# О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ ПО НАЧАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ

Б.Н.Пшеничный, Ю.М.Данилин
(г. Киев)

В теории дифференциальных уравнений доказывается теорема о существовании производных от решений системы по начальным значениям (см., например, [1] ). Доказательство ее проводится в предположении, что правые части системы дифференциальных уравнений являются непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов. Однако далеко не всегда правые части удовлетворяют таким требованиям. В частности, при решении весьма широкого круга задач оптимального управления, рассматриваемых в [2] , путем сведения исходной задачи к решению некоторой краевой задачи правые части получающейся системы дифференциальных уравнений являются разрывными функциями аргументов. Методы решения задач оптимального управления путем сведения их к решению краевых задач рассматривались во многих работах (см., например, [3 - 4] ). Эти методы существенно используют производные по начальным значениям от решения системы. Однако нам не встречалось распространение теоремы о дифференцируемости решения по начальным значениям на случай, когда правые части не удовлетворяют названным выше требованиям.

В данной статье доказывается теорема, позволяющая при определенных предположениях вычислять производные от решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным значениям в случае, когда правые части системы являются разрывными функциями своих аргументов, а также рассматривается ее применение к задачам оптимального управления.

Заметим, что всюду далее, записывая некоторый $n$-мерный вектор $a$, мы будем иметь в виду вектор-столбец, там же, где по смыслу задачи требуется употребление вектора-строки, мы будем записывать транспонированный вектор $a^*$. Записывая некоторую матрицу $\frac{\partial y}{\partial x} = \{\partial y^i / \partial x^j\}$, под $i$ будем подразумевать индекс строки, а под $j$ – индекс столбца.

1. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial y}{dt} = f(y) ,$$

$$y \in Y , \; y = (y^1, y^2, \dots, y^n) , \; 0 \leqslant t \leqslant T . \tag{1.1}$$

Функция $f(y)$ – непрерывно дифференцируема по $y$ всюду, за исключением поверхности $f(y) = 0$, на которой она терпит разрыв. Таким образом, можно полагать

$$f(y) = \begin{cases} f_1(y) & \text{при} \quad \varphi(y) < 0 ; \\ f_2(y) & \text{при} \quad \varphi(y) \geqslant 0 , \end{cases}$$

где $f_i(y)$, $i = 1,2$ – непрерывно дифференцируемы по $y$ на множестве $Y$. Функцию $\varphi(y)$ мы будем считать непрерывно дифференцируемой.

Пусть далее $M \subset Y$ – ограниченное открытое множество. В дальнейшем всюду для определенности будем предполагать, что если $y(0) = y_0 \in M$, то $f(y_0) \equiv f_1(y_0)$. Будем считать, что при любом $y_0 \in M$

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} , f_2(y) \right) \Big|_{y = x_1(y_0, t_1)} \neq 0 . \tag{1.2}$$

Здесь $x_1(y_0, t_1)$ – решение уравнения

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) \quad , \; x_1 \in Y \; , \; x_1(0) = y_0 \qquad (1.1')$$

в момент времени $t = t_1$, когда оно достигает поверхности $\varphi(y) = 0$. Если теперь решить уравнение

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2) , \qquad (1.1'')$$
$$x_2 \in Y , \; x_2(t_1) = x_1(y_0, t_1) , \; t_1 \leq t \leq T ,$$

то на всем отрезке $t_0 \leq t \leq T$ будет определена непрерывная функция, удовлетворяющая при $t \neq t_1$ системе (1.1) и принимающая при $t = 0$ значение $y_0$. Мы будем называть эту функцию решением системы (1.1). В силу теоремы существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений и условия (1.2) это решение будет единственным.

В предположении, что при любом $y_0 \in M$

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} , f_1(y) \right) \Bigg|_{y = x_1(y_0, t_1)} \neq 0 \quad , \qquad (1.3)$$

рассмотрим функцию $\varphi(x_1(y_0, t))$. При $t = t_1$ имеем:

а) $\varphi(x_1(y_0, t_1)) = 0$ ;

б) $\displaystyle \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} , \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \Bigg|_{x_1 = x_1(y_0, t_1)} \equiv \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} , f_1(x_1) \right) \Bigg|_{x_1 = x_1(y_0, t_1)} \neq 0$

в силу (1.3);

в) $\displaystyle \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \right)^{*} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^{*} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial y_0} \Bigg|_{x_1 = x_1(y_0, t_1)} , \left( \frac{\partial x_1}{\partial y_0} \equiv \left\{ \frac{\partial x_1^i}{\partial y_0^j} \right\} \right) .$

Производная $\frac{\partial x_1}{\partial y_0}$, как показано ниже (см. (1.7')), существует.

Следовательно, существует производная $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$. Условия а), б), в) показывают, что уравнение

$$\varphi(x_1(y_0, t)) = 0 \qquad (1.4)$$

в некоторой окрестности точки $(y_0, t_1)$ определяет непрерывно дифференцируемую функцию $t_1 = t(y_0)$ (по теореме о существовании неявной функции). Ее производную $\frac{dt(y_0)}{dy_0}$ получаем, дифференцируя уравнение (1.4) по $y_0$ при $t = t_1$ :

$$\left(\frac{dt(y_0)}{dy_0}\right)^* = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, f_1(x_1)\right)^{-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^* \cdot \frac{\partial x_1}{\partial y_0}\bigg|_{x_1 = x_1(y_0, t_1)}. \quad (1.5)$$

Докажем теперь одно утверждение, которое нам понадобится в дальнейшем.

Лемма 1.1. Если правая часть дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dt} = f(z) \quad ,$$

$$z \in Z \ , \ z = (z^1, z^2, \ldots, z^n) \ , \ 0 \leqslant t \leqslant T \ , \ z(0) = z_0 \ , \quad (1.6)$$

является непрерывно дифференцируемой функцией своего аргумента на множестве $Z$ , то при любом $t_0$ , $0 \leqslant t_0 \leqslant T$ справедливо равенство

$$f(z(z_0, t)) = \frac{\partial z(y, t - t_0)}{\partial y} f(y)\bigg|_{y = z(z_0, t_0)} ,$$

где

$$\frac{\partial z(y, t - t_0)}{\partial y}\bigg|_{y = z(z_0, t_0)} = \left\{\frac{\partial z^i(y, t - t_0)}{\partial y^j}\right\}\bigg|_{y = z(z_0, t_0)} .$$

**Доказательство.** Дифференцируя тождество

$$z(y, t - t_0 - \tau) \equiv z(z_0, t) ,$$

где $y = z(z_0, t_0 + \tau)$ ,

по $\tau$ , где $-t_0 \leqslant \tau \leqslant T - t_0$ , (это правомерно, поскольку в силу предположенной непрерывной дифференцируемости правой части уравнения (1.6), к его решению $z(z(z_0, t_0 + \tau), t - t_0 - \tau)$ применимо правило дифференцирования сложной функции), получаем:

$$\frac{\partial z(y,t-t_0-\tau)}{\partial y}\left.\frac{\partial y}{\partial \tau}\right|_{y=z(z_0,t_0+\tau)}-\left.\frac{\partial z(y,t-t_0-\tau)}{\partial t}\right|_{y=z(z_0,t_0+\tau)}=0$$

или

$$\left.\frac{\partial z(y,t-t_0-\tau)}{\partial y}f(y)\right|_{y=z(z_0,t_0+\tau)}=\left.f(z(y,t-t_0-\tau))\right|_{y=z(z_0,t_0+\tau)}.$$

Полагая здесь $\tau=0$, получим:

$$\left.\frac{\partial z(y,t-t_0)}{\partial y}f(y)\right|_{y=z(z_0,t_0)}=\left.f\left(z(y,t-t_0)\right)\right|_{y=z(z_0,t_0)}.$$

Но $z(y,t-t_0)=z(z(z_0,t_0),t-t_0)\equiv z(z_0,t)$, поэтому последнее равенство можно переписать в виде:

$$\left.\frac{\partial z(y,t-t_0)}{\partial y}f(y)\right|_{y=z(z_0,t_0)}=f(z(z_0,t)).$$

Лемма доказана.

Приступим к определению производной по начальному значению от решения системы (1.1).

В силу теоремы о дифференцируемости решения системы дифференциальных уравнений по начальному значению (см., например, [1] ), при любом $t$, $0\leqslant t\leqslant T$, существуют непрерывные производные $\frac{\partial x_1^i(y_0,t)}{\partial y_0^j}$ от решения уравнения (1.1$'$) по

начальному значению, удовлетворяющие системе урав-
нений в вариациях

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \frac{\partial f_1(x_1(y_0,t))}{\partial x_1}\bar{x}_1 \quad ,$$

$$\bar{x}_1 = (\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \ldots, \bar{x}_1^n), \ \bar{x}_1^i(t) = \frac{\partial x_1^i}{\partial y_0^k}, \ i = \overline{1,n} \quad , \qquad (1.7')$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \left\{ \partial f_1^i / \partial x_1^j \right\} \quad .$$

Производные для данного $k$ получаются при начальн[ых] условиях $\bar{x}_1^i(0) = 0$ при $i \neq k$ , $\bar{x}_1^k(0) = 1$ Следовательно, при $0 \leqslant t < t(y_0)$ существуют про[из]водные по начальным значениям от решения систем[ы] (1.1) (поскольку при $t < t(y_0)$ $\frac{\partial \bar{x}_1(y_0,t)}{\partial y_0} \equiv \frac{\partial y(y_0,t)}{\partial y_0}$

Теперь будем находить производную $\frac{\partial y(y_0,}{\partial y_0}$ при $t > t(y_0)$ . Заметим, что решение уравнени[я] (1.1") $x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0))$ является непрерыв[но] дифференцируемой функцией начального значения $y_0$ Действительно, в силу теоремы о дифференцируемост[и] решения системы уравнений по начальным значениям существует непрерывная производная $\frac{\partial x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0))}{\partial x_1}\Big|_{x_1=x_1(y_0,t(y_0))}$, а функция $x_1(y_0,t)$ как показано выше, дифференцируема по $y_0$ . Функция $t(y_0)$ также дифференцируема по $y_0$ , следовательно к решению $x_2(x_1(y_0,t(y_0)),\ t-t(y_0))$ применимо правило о дифференцировании сложной фун[к]ции. Отсюда вытекает, что существует производная $\partial x_2/\partial \ell = \partial x_2/\partial y_0 \cdot \ell$ , где $\ell = (\ell', \ell^2, \ldots, \ell^n)$ произвольно выбранное направление в пространстве $Y$ а $\partial x_2/\partial y_0 = \{\partial x_2^i/\partial y_0^j\}$ . По правилу дифференци[ро]рования сложной функции получаем:

$$\frac{\partial x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0))}{\partial y_0}\ell=-\frac{\partial x_2}{\partial t}\left(\frac{dt(y_0)}{\partial y_0},\ell\right)+$$

$$+\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\left[\frac{\partial x_1}{\partial y_0}\ell+\frac{\partial x_1}{\partial t}\left(\frac{dt(y_0)}{dy_0},\ell\right)\right]\Bigg|_{x_1=x_1(y_0,t(y_0))}\equiv \qquad (1.8)$$

$$\equiv\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_0}\ell\Bigg|_{x_1=x_1(y_0,t(y_0))}+\left(\frac{dt(y_0)}{dy_0},\ell\right)\left[\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}-\frac{\partial x_2}{\partial t}\right]\Bigg|_{x_1=x_1(y_0,t(y_0))}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1}=\left\{\partial x_2^i\Big/\partial x_1^j\right\}.$$

Здесь

$$\frac{\partial x_1(y_0,t)}{\partial t}\Bigg|_{t=t(y_0)}\equiv f_1(x_1(y_0,t(y_0))),$$

$$\frac{\partial x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0))}{\partial t}\equiv f_2(x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0))).$$

Для уравнения ($1.1''$) справедлива лемма 1.1. Поэтому можно записать:

$$f_2(x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0)))=$$

$$=\frac{\partial x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0))}{\partial x_1}\Bigg|_{x_1=x_1(y_0,t(y_0))}\cdot f_2(x_2(x_1(y_0,t(y_0)),0))$$

или с учетом того, что

$$x_2(x_1(y_0,t(y_0)),0) \equiv x_1(y_0,t(y_0)) \ ,$$

получаем:

$$f_2(x_2(x_1(y_0,t(y_0)),\ t-t(y_0))) = \\ = \frac{\partial x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0))}{\partial x_1} f_2(x_1)\Big|_{x_1=x_1(y_0,t(y_0))} . \tag{1.9}$$

Используя (1.9), равенство (1.8) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0))}{\partial y_0}\ell = \frac{\partial x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0))}{\partial x_1} \times \\ \times\left[\frac{\partial x_1}{\partial y_0}\ell + \left(\frac{dt(y_0)}{dy_0},\ell\right)(f_1(x_1)-f_2(x_1))\right]\Big|_{x_1=x_1(y_0,t(y_0))} . \tag{1.10}$$

Производные $\partial x_2^i/\partial x_1^j\Big|_{x_1=x_1(y_0,t(y_0))}$, $i,j=1,2,\ldots,n$ удовлетворяют такой системе в вариациях:

$$\frac{d\tilde{x}_2}{dt} = \frac{\partial f_2(x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0)))}{\partial x_2}\tilde{x}_2 \ ,$$

$$0 \leq t \leq T \tag{1.11}$$

$$\tilde{x}_2 = (\tilde{x}_2^1, \tilde{x}_2^2, \ldots, \tilde{x}_2^n) \ ,$$

$$\tilde{x}_2^i = \frac{\partial x_2^i}{\partial x_1^k}\Big|_{x_1=x_1(y_0,t(y_0))} , \quad i=\overline{1,n} \ ,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \left\{ \partial f_2^i/\partial x_2^j \right\} .$$

Производные для данного $k$ получаются при начальных условиях $\tilde{x}_2^i(t(y_0))=0$ при $i \neq k$ и $\tilde{x}_2^k(t(y_0)) = 1$ . Если $\Phi(t(y_0), t-t(y_0))$ – фундаментальная матрица решений системы (1.11), то

$$\left.\frac{\partial x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0))}{\partial x_1}\right|_{x_1=x_1(y_0,t(y_0))} = \Phi(t(y_0),t-t(y_0))E\,, \quad (1.12)$$

где $E$ – единичная матрица порядка $n$ .

С учетом (1.12) равенство (1.10) показывает, что производная $\frac{\partial x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0))}{\partial y_0}$ является решением следующей системы уравнений:

$$\frac{d\bar{x}_2}{dt} = \frac{\partial f_2(x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0)))}{\partial x_2}\bar{x}_2\,,$$

$$0 \leqslant t \leqslant T \qquad (1.7'')$$

$$\bar{x}_2=(\bar{x}_2^1, \bar{x}_2^2,\dots,\bar{x}_2^n),\ \bar{x}_2^i=\frac{\partial x_2^i}{\partial y_0^k},\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}=\left\{\partial f_2^i \big/ \partial x_2^j\right\},$$

$$\left.\frac{\partial x_2}{\partial y_0}e\right|_{t=t(y_0)} = \left.\frac{\partial x_1(y_0,t)}{\partial y_0}\right|_{t=t(y_0)} e \; +$$

$$+\left(\frac{dt(y_0)}{dy_0},e\right)\left.\Big(f_1(x_1)-f_2(x_1)\Big)\right|_{x_1=x_1(y_0,t(y_0))}.$$

Для того, чтобы получить производную $\frac{dx_2}{dy_0^k} = \left(\frac{\partial x_2^1}{\partial y_0^k}, \frac{\partial x_2^2}{\partial y_0^k}, \dots, \frac{\partial x_2^n}{\partial y_0^k}\right)$ для заданного $k$, необходимо выбрать вектор $e=(\underbrace{0,\dots,0}_{k-1},1,0,\dots,0)$. Но при $t>t(y_0)$ $\frac{\partial y(y_0,t)}{\partial y_0} \equiv \frac{\partial x_2(x_1(y_0,t(y_0)),t-t(y_0))}{\partial y_0}$ .

Следовательно, система уравнений (1.7″) позволяет вычислить производные от решения системы (1.1) по начальным значениям при $t>t(y_0)$ .

Покажем теперь, что в момент времени $t=t(y_0)$ при условии, что $\frac{dt(y_0)}{dy_0} \neq (0,\ldots,0)$, существуют односторонние производные от решения по начальным значениям.

Пусть, как и прежде, $y_0 \in M$, и пусть $\bar{y}_0 = y_0 + \lambda \ell$ – новое начальное значение, лежащее в достаточно малой окрестности $y_0$, так что $\bar{y}_0 \in M$.

Пусть, для определенности $\frac{dt(y_0)}{d\ell} = \left(\frac{dt(y_0)}{dy_0}, \ell\right) > 0$. Тогда при $\lambda > 0$ $t(\bar{y}_0) > t(y_0)$, при $\lambda < 0$ $t(\bar{y}_0) < t(y_0)$.

Будем сейчас находить производные от решения по начальным значениям при $\lambda < 0$. Решение системы (1.1), соответствующее начальному значению $\bar{y}_0$, в момент $t(y_0)$ будет $x_2(x_1(\bar{y}_0(t,\bar{y}_0)),0)$ (поскольку при $t(\bar{y}_0)<t(y_0)$ решение пересекло поверхность $\varphi(y)=0$). Решение, соответствующее начальному значению $y_0$:

$$x_1(y_0, t(y_0)) \equiv x_2(x_1(y_0, t(y_0)), 0).$$

Найдем предел отношения

$$\frac{x_2(x_1(y_0+\lambda\ell, t(y_0+\lambda\ell)), 0) - x_2(x_1(y_0, t(y_0)))}{\lambda}$$

при $\lambda \to 0$. Но это есть не что иное, как производная

$$\frac{\partial x_2(x_1(y_0, t(y_0)), t-t(y_0))}{\partial y_0}\ell \Big|_{t=t(y_0)},$$

которая определяется выражением (1.10) при $t=t(y_0)$. Обозначая производную от решения системы (1.1) в момент времени $t=t(y_0)$ по направлению $\ell$ при $\lambda<0$ через $\frac{\partial y(y_0, t(y_0))}{\partial y_0}\ell\Big|_{\lambda<0}$, получаем:

$$\frac{\partial y(y_0,t(y_0))}{\partial y_0}\ell\Big|_{\lambda<0} = \frac{\partial x_1}{\partial y_0}\ell\Big|_{x_1=x_1(y_0,t(y_0))} + \left(\frac{dt(y_0)}{dy_0},\ell\right)\left[f_1(x_1)-f_2(x_1)\right]\Big|_{x_1=x_1(y_0,t(y_0))} \qquad (1.13)$$

Найдем теперь производные от решения по начальным значениям при $\lambda>0$ (при этом $t(\bar{y}_0) > t(y_0)$). Решение системы (1.1), соответствующее начальному значению $\bar{y}_0$ в момент $t(y_0)$, будет $x_1(\bar{y}_0, t(y_0))$.

Следовательно,

$$\frac{\partial y(y_0,t(y_0))}{\partial y_0}\ell\Big|_{\lambda>0} \equiv \lim_{\lambda\to 0}\frac{x_1(y_0+\lambda\ell,t(y_0))-x_1(y_0,t(y_0))}{\lambda} = \frac{\partial x_1(y_0,t(y_0))}{\partial y_0}\ell\,. \qquad (1.14)$$

Здесь $\frac{\partial y(y_0,t(y_0))}{\partial y_0}\ell\Big|_{\lambda>0}$ – производная от решения системы (1.1) в момент времени $t=t(y_0)$ по направлению $\ell$ при $\lambda>0$. Сравнивая (1.13) с (1.14) убеждаемся, что в момент времени $t=t(y_0)$, при условии $\frac{dt(y_0)}{dy_0}\neq(0,\dots,0)$ производная от решения системы (1.1) терпит разрыв, величина которого равна:

$$\left(\frac{dt(y_0)}{dy_0},\ell\right)\left[f_1(x_1)-f_2(x_1)\right]\Big|_{x_1=x_1(y_0,t(y_0))}. \qquad (1.15)$$

В случае, когда $\frac{dt(y_0)}{dy_0}=(0,\dots,0)$, выражение (1.15) обращается в нуль, следовательно, если $\frac{dt(y_0)}{dy_0}=(0,\dots,0)$ при любом $t$, $0\leq t\leq T$, существует непрерывная производная $\partial y(y_0,t)/\partial y_0$. Для ее вычисления служит система (1.7).

Итак, нами доказана следующая теорема.

**Теорема 1.1.** Пусть правые части системы дифференциальных уравнений (1.1) непрерывно дифференцируемы по $y\in Y$ всюду, за исключением поверхности $\varphi(y)=0$, на которой они терпят разрыв, а решение $y(t)$, полученное при начальном значении $y(0)=y_0\in M$ удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3). Тогда в случае, если $\frac{dt(y_0)}{dy_0}\neq(0,\dots,0)$ при любом $t$, $0\leq t\leq T$, за исключением $t=t(y_0)$, существует производная по начальному значению от решения системы (1.1), причем при $t<t(y_0)$ она удовлетворяет системе (1.7'), а при $t>t(y_0)$ – системе (1.7''). При $t=t(y_0)$ существуют односторонние производные от решения по любому направлению $\ell$, определяемые выражениями (1.13) и (1.14). В случае, когда

$\frac{dt(y_0)}{dy_0}=(0,\dots,0)$, при любом $t$, $0\le t\le T$ существует непрерывная производная по начальному значению от решения системы (1.1), удовлетворяющая системе (1.7′).

2. Легко обобщить доказанную теорему на случай, когда правая часть уравнения (1.1) терпит разрывы на конечном числе поверхностей $\varphi_i(y)=0$, $i=1,2,\dots,n$. Обозначим поверхности $\varphi_i(y)=0$ через $M_i$ (т.е. $M_i=\{y:\varphi_i(y)=0\}$), и пусть $N_i=\{y : \varphi_i(y)<0\}$. Будем считать, что $M_j\subset N_{j+1}$, $j=\overline{1,n-1}$. В этом случае можно полагать

$$f(y)=\begin{cases} f_1(y) & \text{при} \quad \varphi_1(y)<0, \\ f_i(y) & \text{при} \quad \varphi_i(y)\ge 0,\ \varphi_{i+1}(y)<0, \\ f_{n+1}(y) & \text{при} \quad \varphi_n(y)\ge 0, \end{cases}$$

$$i=2,3,\dots,n,$$

где $f_j(y)$, $j=\overline{1,n+1}$ – непрерывно дифференцируемы по $y$ на множестве $Y$. Функции $f_i(y)$ $i=\overline{1,n}$ будем считать, как и прежде, непрерывно дифференцируемыми. Для определенности предположим, что если $y_0\in M$, то $f(y_0)\equiv f_1(y_0)$. Условия, аналогичные (1.2) и (1.3), будут иметь вид:

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}, f_{i+1}(y)\right)\Bigg|_{y=x_i(x_i(t_{i-1}(y_0)),t_i(y_0)-t_{i-1}(y_0))}\ne 0, \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}, f_i(y)\right)\Bigg|_{y=x_i(x_i(t_{i-1}(y_0)),t_i(y_0)-t_{i-1}(y_0))}\ne 0, \tag{2.3}$$

$$i=1,2,\dots,n.$$

Здесь $x_i(x_i(t_{i-1}(y_o)), t_i(y_o) - t_{i-1}(y_o))$ — решение соответствующей системы (аналогичной (1.1), (1.1″):

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

$$x_i \in Y, \ x_1(0) = y_o, \ x_{j+1}(t_j(y_o)) = \tag{2.1}$$

$$= x_j(x_j(t_{j-1}(y_o)), t_j(y_o) - t_{j-1}(y_o)), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$t_{i-1}(y_o) \leq t \leq t_i(y_o), \ t_o(y_o) = 0, \ t_{n+1}(y_o) = T$$

в момент времени $t_i(y_o)$, когда оно достигает поверхности $\varphi_i(y) = 0$. Так же, как и в п.1 можно показать, что при выполнении условий (2.2) и (2.3):

а) решение системы (1.1), удовлетворяющее условию $y(0) = y_o$, будет единственным, а функции $t_j(y_o)$ непрерывно дифференцируемы;

б) решение каждой из систем (2.1) $x_j(x_j(t_{j-1}(y_o)), t - t_{j-1}(y_o))$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$ является непрерывно дифференцируемой функцией начального значения $y_o$.

Проводя дальнейшие рассуждения, аналогичные изложенным в п.1, получим следующие результаты:

$$\frac{\partial x_i(x_i(t_{i-1}(y_o)), t - t_{i-1}(y_o))}{\partial y_o} e =$$

$$= \frac{\partial x_i(x_i(t_{i-1}(y_o)), t - t_{i-1}(y_o))}{\partial x_{i-1}} \times \tag{2.10}$$

$$\times \left[ \frac{\partial x_{i-1}}{\partial y_o} e + \left( \frac{dt_{i-1}(y_o)}{dy_o}, e \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left( f_{i-1}(x_{i-1}) - f_i(x_{i-1}) \right) \right] \Bigg|_{x_{i-1} = x_{i-1}(x_{i-1}(t_{i-2}(y_o)), t_{i-1}(y_o) - t_{i-2}(y_o))},$$

$$i = 2, 3, \ldots, n+1, \ t_{i-1}(y_o) \leq t \leq t_i(y_o).$$

Здесь $\left(\dfrac{dt_{i-1}(y_0)}{dy_0}\right)^* = \left(\dfrac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial x_{i-1}}, f_{i-1}(x_{i-1})\right)^{-1} \times$

$$\times \left(\frac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial x_{i-1}}\right)^* \cdot \frac{\partial x_{i-1}}{\partial y_0}\Bigg|_{x_{i-1}=x_{i-1}(x_{i-1}(t_{i-2}(y_0)),t_{i-2}(y_0)-t_{i-1})} .$$

Равенство (2.10) позволяет заключить (см.п.1), что производная

$$\frac{\partial x_i(x_i(t_{i-1}(y_0)),t-t_{i-1}(y_0))}{\partial y_0}$$

является решением соответствующей системы (аналогичной системе (1.7″)) уравнений в вариациях:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \frac{\partial f_i(x_i(x_i(t_{i-1}(y_0)),t-t_{i-1}(y_0))}{\partial x_i}\bar{x}_i ,$$

$$t_{i-1}(y_0)\leqslant t\leqslant t_i(y_0),\ \bar{x}_i=(\bar{x}_i^1,\dots,\bar{x}_i^n),\ \bar{x}_i^j\equiv\frac{\partial x_i^j}{\partial y_0^k} , \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=\left\{\frac{\partial f_i^j}{\partial x_i^k}\right\},\ k,j=1,2,\dots,n;\quad i=1,2,\dots,n+1$$

( $j$ – индекс строки) с начальными условиями:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_r}\ell\Bigg|_{t=t_{i-1}(y_0)} = \frac{\partial x_{i-1}}{\partial y_0}\ell + \left(\frac{dt_{i-1}(y_0)}{dy_0},\ell\right)\times$$

$$\times\left(f_{i-1}(x_{i-1})-f_i(x_{i-1})\right)\Bigg|_{x_{i-1}=x_{i-1}(x_{i-1}(t_{i-2}(y_0)),t_{i-1}(y_0)-t_{i-2}(y_0))}$$

3. Доказанная теорема представляет интерес, в частности, при решении задач оптимального управления, рассматриваемых в [2], решение которых удается получить путем сведения исходной задачи оптимального управления к решению некоторой краевой задачи.

Такой подход возможен в случае, когда удается с помощью принципа максимума выразить управление в виде функции фазовых координат. В подавляющем большинстве практически важных случаев управление является разрывной функцией фазовых координат, поэтому правые части системы дифференциальных уравнений, к решению которой сводится задача оптимального управления, не удовлетворяют требованиям, предъявляемым известной теоремой о дифференцируемости решения по начальным данным. В связи с этим, хотя такой способ решения задач оптимального управления уже и рассматривался в ряде работ, возможности его использования были весьма ограничены. Применение доказанной в данной статье теоремы позволяет значительно расширить круг задач, решение которых можно получить с помощью указанного подхода.

Сейчас мы коротко остановимся на методе, о котором идет речь, и рассмотрим, как применяется полученная теорема. Для определенности будет рассмотрена задача с подвижным правым концом и фиксированным временем. С соответствующими изменениями этот метод применим и для решения других задач, рассматриваемых в [2].

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \qquad x = (x^1, \dots, x^n), \quad u = (u^1, \dots, u^r), \tag{3.1}$$

$x \in X$, $u \in U$, $U$ – замкнутое ограниченное множество, $0 \leq t \leq T$, $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1 \in S$, где $S$ – гиперплоскость пространства $X$ размерности $p \leq n$, фиксирующая $n-p$ координат вектора $x(T)$; $f(x, u)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов.

Пусть, кроме того, дан функционал

$$J = \int_0^T f^\circ(x(t), u(t))\,dt. \tag{3.2}$$

Требуется найти управление $u(t)$ такое, что оно переводит фазовую точку из фиксированного положения $x_0$ в некоторое положение $x_1 \in S$ и придает при этом функционалу (3.2) наименьшее значение. Для решения задачи в соответствии с [2] составляем функцию

$$\mathcal{H}(x, \psi, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f^i(x,u) \qquad (3.3)$$

и сопряженную систему

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad i=\overline{0,n}. \qquad (3.4)$$

Из (3.3) выражаем

$$u = u(x, \psi) \qquad (3.5)$$

таким образом, чтобы функция $\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u)$ переменного $u \in U$ достигала максимума. В дальнейшем будем считать функцию $u(x,\psi)$ дважды непрерывно дифференцируемой всюду, кроме конечного числа поверхностей переключения $\varphi_j(x, \psi) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k < \infty$, на которых она терпит разрывы.

Подставив $u(x, \psi)$ в (3.1), (3.2) и (3.4), сведем исходную задачу оптимального управления к решению следующей двухточечной краевой задачи: найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u(x, \psi)), \qquad (3.6)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha(x, u(x, \psi))}{\partial x^i} \psi_\alpha,$$

$$i = 0, 1, \ldots, n,$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$(x^0(0)=0$, $x^i(0)=x_0^i$, $x^i(T)=x_1^i\in S$, $i=\overline{1,n}$, а значение функции $\psi(t)$ при $t=T$ определяется из условий трансверсальности. Согласно условию трансверсальности должно выполняться равенство

$$(\psi(T),\theta)=0, \tag{3.7}$$

где $\theta=(\theta^1,\ldots,\theta^n)$ – произвольный вектор, принадлежащий гиперплоскости $S$.

Выше говорилось, что гиперплоскость $S$ размерности $p$ фиксирует $n-p$ координат вектора $x(T)$; допустим, что $x^j(T)=C_j$, $j=p+1,\ldots,n$. С учетом этого равенство (3.7) дает

$$\psi_\alpha(T)=0, \quad \alpha=1,2,\ldots,p.$$

Кроме того, из принципа максимума вытекает, что $\psi_0(t)=const\leq 0$. Если $\psi_0\neq 0$, то можно положить $\psi_0=-1$.

Решение полученной краевой задачи можно осуществить следующим способом: задаваясь недостающими граничными условиями на левом конце, т.е. полагая $\psi_i(0)=\beta_i$, $i=1,2,\ldots,n$, где $\beta_i$ – некоторые произвольные постоянные, решаем задачу Коши и получаем значение фазовых координат $x_T^i$, $i=\overline{0,n}$ и $\psi_j^T$, $j=\overline{1,n}$ на правом конце. Краевая задача будет решена, если мы подберем значения $\psi_i(0)$ таким образом, чтобы $x_T^j=C_j$, $j=p+1,\ldots,n$, $\psi_\alpha^T=0$, $\alpha=1,2,\ldots,p$. Для этого, очевидно, необходимо найти минимум функции

$$F(\psi_1(0),\ldots,\psi_n(0))=\frac{1}{2}\left[\sum_{j=p+1}^{n}(x_T^j-C_j)^2+\sum_{\alpha=1}^{p}(\psi_\alpha^T)^2\right]. \tag{3.8}$$

Минимизацию функции $F(\psi(0))$ можно проводить, например, используя градиентные методы. По-видимому, здесь будет эффективным применение методов с ускоренной сходимостью, описанных, например в [5].

Градиент функции $F(\psi(0))$

$$\frac{\partial F}{\partial \psi_1(0)}, \ \frac{\partial F}{\partial \psi_2(0)}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial \psi_n(0)}$$

имеет вид:

$$\sum_{j=p+1}^{n} (x_T^j - c_j) \frac{\partial x_T^j}{\partial \psi_i(0)} + \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha^T \frac{\partial \psi_\alpha^T}{\partial \psi_i(0)} . \qquad (3.9)$$

Для его вычисления, как это следует из (3.9), необходимо находить производные от решений системы (3.6) по начальным данным. При этом следует учесть, что правые части уравнений системы (3.6) являются разрывными функциями своих аргументов, поскольку управление $u(x,\psi)$ , определяемое уравнениями (3.5), есть разрывная функция аргументов $x, \psi$ . В связи с этим, для вычисления производных $\partial x_T^j / \partial \psi_i(0)$, $\partial \psi_\alpha^T / \partial \psi_i(0)$ необходимо применять теорему 1.1. Используя (2.7), мы сможем вычислять производные от решения системы (3.6) по начальным данным и, следовательно, градиент (3.9).

Возвращаясь к обозначениям п.1, отметим один факт, имеющий место в случае, когда $f_1(y)$ (т.е. правая часть системы (3.6) до момента $t_1(y_0)$ ) есть линейная функция аргумента $y$ .

Пусть $f_1(y) = A_1 y$ , $A_1$ – матрица $n \times n$ с постоянными элементами. Пусть, далее, $\Phi_1(t)$ – фундаментальная матрица решений уравнения

$$\frac{dx_1}{dt} = A_1 x_1 ,$$

$$x_1 \in Y, \quad x_1(t_0) = y_0 .$$

Тогда

$$x_1(y_0, t) = \Phi_1(t) y_0 .$$

Отсюда

$$\frac{\partial x_1(y_0,t)}{\partial y_0} = \Phi_1(t) . \qquad (3.10)$$

Выражение (3.10) показывает, что в случае, когда $f_1(y)$ есть линейная функция аргумента, производная $\frac{\partial x_1(y_0,t)}{\partial y_0}$ не зависит от начального значения $y_0$.

Таким образом, при минимизации функции (3.8) нет необходимости каждый раз при изменении начальных значений решать систему (1.7). Это замечание имеет смысл учитывать при решении задач оптимального управления с помощью ЭЦВМ, так как возможность отказаться от многократного интегрирования системы дифференциальных уравнений существенно сокращает затраты машинного времени.

## Литература


1. Л.С.Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, изд-во „Наука", М., 1965.

2. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.М.Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.

3. Г.Л.Гродзовский, Ю.Н.Иванов, В.В.Токарев, „Инженерный журнал", 4, вып.2, 1964.

4. С. Ульм, О решении краевых задач, вытекающих из принципа максимума, „Известия АН Эст.ССР. Физика. Математика", 16/1, 1961.

5. R.Fletcher, M.J.D.Powell „A Rapidly Convergent Descent Methods for Minimization". Comput. J., v.6, 1963/64.


Доложено на семинаре 26.I 1968 г.