ОБ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ, УПРАВЛЯЕМОЙ ЦЕПЬЮ МАРКОВА И СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ЕЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Т.Г.Трушко, Э.С.Штатланд
(г. Киев)

В работе рассматривается однолинейная система массового обслуживания с ожиданием (входящий поток требований – пуассоновский, время обслуживания каждого требования случайно с произвольной функцией распределения). Все параметры системы меняются во времени по марковскому закону. Более точно это означает следующее: имеется цепь Маркова $\eta(t)$ с конечным числом состояний $1,2,\ldots,N$ и матрицей плотностей вероятностей перехода

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_{12} & \cdots & q_{1N} \\ q_{21} & -q_2 & \cdots & q_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \cdots & -q_N \end{pmatrix};$$

марковская цепь $\eta(t)$ управляет системой обслуживания в том смысле, что если $\eta(t)=i$ $(1 \leq i \leq N)$ в течение некоторого времени, то в этом временном промежутке интенсивность входящего потока равна $\lambda_i > 0$, скорость обслуживания постоянна и равна $a_i \geqslant 0$, а время обслуживания требований, поступивших в этом интервале, имеет функцию распределения $H_i(x)$.

1. В этом пункте нас будет интересовать случайный процесс $\zeta(t)$, где $\zeta(t)$ в каждый момент t равно промежутку времени, которое должно протечь от момента t до полного освобождения прибора от обслуживания требований, поступивших в очередь до момента t. Если прибор свободен, то $\zeta(t)=0$. Сам процесс $\zeta(t)$ не является марковским, что затрудняет его изучение. Но довольно просто убедиться, что пара $\{\zeta(t), \eta(t)\}$ образует двумерный марковский процесс. Этот процесс и будет изучаться в дальнейшем. Введем обозначение

$$\mathcal{F}_{ij}(t,x) = P\{\zeta(t)<x, \eta(t)=j \,/\, \zeta(0)=0, \eta(0)=i\}$$
$$(1 \leqslant i,j \leqslant N, \; t \geqslant 0, \; x \geqslant 0).$$

Используя обычные при выводе уравнений Колмогорова рассуждения, получаем, что если функции распределения $H_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ абсолютно непрерывны, то $\mathcal{F}_{ij}(t,x)$ удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{ij}(t,x)}{\partial t} - a_j \frac{\partial \mathcal{F}_{ij}(t,x)}{\partial x} = -q_j \mathcal{F}_{ij}(t,x) - \lambda_j \mathcal{F}_{ij}(t,x)$$
$$+ \lambda_j \int_0^x \mathcal{F}_{ij}(t,x-y)\,dH_j(y) + \sum_{k \neq j} q_{kj} \mathcal{F}_{ik}(t,x) \tag{1}$$
$$(1 \leqslant i,j \leqslant N).$$

Применяя преобразование Лапласа по x, имеем

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{F}}_{ij}(t,s)}{\partial t} = \bar{\mathcal{F}}_{ij}(t,s)\Big[a_j s + \lambda_j \int_0^\infty e^{-sx} dH_j(x) - \lambda_j - q_j\Big] + \tag{2}$$

$$+ \sum_{k \neq j} \bar{\mathcal{F}}_{ik}(t,s)\, q_{kj} - a_j \mathcal{F}_{ij}(t,+0) ,$$

где

$$\bar{\mathcal{F}}_{ij}(t,s)=\int_0^\infty e^{-sx}\mathcal{F}_{ij}(t,x)\,dx \quad (Re\, s>0).$$

Введем следующие матрицы:

$$F(t,x)=\|\mathcal{F}_{ij}(t,x)\|, \quad \bar{F}(t,s)=\|\bar{\mathcal{F}}_{ij}(t,s)\|;$$

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad Q(s)=\begin{pmatrix} K_1(s)-q_1 & q_{12} & \dots & q_{1N} \\ q_{21} & K_2(s)-q_2 & \dots & q_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{N1} & q_{N2} & \dots & K_N(s)-q_N \end{pmatrix},$$

где $K_j(s)=a_j s+\lambda_j\int_0^\infty e^{-sx}dH_j(x)-\lambda_j$.

В матричных обозначениях система (2) приобретает очень простой вид:

$$\frac{\partial \bar{F}(t,s)}{\partial t}=\bar{F}(t,s)\cdot Q(s)-F(t,+0)\cdot A. \tag{3}$$

Заметим, что (3) имеет место и без предположения абсолютной непрерывности функций $H_i(x)$. Решая дифференциальное уравнение (3), получаем

$$\bar{F}(t,s)=\frac{e^{tQ(s)}}{s}-\int_0^t e^{(t-u)Q(s)}\cdot F(u,+0)\cdot A\,du . \tag{4}$$

Для того, чтобы найти неизвестную функцию-матрицу $F(t,+0)$, применим к равенству (3) преобразование Лапласа по t :

$$z\bar{\bar{F}}(z,s)-\bar{F}(0,s)=\bar{\bar{F}}(z,s)Q(s)-\bar{F}(z,+0)\cdot A . \tag{5}$$

Здесь

$$\bar{\bar{F}}(z,s)=\int_0^\infty e^{-zt}\bar{F}(t,s)dt, \quad \bar{F}(z,+0)=\int_0^\infty e^{-zt}F(t,+0)dt,$$
$$(Re\, z>0) .$$

В нашем случае $\zeta(0)=0$ с вероятностью 1 и, следовательно,

$$\bar{F}(0,s)=\frac{1}{s}I \quad , \quad I=\|\delta_{ij}\| \quad .$$

Из (5) следует

$$\bar{\bar{F}}(z,s)=\left[\frac{1}{s}I-\bar{F}(z,+0)A\right]\left[zI-Q(s)\right]^{-1} \quad . \tag{6}$$

В работе [1] доказывается, что существует матрица

$$R(z)=\begin{pmatrix} T_1(z)-r_1 & r_{12}\varphi_{12}(z) \ldots & r_{1N}\varphi_{1N}(z) \\ r_{21}\varphi_{21}(z) & T_2(z)-r_2 \ldots & r_{2N}\varphi_{2N}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{N1}\varphi_{N1}(z) & r_{N2}\varphi_{N2}(z) \ldots & T_N(z)-r_N \end{pmatrix}; \tag{7}$$

(здесь

$$\begin{pmatrix} -r_1 & r_{12} \ldots & r_{1N} \\ r_{21} & -r_2 \ldots & r_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{N1} & r_{N2} \ldots & -r_N \end{pmatrix}$$

-матрица плотностей переходных вероятностей некоторой однородной цепи Маркова с N состояниями;

$$T_i(z)=c_i+b_i z+\mu_i\int_0^\infty e^{-zx}dM_i(x)-\mu_i\,,\ (1\leq i\leq N),$$

$c_i\geq 0,\ b_i\geq 0$, $\mu_i\geq 0$; $M_i(x)$ – функции распределения;

$\varphi_{ij}(z)=\int_0^\infty e^{-zx}d\Phi_{ij}(x)$ – преобразования Лапласа

Стилтьеса неотрицательных случайных величин), удовлетворяющая функционально-матричному уравнению

$$Q(0)+R(z)A+\int_0^\infty e^{-xR(z)}d_x\begin{pmatrix}\lambda_1H_1(x) & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2H_2(x) & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & & \lambda_NH_N(x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N\end{pmatrix}=zI, \quad (8)$$

т.е.

$$Q(R(z)) = zI \quad . \qquad (8')$$

Подставим в (6) вместо s матрицу $R(z)$. Так как матрица $\bar{\bar{F}}(z,R(z))$ существует в обычном смысле, то

$$\bar{F}(z,+0) = R^{-1}(z)A^{-1} \quad . \qquad (9)$$

Соотношения (4) и (9) полностью определяют искомую матрицу-функцию $\bar{F}(t,z)$.

Замечание 1. В соотношении (4) можно перейти от преобразований Лапласа к оригиналам и получить представление для $F(t,x)$.

Замечание 2. Построенная нами схема может служить моделью следующей системы управления запасами: система запасания управляется марковской цепью $\eta(t)$; если $\eta(t)=i$ $(1\leq i\leq N)$ в течение некоторого времени, то в этом временном промежутке: а) запасы пополняются через показательно распределенные интервалы с параметром λ_i случайными порциями с функцией распределения $H_i(x)$; б) расходуются ресурсы с постоянной скоростью a_i; $\zeta(t)$ равно количеству ресурсов в системе в момент t.

2. Займемся теперь изучением предельного поведения $\mathcal{F}_{ij}(t,x)$ при $t\to\infty$. Предположим, что управляющая марковская цепь $\eta(t)$ эргодична и пусть

$\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N\}$ – вектор предельных вероятностей. Будем считать, что математические ожидания времен обслуживания конечны, т.е.

$$\theta_i = \int_0^\infty x\, dH_i(x) < \infty \qquad (1 \le i \le N).$$

Введем новую характеристику

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{N} \pi_i \lambda_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{N} \pi_i a_i} \tag{10}$$

и укажем физический смысл величин, фигурирующих в равенстве (10): $\sum_{i=1}^{N} \pi_i a_i$ – средняя скорость обслуживания; $\sum_{i=1}^{N} \pi_i \lambda_i \theta_i$ – средняя загрузка системы в единицу времени. Параметр ρ – отношение средней загрузки к средней скорости обслуживания – естественно назвать коэффициентом загруженности системы.

Эвристические соображения подсказывают, что необходимым и достаточным условием существования стационарного режима является неравенство $\rho < 1$. Докажем этот факт строго. Из (6) получаем

$$\lim_{t\to\infty} \bar{F}(t,s) = \lim_{z\to+0} z \bar{\bar{F}}(z,s) = \lim_{z\to+0} z \bar{F}(z,+0) A \cdot Q^{-1}(s) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} F(t,+0) A \cdot Q^{-1}(s).$$

Равенство (9) влечет

$$\lim_{t\to\infty} F(t,+0) = \lim_{z\to+0} z \bar{F}(z,+0) = \lim_{z\to+0} z R^{-1}(z) A^{-1}.$$

Легко показать, что в случае $\rho \ge 1$,

т.е. $\sum_{i=1}^{N} \pi_i \lambda_i \theta_i \ge \sum_{i=1}^{N} \pi_i a_i$

имеет место

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{F}_{ij}(t,+0) = 0, \quad (1 \le i,j \le N).$$

Если же $\rho < 1$, т.е. $\sum_{i=1}^{N} \pi_i a_i > \sum_{i=1}^{N} \pi_i \lambda_i \theta_i$, то постоянные C_i в (7) равны нулю и

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{F}_{ij}(t,+0) = \lim_{z\to+0} z \frac{R_{ji}(z)}{\det R(z)} \cdot \frac{1}{a_j} =$$

$$= \frac{R_{ji}(0)}{[\det R(0)]'} \cdot \frac{1}{a_j} = \frac{\pi_j'}{a_j} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} R_{ii}(0)}{[\det R(0)]'} \quad ,$$

где $R_{ji}(z)$ – алгебраическое дополнение элемента матрицы $R(z)$, стоящего на пересечении j-й строки и i-го столбца; $\{\pi_1', \pi_2', \ldots, \pi_N'\}$ – вектор предельных вероятностей марковской цепи с матрицей $R(0)$. Полагая в (8′) $z=0$, получаем

$$Q(R(0)) = O \quad ,$$

где O – матрица с нулевыми элементами. Из последнего соотношения непосредственно вытекает, что

$$\pi_j' = \frac{\pi_j a_j}{\sum_{i=1}^{N} \pi_i a_i} \quad , \ (1 \le j \le N) \ .$$

Таким образом,

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{F}_{ij}(t,+0) = \pi_j \frac{\sum_{i=1}^{N} R_{ii}(0)}{[\det R(0)]' \sum_{i=1}^{N} \pi_i a_i}$$

и

$$\lim_{t\to\infty} P\{\zeta(t)=0\} = \frac{\sum_{i=1}^{N} R_{ii}(0)}{[\det R(0)]' \sum_{i=1}^{N} \pi_i a_i} \quad ,$$

т.е. вероятность застать систему свободной в стационарном режиме $(\rho<1)$ равна

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} R_{ii}(0)}{[\det R(0)]' \sum_{i=1}^{N} \pi_i a_i} \quad .$$

..тывая все вышеизложенное, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \bar{F}(t,s) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} R_{ii}(0)}{[\det R(0)]' \sum\limits_{i=1}^{N} \pi_i a_i} \Pi A Q^{-1}(s),$$

где

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \end{pmatrix}.$$

Литература

1. И.И.Ежов, Исследования по теории случайных процессов с дискретной компонентой, К., 1967 (докторская диссертация).

Доложено на семинаре 19.1 1968 г.