УДК 519.85

Г.П. ДОНЕЦЬ, А.М. НАГІРНА

ОПТИМІЗАЦІЯ КВАДРАТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ НА МНОЖИНІ РОЗМІЩЕНЬ

Розглянуто алгоритм розв'язання задачі з квадратичною функцією цілі на комбінаторній множині розміщень. Приведено числовий приклад реалізації алгоритму.

Вступ. Велика кількість практичних задач моделюється комбінаторними моделями, які характеризуються простотою представлення і зручними методами та алгоритмами розв'язання.

Як правило, більшість вирішуваних задач намагаються зводити до лінійних, як таких, що мають найбільш широкий теоретичний апарат для знаходження необхідного розв'язку [1 – 2]. Але з практичної точки зору це не завжди має сенс, оскільки можливі знайдені оптимальні рішення можуть втрачати специфіку сфери, в якій розглядається задача, а отже, і цінність знайденого розв'язку.

Наприклад, при створенні кораблів, літаків чи інших гігантських об'єктів, лінійних моделей буде замало, тому для досягнення цілей, необхідно використовувати методи і моделі нелінійного типу, які значно розширюють можливості попередніх.

Частковим випадком нелінійної функції є квадратична, яку можна представити у вигляді суми лінійної і квадратичної функцій. Квадратична функція заслуговує уваги, оскільки з практичної точки зору досить часто ціль оптимізаційної моделі вимагає представлення у вигляді квадрата. На даний момент існує значна кількість методів, що забезпечують досягнення екстремуму квадратичної функції, але жоден з них не враховує комбінаторну природу множини моделі. Тому виникає необхідність у дослідженні попередніх [4] та розробці нових алгоритмів для розв'я-зання задач комбінаторної оптимізації, в даному випадку на множині розміщень.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу оптимізації: $Z(\Phi, P(A))$: $: \max\{\Phi(a) \mid a \in P(A)\}$, де

$$\Phi(a) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

на множині розміщень $A(n,m)$, $n \ge m$. Тоді число конфігурацій графа множини розміщень, утвореного із елементів $\{1, 2, ..., n\}$ можна розрахувати за формулою:

$$A_n^m = n!/(n-m)! \tag{1}$$

Оскільки граф множини розміщень еквівалентний графу множини перестановок, то суміжність вершин визначається одноразовою транспозицією двох елементів вершин згідно формули [3]:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{2}$$

2. Алгоритм розв'язування екстремальної задачі на комбінаторній множині розміщень. Скористаємося алгоритмом, що описаний в [4] і адаптуємо його до множини розміщень. Знаходження розв'язку полягає у розв'язанні двох послідовних задач. Перший опорний розв'язок буде початковим для другої задачі.

Розглянемо транспозиції відповідних елементів і скориставшись програмою wolfram представимо кожну функцію у вигляді:

$$x_1 \leftrightarrow x_i, \quad (i = 2, ..., n):$$

$x_1 \leftrightarrow x_2$: $f_{12} = (x_1 - x_2)\left(a_{12}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{n2}x_n\right)$;

… … …

$x_1 \leftrightarrow x_n$: $f_{1n} = (x_1 - x_n)\left(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{1n}x_n\right)$;

$$x_2 \leftrightarrow x_i, \quad (i = 3, ..., n):$$

$x_2 \leftrightarrow x_3$: $f_{23} = (x_2 - x_3)\left(a'_{12}x_1 + a'_{22}x_2 + a'_{22}x_3 ... + a'_{n2}x_n\right)$;

… … …

$x_2 \leftrightarrow x_n$: $f_{2n} = (x_2 - x_n)\left(a'_{1n}x_1 + a'_{2n}x_2 + ... + a'_{1n}x_n\right)$;

… … …

$$x_{n-1} \leftrightarrow x_n:$$

$x_{n-1} \leftrightarrow x_n$: $f_{n-1n} = (x_{n-1} - x_n)\left(a'_{1n-1}x_1 + a'_{2n-1}x_2 + .. a'_{nn-1}x_{n-1} + a'_{nn-1}x_n\right)$.

(3)

Тоді, послідовно розглядаються задачі двох типів: перша задача полягає у знаходженні максимального значення функцій, що є лівими частинами функцій (3) і представлені у вигляді:

$x_1 \leftrightarrow x_i$, $(i = 2, ..., n)$:

$x_1 \leftrightarrow x_2$: $f'_{12} = (x_1 - x_2)$;

$$\ldots \ \ldots \ \ldots$$
$$x_1 \leftrightarrow x_n: \ f'_{1n} = (x_1 - x_n);$$
$$x_2 \leftrightarrow x_i, \ (i = 3, \ldots, n):$$
$$x_2 \leftrightarrow x_3: \ f'_{23} = (x_2 - x_3);$$
$$\ldots \ \ldots \ \ldots$$
$$x_2 \leftrightarrow x_n: \ f'_{2n} = (x_2 - x_n);$$
$$\ldots \ \ldots \ \ldots$$
$$x_{n-1} \leftrightarrow x_n:$$
$$x_{n-1} \leftrightarrow x_n: \ f'_{n-1n} = (x_{n-1} - x_n).$$

Оскільки, згідно [4], розв’язком задачі буде точка множини: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, за умови $(x_1 > x_2 > \ldots > x_n)$, то у випадку множини розміщень необхідно здій-снити лексикографічне упорядкування, яке забезпечить знаходження допустимої множини розв’язків.

Кожну точку підставляємо у праві частини функцій (3):

$$x_1 \leftrightarrow x_i, \ (i = 2, \ldots, n):$$
$$x_1 \leftrightarrow x_2: \ f''_{12} = \left(a_{12}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n\right);$$
$$\ldots \ \ldots \ \ldots$$
$$x_1 \leftrightarrow x_n: \ f''_{1n} = \left(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right);$$
$$x_2 \leftrightarrow x_i, \ (i = 3, \ldots, n):$$
$$x_2 \leftrightarrow x_3: \ f''_{23} = \left(a'_{12}x_1 + a'_{22}x_2 + a'_{22}x_3 \ldots + a'_{n2}x_n\right);$$
$$\ldots \ \ldots \ \ldots$$
$$x_2 \leftrightarrow x_n: \ f''_{2n} = \left(a'_{1n}x_1 + a'_{2n}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n\right);$$
$$\ldots \ \ldots \ \ldots$$
$$x_{n-1} \leftrightarrow x_n:$$
$$x_{n-1} \leftrightarrow x_n: \ f''_{n-1n} = \left(a'_{1n-1}x_1 + a'_{2n-1}x_2 + \ldots a'_{nn-1}x_{n-1} + a'_{nn-1}x_n\right).$$

Якщо при підстановці $f''_{12} > 0$, то перший опорний розв’язок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ буде оптимальним розв’язком, у протилежному випадку необхідно здійснити перестановку відповідних елементів точки, при якій f''_{12} буде набувати максимуму.

Аналогічно перевіряємо наступні функції f''_{1n}, f''_{2n}, …, f''_{n-1n}, здійснюючи відповідні перестановки, якщо потрібно, до тих пір, поки не буде зроблена перевірка останньої транспозиції. На кожному кроці значення змінних у відповідному розв’язку або залишатимуться без змін, або мінятимуться місцями для забезпечення максимізації функції.

Після перевірки останньої функції, аналогічна процедура перевірки здійснюється для всіх інших оптимальних розв'язків утвореної множини.

Далі методом підстановки знаходимо максимум функції в кожному із розв'язків і визначаємо максимальне значення, яке набуває функція у відповідній точці.

3. Приклад. Нехай дано функцію

$$F(x) = 3(x_1 - 5x_2 + 2x_3)^2 + (7x_1 + x_2)^2 - 2x_3^2$$

на множині розміщень $A(n,m)$, яка утворена із елементів $\{1, 2, 3, 4\}$, з урахуванням $A(4,3)$. Необхідно знайти точку множини розміщень, де квадратична функція приймає максимальне значення.

Згідно формули (2), знаходимо кількість транспозицій: $C_3^2 = 3$. Користуючись формулами (3) і виконавши необхідні перетворення у програмі wolfram отримуємо наступні вирази:

1. $x_1 \leftrightarrow x_2$: $f'_{12} = 8(x_1 - x_2)\left(-2x_1 - x_2 + 9x_3\right)$.
2. $x_1 \leftrightarrow x_3$: $f'_{13} = 2(x_1 - x_3)\left(29x_1 - 7x_2 + 29x_3\right)$.
3. $x_2 \leftrightarrow x_3$: $f'_{23} = 2(x_2 - x_3)(-14x_1 + 33x_2 + 33x_3)$.

Розв'язуємо задачу 1. Необхідно знайти точку, яка б забезпечувала, одночасно, максимальне значення всіх трьох функцій: f'_{12}, f'_{13}, f'_{23}, де

$$f'_{12} = (x_1 - x_2),$$

$$f'_{13} = (x_1 - x_3),$$

$$f'_{23} = (x_2 - x_3).$$

Оскільки, розглядаємо множину розміщень $A(4,3)$, що утворена з елементів $\{1, 2, 3, 4\}$, тоді перший опорний розв'язок буде представлений у вигляді об'єднання наступних елементів множини: $(4,3,2) \bigcup (4,3,1) \bigcup (3,2,1)$.

Задача 2. Знайти $\max(f''_{12}, f''_{13}, f''_{23})$, де

$$f''_{12} = \left(-2x_1 - x_2 + 9x_3\right),$$

$$f''_{13} = \left(29x_1 - 7x_2 + 29x_3\right),$$

$$f''_{23} = \left(-14x_1 + 33x_2 + 33x_3\right).$$

Підставляємо перший опорний розв'язок $(4, 3, 2)$ почергово в кожну функцію і визначаємо знак функції:

$f''_{12} > 0,\ f''_{13} > 0,\ f''_{23} > 0,$ отже він задовольняє умову максимуму.

Аналогічно перевіряємо другий опорний розв'язок $(4,3,1)$:

$f''_{12} < 0,$ тому для зростання функції здійснюємо перестановку елементів x_1, x_2, відповідно другий опорний розв'язок $(3,4,1)$, який надалі підставляємо у функції:

$f''_{13} > 0,\ f''_{23} > 0,$ отже знайдено другий опорний розв'язок $(3,4,1)$.

Перевіряємо умову виконання максимуму для опорного розв'язку $(3,2,1)$:

$f''_{12} < 0$, отже здійснюємо перестановку елементів x_1, x_2, отримуємо $(2,3,1)$. Для $f''_{13} > 0$, $f''_{23} > 0$, отже третій опорний розв'язок $(2,3,1)$.

Відповідно маємо наступну множину розв'язків: $(4,3,2) \bigcup (3,4,1) \bigcup (2,3,1)$.

Підставимо кожен із розв'язків у функцію і знайдемо її числове значення:

$$F(4,3,2) = 1100,\ F(3,4,1) = 1298,\ F(2,3,1) = 650.$$

Отже, максимального значення квадратична функція $F(x) = 3(x_1 - 5x_2 + 2x_3)^2 + (7x_1 + x_2)^2 - 2x_3^2$ на множині розміщень $A(4,3)$ буде приймати в точці $(3,4,1)$ і $\max F(x) = 1298$.

4. **Аналіз результатів.** При розв'язанні задача оптимізації з квадратичною функцією цілі, розглянутої в п. 3, слід зауважити, що множина допустимих розв'язків є комбінаторною множиною розміщень. Згідно умови, множина розміщень $A(n,m)$ утворена із елементів $\{1,2,3,4\}$, з урахуванням $A(4,3)$. Тоді, користуючись формулою (1), кількість елементів допустимої множини рівна $A_4^3 = 4! = 24$, відповідно, для знаходження максимального значення функції, необхідно зробити 24 підстановки.

Згідно алгоритму, для задачі п. 3, розглянуто 3 транспозиції. Застосувавши лексикографічне упорядкування, отримали три розв'язки, перевірка яких здійснювалася за 9 кроків.

Отже, запропонований алгоритм забезпечив економію 15 кроків при розв'язанні і знаходженні оптимального рішення.

При розгляді подібних задач на множині розміщень, з урахуванням, що $m = 3$, а $n = 5$, $n = 6$, $n = 7$, $A_5^3 = 60$, $A_6^3 = 120$, $A_7^3 = 210$, слід зауважити, що кількість транспозицій залишається незмінною, тобто рівна 3, а кількість точок, що необхідні для перевірки, породжуються лексикографічним упорядкуванням, тобто, для A_5^3 кількість рівна 10, для A_6^3 вона рівна 19, для A_7^3 рівна 34. Навіть при врахуванні трьох транспозицій кількість підстановок буде для A_5^3 рівна

30, для A_6^3 рівна 57, для A_7^3 рівна 102, що менше, майже в два рази, ніж при повному переборі.

Висновок. Представлено алгоритм оптимізації квадратичної функції на множині розміщень. Проаналізовано особливості побудови множини оптимальних розв'язків із множини розміщень, які полягають у лексикографічному упорядкуванні, для знаходження перших опорних розв'язків, та подальшій перестановці елементів розв'язку для знаходження максимального значення функції.

Розглянуто числовий приклад, який ілюструє виконання алгоритму для знаходження оптимального розв'язку. Проаналізовано результати обчислень, які досягнуто за меншу кількість кроків, у порівнянні з повним перебором всієї множини розміщень.

Надалі наукові дослідження будуть направлені на розробку нових алгоритмів для задач з квадратичною функцією цілі з додатковими обмеженнями, з подальшим розширенням числової розмірності комбінаторних множин.

Г.А. Донец, А.Н. Нагорная

ОПТИМИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ РАЗМЕЩЕНИЙ

Рассмотрен алгоритм решения задачи с квадратической функцией цели на комбинаторном множестве размещений. Приведен числовой пример реализации алгоритма.

G.A. Donets, A.N. Naghirna

OPTIMIZATION OF QUADRATIC FUNCTION ON A SET OF PLACEMENTS

Approach to the solution of optimization problems with quadratic function of the purpose is considered on the combinatorial set of plasemtnt. The numerical example is given.

1. *Донець Г.П., Колєчкіна Л.М.* Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. П.: РВВ ПУЕТ, 2011. 309 с.
2. *Донец Г. А., Колечкина Л.Н.* Построение гамильтонова пути в графах перестановочных многогранников. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. № 1. С. 10 – 16.
3. *Донец Г.А., Колечкина Л.Н.* Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах. *Управляющие машины и системы*. 2009. № 4. С. 36 – 42.
4. *Донець Г.П., Нагірна А.М.* Оптимізація квадратичної функції на множині перестановок. *Теорія оптимальних рішень*. 2016. С. 11 – 16.

Одержано 10.03.2017