповідає третій випадок узагальнених кватерніонів — система псевдо-кватерніонів при $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Системі Д(***W***, ***D***, 4) відповідає четвертий випадок — система псевдо-антикватерніонів при $\alpha = -1$, $\beta = 0$.

І, нарешті, п'ятому випадку $1/4$-кватерніонів при $\alpha = 0$, $\beta = 0$ відповідає система Д(***D***, ***D***, 4) із табл. 1.

У випадку узагальнених кватерніонів розглядаються 5 окремих ГЧС, а за допомогою процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда отримано 6 систем. Тобто, система *Д*(***W***, ***W***, 4) для узагальнених кватерніонів не розглядається. Проаналізувавши таблицю Келі даної системи можна визначити, що вона відповідає таблиці множення базисних елементів узагальнених кватерніонів (2) при $\alpha = -1$, $\beta = -1$.

Дослідження властивостей отриманого класу ГЧС

Позначимо елементи кожної з цих систем у вигляді

$$w = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 , \tag{10}$$

де $a_i \in R$.

У даних системах операція множення виконується за правилом множення будь-яких двох гіперкомплексних чисел, враховуючи таблицю Келі розглядуваної системи. Або, підставляючи в (5) для кожної із систем свої значення α та β. В обох випадках отримаємо однакові результати.

У роботі [14] норма гіперкомплексного числа в загальному випадку визначається за формулою

$$N(w) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}^{k} a_i , \tag{11}$$

де γ_{ij}^{k} — структурні константи гіперкомплексної числової системи, які визначаються з табл. 1. На цій основі будується матриця норми [14], обчисливши детермінант якої, одержимо норму гіперкомплексного числа.

За аналогією з теорією кватерніонів, будемо називати псевдонормою гіперкомплексного числа, з будь-якої із розглядуваних систем, підкореневий вираз норми, яку позначатимемо також $N(w)$.

Варто зазначити, що для кожної із цих систем матриця норми матиме інший вигляд, а відповідно з цим і відрізнятиметься представлення псевдонорми, що можна побачити з табл. 2.

Таблиця 2. Псевдонорма

№	ГЧС	Псевдонорма
1.	***H***	$N(w) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$
2.	***AH***	$N(w) = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2$
3.	*Д*(***C***, ***D***, 4)	$N(w) = a_1^2 + a_2^2$
4.	*Д*(***W***, ***W***, 4)	$N(w) = a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_4^2$
5.	*Д*(***D***, ***D***, 4)	$N(w) = a_1^2$
6.	*Д*(***W***, ***D***, 4)	$N(w) = a_1^2 - a_2^2$

Якщо в рівність (8) для кожної із систем підставити свої значення α та β, то отримаємо такі ж результати. Як видно з табл. 2, у деяких системах псевдонорма може бути від'ємною. Можна показати, що введена таким методом псевдонорма мультиплікативна для кожної із розглядуваних систем, тобто виконується рівність:

$$N(w_1 w_2) = N(w_1)N(w_2). \tag{12}$$

Як запропоновано в [14], позначення спряженого вводиться на основі рівності

$$w\overline{w} = N(w), \tag{13}$$

де $\overline{w} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4$.

Підставивши введені позначення та скориставшись табл. 2, і прирівнявши коефіцієнти при однакових базисних елементах, отримаємо лінійну алгебраїчну систему відносно змінних b_1, b_2, b_3, b_4.

Для гіперкомплексної числової системи *Д*(***D***, ***D***, 4), наприклад, така лінійна алгебраїчна система матиме вигляд

$$\begin{cases} a_1 b_1 = a_1^2, \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0, \\ a_1 b_3 + a_3 b_1 = 0, \\ a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0, \end{cases} \tag{14}$$

розв'язками якої є:

$$b_1 = a_1, b_2 = -a_2, b_3 = -a_3, b_4 = -a_4. \tag{15}$$

Тому, якщо вихідне число $w = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$, то спряжене до нього має вигляд:

$$\overline{w} = a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3 - a_4 e_4. \tag{16}$$

Незважаючи на те, що для кожної із систем, наведених у табл. 1, лінійна алгебраїчна система (14) матиме інший вигляд, представлення спряженого числа для кожного випадку матиме вигляд (16), що співпадає із (7).

Також для розглядуваного класу визначено ознаки дільників нуля.

Відмінне від нуля гіперкомплексне число $w_1 \neq 0$ називається *дільником нуля*, якщо існує таке інше гіперкомплексне число $w_2 \neq 0$, що їхній добуток дорівнює нулю $w_1 w_2 = 0$, а це означає таке ж співвідношення між їхніми псевдонормами:

$$N(w_1 w_2) = 0\,. \tag{17}$$

На основі (12) псевдонорма дільника нуля повинна дорівнювати нулю

$$N(w_1) = 0\,. \tag{18}$$

З (18) випливають ознаки дільників нуля в будь-якій з розглядуваних гіперкомплексних числових систем (окрім системи кватерніонів, для якої за теоремою Фробеніуса немає дільників нуля), які ми наведемо в табл. 3.

Таблиця 3. Ознаки дільників нуля

№	ГЧС	Ознака дільника нуля
1.	$\boldsymbol{H}$	–
2.	$\boldsymbol{AH}$	$a_1^2 + a_2^2 = a_3^2 + a_4^2$
3.	$Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4)$	$a_1^2 + a_2^2 = 0$
4.	$Д(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}, 4)$	$a_1^2 + a_4^2 = a_3^2 + a_2^2$
5.	$Д(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}, 4)$	$a_1^2 = 0$
6.	$Д(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{D}, 4)$	$a_1^2 = a_2^2$

Висновки

У роботі встановлено зв’язки між окремими випадками узагальнених кватерніонів і системами четвертої вимірності, побудованими за допомогою некомутативної ГК-процедури систем другої вимірності. Досліджено їхні арифметичні та алгебраїчні властивості, що дозволяє зробити висновок про можливість їхнього використання для побудови різних математичних моделей.

1. *Hamilton W.R.* On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions / W.R. Hamilton // Proc. of the Royal Irish Academy. — 1844. — Vol. 2. — P. 424–434.

2. *Godel C.* An example of a new type of cosmological solutions of einstein`s field equations of gravitation / C. Godel // Rev. Mod. Phys. — 1949. — Vol. 21, N 3. — P. 447–450.

3. *Szeto G.* On generalized quaternion algebras / G. Szeto // Internat. I. Math. and Math. Sci. — 1980. — Vol. 3, N 2. — P. 237–245.

4. *Cai Yong-yu.* On the first-degree algebraic equation of the generalized quaternion / Cai Yong-yu // Chinese Quarterly Journal of Mathematics. — 2002. — Vol. 17, N 2. — P. 59–64.

5. *Flaut C.* An efficient method for solving equations in generalized quaternion and octonion algebras [Електронний ресурс] / C. Flaut, V. Shpakivskyi. — Режим доступу: http://arxiv.org/pdf/1405.5652.pdf.2014

6. *Jafari M.* Generalized quaternion and rotation in 3-space $E^3_{\alpha\beta}$ / M. Jafari, Y. Yayli // Department of Mathematics. Faculty of Science Ankara University. — 06100 Ankara, Turkey. — 11 p.

7. *Mamagami A. B.* On properties of generalized quaternion algebra / A.B. Mamagami, M. Jafari // Journal of Novel Applied Sciences. — 2013. — Vol. 2, N 12. — P. 683–689.

8. *Mamagami A.B.* Some notes on matrix of generalized quaternion / A.B. Mamagami, M. Jafari // International Research J. of Applied and Basic Sciences.— 2013. — Vol. 7, N 14. — P. 1164–1171.

9. *Computing* characteristics of one class of non-commutative hypercomplex number systems of 4-dimension [Електронний ресурс] / Y.O. Kalinovsky, D.V. Lande, Y.E. Boyarinova, A.S. Turenko. — Режим доступу: http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1409/1409.3193.pdf

10. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Наука, 1973. — 144 с.

11. *Калиновский Я.А.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: Инфодрук, 2012. — 183 с.

12. *Бояринова Ю.Е.* Неканонические гиперкомплексные числовые системы размерности 2 и их изоморфизмы / Ю.Е. Бояринова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2011. — Т. 13, № 1. — С. 29–38.

13. *Калиновский Я.А.* Исследование свойств изоморфизма квадриплексных и бикомплексных числовых систем / Я.А. Калиновский // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 1. — С. 69–73.

14. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

Надійшла до редакції 21.01.2015