УДК 519.21

И.Ю. ДЕМЧЕНКО

СТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В МОДЕЛЯХ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Аннотация. Рассмотрена задача управления запасами для некоторой системы, функционирующей в стационарном режиме. С помощью стационарного распределения базового марковского процесса найдена стратегия заказа, которая приводит к минимальным издержкам средних затрат функционирования системы. Значения параметров, определяющие оптимальную стратегию, получены в явном виде для (s, S)-стратегии.

Ключевые слова: управление запасами, (s,S)-стратегия, оптимальная стратегия.

Изучается задача управления запасами для некоторой системы, функционирующей в стационарном режиме. Для (s, S)-стратегии в явном виде найдены значения параметров, определяющих оптимальную стратегию.

Пусть процесс пополнения есть последовательность $X_1, X_2, \ldots$ независимых одинаково распределенных положительных случайных величин. Предположим, что общая функция распределения $\Phi(\cdot)$ имеет плотность $\varphi(\cdot)$, $\{X_i\}$ — время между двумя последовательными моментами пополнения запасов, T_n — n-я частичная сумма $\{X_i\}$, т.е. время, когда имеет место n-е пополнение. Определим $T_0 \equiv 0$ и N_t — наибольшее значение n, для которого $T_n \le t$, для любого положительного числа t. В терминах пополняемых запасов N_t является числом пополнений на интервале $[0, t]$. Ожидаемое значение N_t называется количеством пополнений, обозначается $M(t)$ и удовлетворяет уравнениям [1, 2]:

$$M(t) = \Phi(t) + \int_0^t M(t-\xi)\, d\Phi(\xi), \tag{1}$$

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^{(n)}(t),$$

где $\Phi^{(n)}(t)$ — n-кратная свертка $\Phi(t)$ с самого себя. Предположим, что $\Phi(t)$ абсолютно непрерывно, тогда можно продифференцировать $M(t)$ и получить плотность пополнения $m(t)$, удовлетворяющую уравнениям

$$m(t) = \varphi(t) + \int_0^t m(t-\xi)\varphi(\xi)\, d\xi, \tag{2}$$

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(t).$$

Определим дополнительную случайную величину $\gamma_t \equiv T_{N_t+1} - t$. Обозначим $H(t,x) \equiv P[\gamma_t \le x]$ функцию распределения γ_t. Здесь $H(t,x)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$H(t,x) = \Phi(t+x) - \Phi(t) + \int_0^t H(t-\xi, x)\, d\Phi(\xi), \quad x > 0\,. \tag{3}$$

Исследуем стационарные решения рассмотренных задач управления запасами. Определим единственную стратегию заказа, которая приводит к минимальным издержкам средних затрат функционирования системы, используя стационарное распределение базового марковского процесса. (Поэтому полученная единственная стратегия заказа называется стационарной.) Данный подход отличается от динамического программирования, когда получается последовательность оптимальных стратегий заказа на протяжении всей программы, что определенно минимизирует ожидаемые издержки для каждой программы. Стационарное распределение можно использовать для получения оптимальной стратегии заказа и распределения спроса, независимой от любой структуры издержек, связанных с данной задачей управления запасами. Для выпуклой $L(y)$ и линейной $c(z)$ функций оптимальная стратегия задачи с периодом n определяется единственной критической точкой $\overline{x_n}$.

Рассмотрим для этого случая стационарное решение задачи управления запасами, когда стратегия заказа определяется единственным критическим числом $\widetilde{x}$. Условия такого выполнения приведены в [3–5]. В начале каждого периода помещаются заказы на величину запаса, достаточную для поднятия уровня последнего до значения $\widetilde{x}$. Поставка осуществляется мгновенно. На протяжении n-го периода имеет место спрос, который приводит запас к некоторому значению, меньшему $\widetilde{x}$. Тогда при величине спроса ξ имеем $X_n = \widetilde{x} - \xi$, $\xi \ge 0$. При этом функция распределения $F_n(x)$ на X_n вычисляется следующим образом: $F_n(x) = P[X_n \le x] = \int\limits_{\widetilde{x}-x}^{\infty} \varphi(x)\, dx, x \le \widetilde{x}$.

Поскольку $F_n(x)$ независима от n, это и есть искомое стационарное распределение. Обозначим $C(x)$ условные ожидаемые издержки за первый период при заданном уровне запаса в начале периода x. Тогда $C(x) = L(\widetilde{x}) + c(\widetilde{x} - x), x \le \widetilde{x}$. Обозначим $\Lambda(\widetilde{x})$ среднее этих условных ожидаемых издержек с учетом стационарного распределения. Ясно, что

$$\Lambda\widetilde{x} = L(\widetilde{x}) + c\int\limits_{-\infty}^{\widetilde{x}} (\widetilde{x} - \xi)\varphi(\widetilde{x} - \xi) d\xi = L(\widetilde{x}) + c\mu\,, \tag{4}$$

где μ — среднее от $\varphi(\cdot)$. Дифференцируя по $\widetilde{x}$, в качестве минимизирующего значения $\widetilde{x}$ получаем $\bar{x}$, $L'(\bar{x}) = 0$. Если уравнение (4) не имеет единственного корня, выбираем $\bar{x}$ как наименьший.

Однако если $L(y)$ выпуклая, то оптимальная стратегия задачи с периодом n определяется парой критических точек (S_n, s_n). Рассмотрим теперь задачу управления запасами, в которой стратегия заказа характеризуется парой (S, s), $s < S$. Когда уровень запаса снижается до s или ниже, помещается заказ, который поднимает уровень запаса до S. Поставка также осуществляется мгновенно. Если уровень запаса превышает s, то заказ не делается. Запас периодически повторяется через некоторые временные интервалы, и применяется описанная ранее стратегия заказа, которая приводит к следующему закону:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi, & s < X_n \le S, \\ S - \xi, & X_n \le s, \end{cases}$$

где ξ — спрос на n-й период. В [1, 2] показано, что распределение X_n сходится к стационарному распределению с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{m(S - x)}{1 + M(\Delta)}, & s < x \le S, \\ \dfrac{h(\Delta, s - x)}{1 + M(\Delta)}, & x \le s, \end{cases}$$

где $\Delta = S - s$, $m(\cdot)$ и $M(\cdot)$ задаются формулами (1) и (2) соответственно, а $h(\Delta, x)$ является плотностью $H(\Delta, x)$, определенной в (3).

Описанная структура издержек, которая использовалась для решения данной задачи управления запасами методом динамического программирования, позволяет усреднить ожидаемые издержки при заданном уровне запаса x в начале каждого периода при стационарном распределении $f(x)$. Обозначим $\Lambda(s, S)$ эти средние издержки. Если, как отмечено ранее, $C(x)$ — условные ожидаемые издержки за первый период при заданном начальном уровне запаса x, то имеем

$$C(x) = \begin{cases} K + L(s) - c(S - x), & x \le s, \\ L(x), & s < x \le S. \end{cases}$$

Если при $f(x)$ данные издержки являются средними $C(x)$, то получим

$$\Lambda(s, S) = \int_{-\infty}^{S} C(x) f(x) dx .$$

Используя тот факт, что

$$\int_{-\infty}^{s} f(x) dx = \frac{1}{1 + M(\Delta)} ,$$

и результаты работы [5], получаем

$$\Lambda(s, S) = \frac{K + L(S) + \int_{-\infty}^{S} L(x) m(S - x) dx}{1 + M(\Delta)} + $$

$$+ \frac{c}{1 + M(\Delta)} \cdot \int_{-\infty}^{s} (S - x) h(\Delta, s - x) dx . \qquad (5)$$

Однако из (4)

$$\frac{c}{1 + M(\Delta)} \cdot \int_{-\infty}^{S} (S - x) h(\Delta, s - x) dx = \frac{c}{1 + M(\Delta)} \cdot \int_{0}^{\infty} (\Delta + \xi) h(\Delta, \xi) d\xi = c\mu .$$

Также простой заменой переменных имеем

$$\int_{x}^{S} L(x) m(S - x) dx = \int_{0}^{\Delta} L(S - x) m(x) dx .$$

Следовательно, (5) принимает вид

$$\Lambda(s, S) = \frac{K + L(S) + \int_{0}^{\Delta} L(S - x) m(x) dx}{1 + M(\Delta)} + c\mu .$$

Теперь минимизируем $\Lambda(s, S)$ по параметрам s и S (однако удобнее это осуществлять по s и Δ). Выбрав частичные производные по s и Δ и приравняв их нулю, получим

$$\frac{\partial \Lambda(s, S)}{\partial \Delta} = L'(\Delta + s) + \int_{0}^{\Delta} L'(\Delta + s - x) m(x) dx = 0 , \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\Lambda(s,S)}{\partial\Delta}=[1+M(\Delta)]\times[L'(\Delta+s)+\int_0^{\Delta}L'(\Delta+s-x)m(x)dx+L(s)m(\Delta)]-$$

$$-[K+L(\Delta+s)+\int_0^{\Delta}L(\Delta+s-x)m(x)dx]m(\Delta)=0\,. \qquad (7)$$

Необходимым условием для минимизирующих s и Δ (назовем их s^* и Δ^*) является то, что они удовлетворяют (6) и (7). Таким образом,

$$L'(\Delta^*+s^*)+\int_0^{\Delta^*}L'(\Delta^*+s^*-x)m(x)dx\,,$$

$$L(s^*)=\frac{K+L(\Delta^*+s^*)+\int_0^{\Delta^*}L(\Delta^*+s^*-x)m(x)dx}{1+M(\Delta)}\,.$$

Следовательно, $\Lambda(s^*,\ S^*)=L(s^*)+c\mu$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karlin S. On the renewal equation // Pacific J.Math. — 1955. — N 5. — P. 229–257.
2. Прабху Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами. — М.: Мир, 1969. — 356 с.
3. Дадуна Г., Кнопов П.С., Тур Л.П. Оптимальные стратегии для системы запасов с функциями стоимости общего вида // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 4. — Р. 106–123.
4. Кнопов П.С., Дериева Е.Н., Демченко С.С. О моделях управления запасами с выпуклой функцией издержек // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 2. — С. 149–156.
5. Демченко С.С., Кнопов А.П., Пепеляев В.А. Оптимальные стратегии для систем управления запасами с выпуклой функцией издержек // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 6. — С. 113–120.
6. Iglehart D.L. Dynamic programming and stationary analysis of inventory problems: Doctoral dissertation / Stanford University, 1961. — 31 p.

Поступила 03.12.2015