Теорія оптимальних рішень

УДК 519.8

Т.А. БАРДАДЫМ

ЗАДАЧА О ДВУХ ТРЕУГОЛЬНИКАХ

Приведено решение задачи поиска прямоугольного треугольника, наиболее близкого к заданному треугольнику при различных нормировках.

Введение. Рассматривается следующая задача. На плоскости задан треугольник со сторонами *a*, *b*, *c*. Найти прямоугольный треугольник с катетами *x*, *y*, наиболее близкий к задан-ному, т. е. найти минимум функции

$$F_p = \left(|a-x|^p + |b-y|^p + \left| c - \sqrt{x^2+y^2} \right|^p \right)^{1/p}$$

для $1 \le p \le 2$.

Задачу предложил Борис Гольденгорин (https://www.linkedin.com/in/borisgoldengorin). По его словам, поводом к ее созданию послужила необходимость рационально закупить материал для установки контрфорсов при укреплении стены дома. Конструкции должны были иметь вид прямоугольных треугольников, а брусья продавались только стандартной длины, и естественным желанием было минимизировать величину отходов.

Далее будут рассмотрены несколько подходов к решению этой задачи. Отметим, что вид функции F_p и, соответственно, найденное решение приведены с точностью до циклической перестановки сторон исходного треугольника. Кроме того, она допускает решение даже если стороны *a*, *b* и *c* не позволяют образовать треугольник, а ее решение можно использовать не только при оптимальной закупке материалов, но и как полезное упражнение для изучающих оптимизацию.

1. Начнем с подхода, предложенного Н.Г. Журбенко. Рассмотрим для $p = 2$ положительный октант трехмерного пространства 0*xyz*, координаты которого соответствуют

сторонам треугольника, а каждому треугольнику соответствует некоторая точка этого октанта. Если учесть неравенство треугольника, то окажется, что множество точек, соответствующих треугольникам, является многогранным конусом и полностью принадлежит рассмотренному октанту, но не совпадает с ним.

Точки, соответствующие прямоугольным треугольникам с катетами x, y, расположены на невыпуклой конической поверхности C, сечение которой плоскостью $z = \text{const}$ является окружностью $x^2 + y^2 = c^2$. Каждая из образующих этой конической поверхности наклонена к плоскости $0xy$ под углом 45°.

Поскольку заданный треугольник не является прямоугольным, то точка (a, b, c) не будет принадлежать этой конической поверхности. Если $\sqrt{a^2+b^2} > c,$ она окажется вне области, ограниченной этой поверхностью, а если $\sqrt{a^2+b^2} < c,$ – то внутри нее. В итоге задача сводится к поиску точки на поверхности C, наименее удаленной от точки $T = (a, b, c),$ т. е. к построению проекции P точки T на поверхность C.

Построим плоскость Pl, проходящую через ось $0z$ и точку T (рис. 1). Обозначим $N = (a, b, \sqrt{a^2+b^2})$ точку пересечения вертикали, проходящей через T, с поверхностью C, а P – проекцию T на прямую $0N$. Ясно, что P – это искомая точка $(x, y, \sqrt{x^2+y^2})$. При этом

$$PT = F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} TN = \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \sqrt{a^2+b^2} - c \right|. \qquad (1)$$

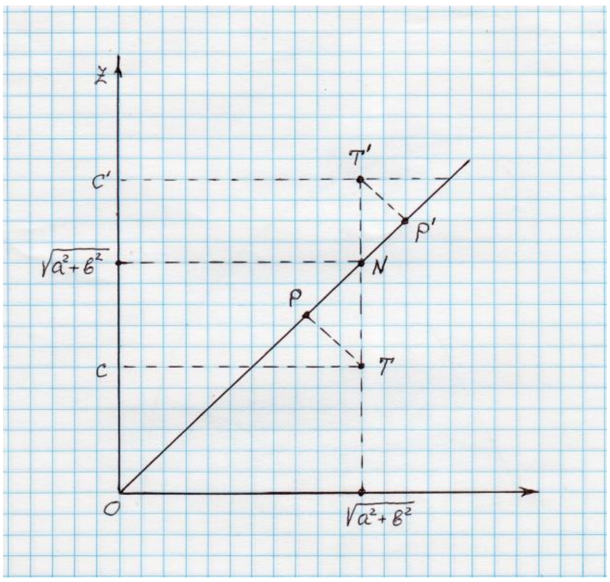

РИС. 1

Поскольку точка $(x,\ y,\ \sqrt{x^2+y^2})$ лежит в плоскости $Pl,$ то $x/y=a/b,$ и координаты точки можно искать в виде $x=ka,$ $y=kb.$ Коэффициент k найдем, сравнивая третьи координаты точек P,T,N:

$$x^2+y^2=k^2(a^2+b^2)=\left(c+\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-c\right)\right)^2=\frac{1}{4}\left(c+\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

откуда

$$x=\frac{a}{2}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+1\right),\quad y=\frac{b}{2}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+1\right). \qquad (2)$$

Из рис. 1 понятно, что $x<a,$ $y<b.$ Действительно, для $\sqrt{a^2+b^2}>c$ имеем $k=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+1\right)<1$. Если в случае $\sqrt{a^2+b^2}<c'$ выполнить аналогичное построение, задача сводится к нахождению проекции P' точки T' (рис. 1); значение целевой функции, и значения искомых катетов по форме будут совпадать с (1) и (2) соответственно, причем $x>a,$ $y>b,$ поскольку в данном случае $k=\frac{1}{2}\left(\frac{c'}{\sqrt{a^2+b^2}}+1\right)>1$.

2. Можно предложить и другой путь. Ограничимся сначала поиском точек вида $x=ka,$ $y=kb.$ Из рис. 2 (где $OM=c,$ $ON=\sqrt{a^2+b^2}$, $NK=x-a$, $NL=y-b$) по теореме Пифагора $(x-a)^2+(y-b)^2=NK^2+KQ^2=NQ^2$, откуда $F_2=\sqrt{NQ^2+QM^2}$, а минимум NQ^2+QM^2 по теореме о средних достигается, если $NQ=QM$ – при этом все снова сводится к (1) и (2). (Теорема о средних здесь используется в следующей формулировке: если для $x_1>0,\ i=\overline{1,n}$ обозначить $A_d(x_1,...,x_n)=\sqrt[d]{\left(x_1^d+...+x_n^d\right)/n}$, то для $d_1>d_2$ выполняется $A_{d_1}\ge A_{d_2}$, причем равенство имеет место при $x_1=x_2=...=x_n$).

Предположим теперь, что $x/y\ne a/b$, от рис. 2 переходим к рис. 3, где $ON=ON_1=\sqrt{a^2+b^2}$, $OQ=OQ_1=\sqrt{x^2+y^2}$, $OM=OM_1=c$. Снова воспользовавшись теоремой Пифагора и теоремой о средних, получаем

$$F_2=\left((x-a)^2+(y-b)^2+\left|c-\sqrt{x^2+y^2}\right|^2\right)^{1/2}=$$

$$=\left(NL^2+NK^2+Q_1M_1{}^2\right)^{1/2}=\left(NQ_1{}^2+Q_1M_1{}^2\right)^{1/2}=$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{NQ_1^{\ 2} + Q_1M_1^{\ 2}}{2}\right)^{1/2} > \frac{\sqrt{2}}{2} N_1M_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\sqrt{a^2+b^2} - c\right|.$$

То есть, оптимальная точка Q обязательно лежит на прямой OM и, как указывалось выше, делит отрезок NM пополам.

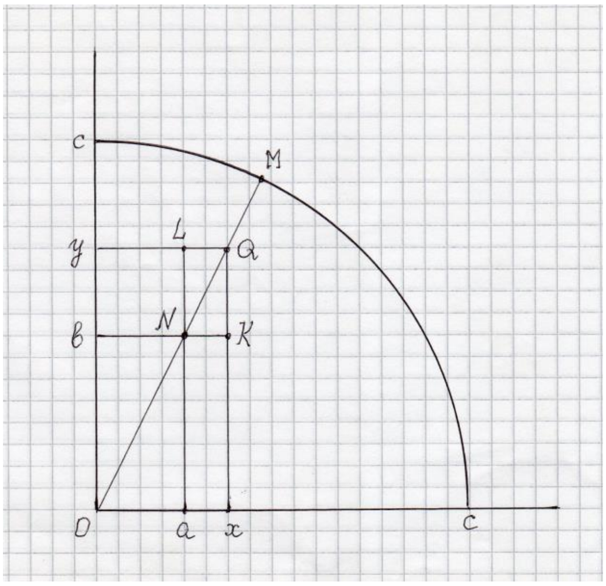

РИС. 2

3. Для $p=1$ выпишем необходимые условия экстремума и найдем точки, в которых $0 \in \partial F_1$, где ∂F_1 – субдифференциал функции F_1. Пусть

$$Sign(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ [-1,\ 1], \text{ если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

(ее аналогом для n-мерного пространства является субдифференциал нормы в этом пространстве). Тогда из условий оптимальности

$$0 \in Sign(x-a) + Sign(\sqrt{x^2+y^2} - c) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$0 \in Sign(y-b) + Sign(\sqrt{x^2+y^2} - c) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Если $x \neq a,\ y \neq b,$ эти условия сводятся к $0 \in \pm 1 \pm \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $0 \in \pm 1 \pm \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, что не выполняется. Если $x = a,\ y \neq b,$ из условий следует $0 \in [-1, 1] \pm \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $0 \in \pm 1 \pm \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, и хотя первое условие выполняется, то второе – нет. Аналогичная ситуация будет и для $x \neq a,\ y = b.$

Остается только случай $x = a,\ y = b,$ в котором и проверять нечего – просто $F_1 = |\sqrt{a^2+b^2} - c\,|$. Вернемся теперь к рис. 2 – из него сразу видно, что поскольку в силу неравенства треугольника $NK + KQ \geq NQ$, то оптимум будет достигаться, когда точки N и Q на OM будут совпадать…

4. Пусть $1 < p \leq 2$. На рис. 3 исходной функции $F_p = \left(|a-x|^p + |b-y|^p + \quad + |c - \sqrt{x^2+y^2}\,|^p\right)^{1/p}$ соответствует величина $F_p = \Big(\|NQ_1\|^p + F_p = \left(\| NQ_1 \|^p + \quad + \|Q_1M_1\|^p\right)^{1/p}$, где двумя чертами обозначена длина соответствующего отрезка

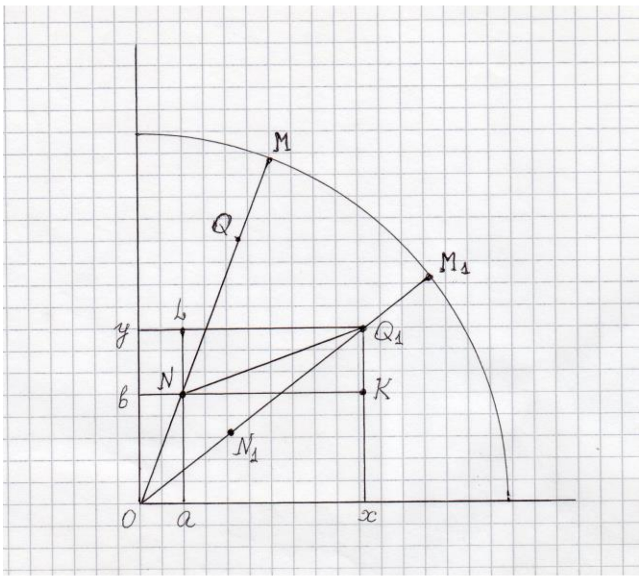

РИС. 3

при норме с $1 < p \le 2$. Из неравенства треугольника для ΔONQ_1 и из построений следует

$$\|ON\| + \|NQ_1\| \ge \|OQ_1\|,\ \|ON\| = \|ON_1\|, \text{ откуда } \|NQ_1\| \ge \|NQ\|,$$

т. е. $F_p = \left(\|NQ_1\|^p + \|Q_1M_1\|^p\right)^{1/p} \ge \left(\|NQ\|^p + \|Q_1M_1\|^p\right)^{1/p}$ для любого $1 < p \le 2$ и что искомая точка Q лежит на OM, т. е. для оптимальной точки должно выполняться

$$x = ka,\quad y = kb. \tag{3}$$

5. Приведем условия оптимальности для $1 < p \le 2$.

$$0 \in \frac{1}{p} F_p^{1-\frac{1}{p}} (pSign(x-a)|x-a|^{p-1} +$$

$$+ pSign(c - \sqrt{x^2+y^2})\left|c - \sqrt{x^2+y^2}\right|^{p-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}),$$

$$0 \in \frac{1}{p} F_p^{1-\frac{1}{p}} (pSign(y-b)|y-b|^{p-1} +$$

$$+ pSign(c - \sqrt{x^2+y^2})\left|c - \sqrt{x^2+y^2}\right|^{p-1} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}).$$

После несложных преобразований получаем

$$|x-a|^{p-1} = |c - \sqrt{x^2+y^2}|^{p-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{4}$$

$$|y-b|^{p-1} = |c - \sqrt{x^2+y^2}|^{p-1} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{5}$$

Следует обратить внимание на знаки в данных равенствах. Поскольку должно выполняться (3), x и y будут одновременно или больше или меньше a и b соответственно. А из рис. 3 несложно убедиться, что искомая точка Q лежит между N и M. Именно этим фактам и соответствуют знаки в (4) и (5).

Сложим равенства (4) и (5), возведенные в квадрат:

$$|x-a|^{2(p-1)} + |y-b|^{2(p-1)} = |c - \sqrt{x^2+y^2}|^{2(p-1)}$$

– получается условие, очень напоминающее теорему Пифагора. Подставим (3):

$$(k-1)^{2(p-1)}\left(a^{2(p-1)} + b^{2(p-1)}\right) = |c - k\sqrt{a^2+b^2}|^{2(p-1)}.$$

Обозначим $K_{2(p-1)} = \sqrt[2(p-1)]{a^{2(p-1)} + b^{2(p-1)}}$, $K_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$;
тогда $|k-1| K_{2(p-1)} = |c - k \cdot K_2|$, и в соответствии с замечанием о знаках либо одновременно выполняется $k > 1,\ c > kK_2$, либо $k < 1,\ c < kK_2$, откуда

$$k = \frac{c + K_{2(p-1)}}{K_{2(p-1)} + K_2},$$

что при $p = 2$ совпадает с полученным ранее $k = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 1\right)$.

После подстановок с использованием (4), (5) получаем

$$F_p^* = |c - \sqrt{a^2+b^2}| \frac{K_{2(p-1)}}{\sqrt{a^2+b^2} + K_{2(p-1)}} \times$$

$$\times \left[1 + \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{p/(p-1)} + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{p/(p-1)}\right]^{1/p},$$

что при $p = 2$ совпадает с полученным ранее

$$F_2^* = \frac{1}{2}|c - \sqrt{a^2+b^2}| \left[1 + \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}|c - \sqrt{a^2+b^2}|.$$

Автор выражает благодарность коллегам за интересную задачу и ее обсуждение, особенно Николаю Георгиевичу Журбенко, первым предложившим подход к ее решению.

Т.О. Бардадим

ЗАДАЧА ПРО ДВА ТРИКУТНИКИ

Наведено розв’язання задачі пошуку прямокутного трикутника, найбільш близького до заданого трикутника при різних нормуваннях.

T.O. Bardadym

THE PROBLEM ABOUT TWO TRIANGLES

The solution of the problem of finding a right triangle being the closest to a given triangle under different normalization is reported.

Получено 06.02.2017