УДК 621.318

М.В.Загирняк, докт.техн.наук (Кременчугский гос. ун-т им. Михаила Остроградского), **Ю.А.Бранспиз**, докт.техн.наук (Восточноукраинский нац. ун-т им. Владимира Даля, Луганск)

К РАСЧЕТУ СИЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ ФЕРРОМАГНИТНЫЙ ПРОВОДНИК С ТОКОМ

Рассмотрено силовое воздействие однородного магнитного поля на проводник с током. Определены силы этого поля, действующие на ферромагнитное вещество проводника для известных моделей описания намагниченности: модель эквивалентных токов, модель фиктивных магнитных зарядов, модель магнитных моментов. Показано, что эти модели дают различный результат. Указано, что это различие оставляет актуальным поставленный А.Эйнштейном вопрос о способе определения силы, действующей на ток в ферромагнитном веществе.

Розглянуто силовий вплив однорідного магнітного поля на провідник зі струмом. Визначено сили цього поля, які діють на магнітну речовину провідника для відомих моделей опису намагнічування: модель еквівалентних струмів, модель фіктивних магнітних зарядів, модель магнітних моментів. Показано, що ці моделі мають різні результати. Зазначено, що ця відмінність залишає актуальним поставлене А.Ейнштейном питання про спосіб визначення сили, яка діє на струм у феромагнітній речовині.

Введение. В настоящее время для расчета силового воздействия постоянного магнитного поля на тела, для вещества которых нельзя пренебречь их магнитными свойствами (намагничивание вещества является существенным), известно несколько разных подходов [2, 4]. В частности, применяется подход, связанный с интегрированием по объему тела удельного (на единицу объема) силового действия магнитного поля на намагниченное вещество (удельная пондеромоторная сила магнитного поля). Причем при использовании этого подхода указанная удельная сила может быть определена по одной из моделей намагниченного состояния вещества: модели молекулярных токов, распределенных с плотностью $rot\overline{M}$, модели фиктивных магнитных зарядов, распределенных с плотностью $-\mu_0 div\overline{M}$, модели магнитных моментов (здесь $\overline{M}$ – вектор намагниченности вещества, μ_0 – магнитная постоянная) [2].

Известно, что указанные способы моделирования намагниченного состояния вещества дают одинаковый результат (интегральная эквивалентность) при определении суммарной силы, действующей со стороны магнитного поля на тело, в объеме которого отсутствуют электрические токи проводимости (макроскопические токи) [5, 7].

В статье на простом примере показано, что интегральная эквивалентность для указанных способов моделирования намагниченного состояния вещества не сохраняется, если в объеме тела, на которое определяется силовое воздействие постоянного магнитного поля, протекают электрические токи проводимости.

Постановка задачи. Рассматриваем прямолинейный проводник с током из материала с ферромагнитными свойствами, который помещен в однородное магнитное поле с индукцией $\overline{B}_0$, направленной ортогонально оси проводника (рис. 1). В общем случае произвольного внешнего магнитного поля суммарная сила, действующая на ферромагнитный проводник с током во внешнем магнитном поле (сила $\overline{F}_\Sigma$), может быть представлена как сумма следующих сил: $\overline{F}_1$ – силы, действующей на электрический ток в проводнике, и $\overline{F}_2$ – силы, действующей на намагниченное вещество проводника.

В свою очередь, силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ также могут быть представлены как определенные суммы сил, соответственно, взаимодействия между материальными объектами рассматриваемой системы: намагниченное вещество проводника, электрический ток в проводнике. А именно:

– сила $\overline{F}_1$ может быть представлена как сумма сил

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_{10} + \overline{F}_{1M} + \overline{F}_{1i} \ , \qquad (1)$$

где $\overline{F}_{10}$ – сила, действующая на ток со стороны внешнего магнитного поля; $\overline{F}_{1M}$ – сила, действующая на ток со стороны магнитного поля, обусловленного намагниченностью вещества проводника; $\overline{F}_{1i}$ – сила, действующая на ток со стороны магнитного поля, созданного самим током;

– сила $\overline{F}_2$ может быть представлена как сумма сил

$$\overline{F}_2 = \overline{F}_{20} + \overline{F}_{2M} + \overline{F}_{2i} \, , \qquad (2)$$

где $\overline{F}_{20}$ – сила, действующая на ферромагнитное вещество проводника со стороны внешнего магнитного поля; $\overline{F}_{2M}$ – сила, действующая на ферромагнитное вещество проводника со стороны магнитного поля, созданного этим намагниченным веществом; $\overline{F}_{2i}$ – сила, действующая на ферромагнитное вещество проводника со стороны магнитного поля тока.

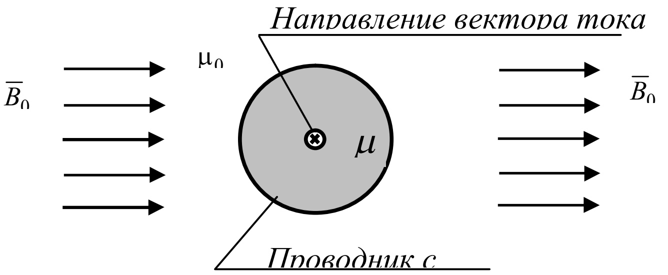

Рис. 1

Отметим, что, согласно закону о равенстве действия и противодействия для составляющих $\overline{F}_{1M}$ и $\overline{F}_{2i}$ в (1) и (2) имеет место равенство $\overline{F}_{1M} = -\overline{F}_{2i}$; а составляющие $\overline{F}_{1i}$ и $\overline{F}_{2M}$ в (1) и (2) численно равны нулю, поскольку каждое из них представляет суммарную силу в замкнутой системе.

Исходя из этого, вместо (1) и (2) можно записать разложения

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_{10} + \overline{F}_{1M} \quad \text{и} \quad \overline{F}_2 = \overline{F}_{20} + \overline{F}_{2i} \, , \qquad (3,4)$$

а для суммарной силы $\overline{F}_\Sigma$ можно записать такое соотношение

$$\overline{F}_\Sigma = \overline{F}_{10} + \overline{F}_{20} \ . \qquad (5)$$

Таким образом, согласно (5), в произвольном внешнем магнитном поле суммарная сила, действующая на ферромагнитный проводник с током, складывается из силы внешнего магнитного поля, действующего на ток в проводнике, и силы, действующей на его магнитное вещество.

В случае однородного внешнего магнитного поля учтем, что это поле, как известно, не создает силы, действующей на любое магнитное тело в нем. То есть учтем, что в этом случае $\overline{F}_{20} = 0$, и суммарная сила, действующая на ферромагнитный проводник с током, определяется лишь действием внешнего поля, действующего на ток в проводнике: $\overline{F}_\Sigma = \overline{F}_{10}$. Что же касается силы, действующей на намагниченное вещество проводника, то она, согласно (4), в этом случае ($\overline{F}_{20} = 0$) определяется только составляющей $\overline{F}_{2i}$.

Вычисление этой составляющей для трех моделей намагниченного состояния вещества (молекулярных токов, фиктивных магнитных зарядов и магнитных моментов) с целью сопоставления полученных результатов и было задачей, которая решалась в данной работе.

О составляющих силы, действующей на ферромагнитное вещество проводника со стороны магнитного поля. Для того, чтобы определить рассматриваемую силу $\overline{F}_{2i}$, разложим ее:

$$\overline{F}_{2i} = \overline{F}_{2i0} + \overline{F}_{2ii} \ , \qquad (6)$$

где $\overline{F}_{2i0}$ и $\overline{F}_{2ii}$ – составляющие силы магнитного поля тока, действующей на намагниченное вещество, намагниченность которого обусловлена, соответственно, внешним магнитным полем и магнитным полем тока.

В силу симметрии намагничивания вещества проводника с током в магнитном поле тока можно утверждать, что для точек проводника, симметричных относительно его оси, составляющие силы $\overline{F}_{2ii}$ будут взаимно уравновешиваться так, что суммарная сила по этим составляющим во всем проводнике даст нулевое значение

$$\overline{F}_{2ii} = 0 \ . \qquad (7)$$

Тогда для суммарной силы, действующей только на ферромагнитное вещество проводника, с учетом (7) из (6) получаем равенство

$$\overline{F}_{2i} = \overline{F}_{2i0} \; . \tag{8}$$

При таком подходе появляется возможность строгого определения суммарной силы, действующей на ферромагнитное вещество проводника, исходя из физического смысла составляющей $\overline{F}_{2i0}$, согласно которому необходимо предварительно найти намагниченность вещества проводника в однородном магнитном поле.

Для этого учтем, что однородное магнитное поле, которое ортогонально оси проводника, создает внутри цилиндрического проводника также однородное поле с индукцией [1]

$$\overline{B} = \frac{2\mu}{\mu_0 + \mu} \overline{B}_0 \, , \tag{9}$$

где μ – магнитная проницаемость вещества проводника.

Это позволяет записать для вектора намагниченности $\overline{M}_0$ магнитного проводника соотношение

$$\overline{M}_0 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 \mu} \overline{B} \, , \tag{10}$$

то есть, согласно (10) и (9), для вектора намагниченности проводника можно записать

$$\overline{M}_0 = 2\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0(\mu + \mu_0)} \overline{B}_0 \, . \tag{11}$$

Согласно **модели фиктивных магнитных зарядов**, силовое воздействие магнитного поля тока в проводнике напряженностью $\overline{H}_i$ на вещество с намагниченностью $\overline{M}_0$ может быть определено как интеграл по объёму проводника. (Принимаем в качестве объёма интегрирования объём V единицы длины проводника). Это дает удельное значение силы вида $-\mu_0 \int\limits_V \overline{H}_i \, div \overline{M}_0 dV$, которое в рассматриваемом случае плоскопараллельной задачи может быть записано как интеграл по сечению цилиндра

$$\bar{f}_{2i0} = -\mu_0 \int\limits_{S_0} \overline{H}_i \, div \overline{M}_0 \, ds \, , \tag{12}$$

где S_0 – площадь сечения цилиндрического проводника (перпендикулярно оси).

Поскольку, согласно (11), $\overline{M}_0 = \mathrm{const}$ во всех точках сечения проводника, кроме точек на его поверхности (здесь вектор намагниченности претерпевает разрыв), то, используя понятие поверхностной дивергенции [3], вместо интеграла (12) можно записать интеграл вида

$$\overline{f}_{2i0} = -\mu_0 \int\limits_{L_0} \overline{H}_i (\overline{n} \cdot \overline{M}_0) dl \, , \tag{13}$$

где L_0 – круговой контур, ограничивающий сечение цилиндрического проводника (на поверхности проводника); dl – дифференциальный элемент этого контура.

Отметим, что при записи интеграла в (13) учтена также непрерывность вектора $\overline{H}_i$ в точках на поверхности проводника (ведь вектор $\overline{H}_i$ – вектор магнитного поля тока в проводнике, который является касательным к любой окружности внутри проводника и к окружности сечения проводника).

Найдем первоначально вертикальную составляющую удельной силы $\overline{f}_{2i0}$, которую обозначим f_y. Для этого, очевидно, согласно (13), необходимо определить интеграл

$$f_y = \mu_0 \int\limits_{L_0} H_{iy} (\overline{n} \cdot \overline{M_0}) dl \, , \tag{14}$$

где H_{iy} – проекция вектора $\overline{H}_i$ на вертикальную ось (рис. 2).

С этой целью учтем, что (рис. 2)

$$\overline{n} \cdot \overline{M}_0 = M_0 \cos\alpha \, , \qquad H_{iy} = H_i \cos\alpha \tag{15,16}$$

где (по закону полного тока)
$$H_i = i / 2\pi R \, . \tag{17}$$

Тогда, подставляя (15) и (16) в (14), с учетом (17) получим

$$f_y = \mu_0 \frac{iM_0}{2\pi R} \int\limits_{L_0} \cos^2\alpha dl \, . \qquad (18)$$

Но, поскольку дифференциальный элемент длины окружности связан с ее радиусом соотношением $dl = Rd\alpha$ (здесь $d\alpha$ – дифференциальный элемент угла с вершиной в центре окружности, опирающийся на дугу длиной dl), то интегрирование в (18) дает следующую цепочку равенств (с учетом симметрии): $f_y = \frac{\mu_0}{\pi} iM_0 \int\limits_0^{\pi} \cos^2\alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{\pi} iM_0 (0.25\sin 2\alpha + 0.5\alpha)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\mu_0 iM_0$, или, с учетом (11)

$$f_y = iB_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \, . \qquad (19)$$

Что же касается горизонтальной составляющей $\overline{f}_{2i0}$ (обозначим ее f_x), то аналогично предыдущему, имеем (рис. 2) $f_x = \mu_0 \int\limits_L H_{ix}(\overline{n} \cdot \overline{M}_0) dl$, где $H_{ix} = H_i \sin\alpha$ – проекция вектора $\overline{H}_i$ на ось x. Далее, с учетом (15), имеем $f_x = \mu_0 H_i M_0 \int\limits_L \sin\alpha\cos\alpha dl$, или, с учетом равенства $dl = Rd\alpha$, получаем $f_x = \mu_0 H_i M_0 R \int\limits_0^{\pi} \sin 2\alpha d\alpha = -\mu_0 H_i M_0 R \cos 2\alpha\Big|_0^{\pi} = 0$.

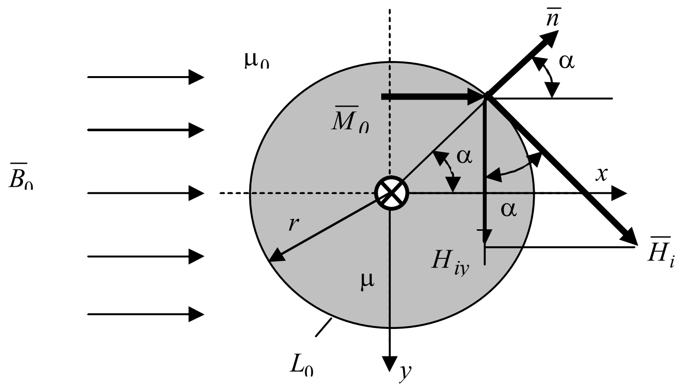

Рис. 2

Таким образом, сила $\overline{f}_{2i0}$ имеет только составляющую, направленную по оси y (перпендикулярно векторам плотности тока и индукции внешнего поля).

По **модели молекулярных токов** (эквивалентных токов намагничивания) намагниченное вещество с намагниченностью $\overline{M}_0$ может быть заменено распределением токов с объёмной плотностью $rot\overline{M}_0$ в пространстве проводника с магнитной проницаемостью μ_0.

В этом случае магнитное поле тока в проводнике, имеющее индукцию $\mu_0 \overline{H}_i$, действует на эквивалентные токи в проводнике (в объёме единичной длины), создавая удельную силу

$$f_{2i0} = \mu_0 \int\limits_{S_0} rot\overline{M}_0 \times \overline{H}_i ds \, . \qquad (20)$$

Здесь сразу учтен плоскопараллельный характер решаемой задачи.

Как и в предыдущем случае, для всех точек сечения проводника (кроме точек на поверхности проводника) вектор $\overline{M}_0$ постоянен. Тогда, вместо интеграла в (20), используя понятие поверхностного ротора [3], можно записать интеграл вида

$$\overline{f}_{2i0} = -\int\limits_{L_y} \left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right] \times \overline{H}_i dl \, . \qquad (21)$$

Учитывая геометрию решаемой задачи (рис. 3), для модуля вектора $\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right]$, равного $\left|\overline{n}\right| \cdot \left|\overline{M}_0\right| \sin(\overline{n}, \overline{M}_0)$, имеем $\left|\overline{n}\right| = 1$, $\left|\overline{M}_0\right| = M_0$, $\sin(\overline{n}, \overline{M}_0) = \sin\alpha$, что дает равенство $\left|\overline{n} \times \overline{M}_0\right| = M_0 \sin\alpha$.

При этом вектор $\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right]$ направлен по направлению оси проводника (перпендикулярно плоскости рисунка), т.е. он ортогонален вектору $\overline{H}_i$. Поэтому векторное произведение $\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right] \times \overline{H}_i$ по модулю равно просто произведению соответствующих векторов

$$\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right] \times \overline{H}_i = \left(\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right]\right)\left|\overline{H}_i\right| = H_i M_0 \sin\alpha \, . \qquad (22)$$

Направлен вектор $\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right] \times \overline{H}_i$ ортогонально векторам $\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right]$ и $\overline{H}_i$, то есть – по линии радиуса, как это и показано на рис. 3. При этом в векторе $\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right] \times \overline{H}_i$ нас первоначально будет интересовать вертикальная составляющая, равная, с учетом (22), в рассматриваемом случае

$$\left|\left[\overline{n}\times\overline{M}_0\right]\times\overline{H}_i\right|\sin\alpha = M_0H_i\sin\alpha\ . \qquad (23)$$

Согласно (23), расчет составляющей силы $\overline{f}_{2i0}$ по оси y из (21) дает следующую цепочку равенств

$$f_y = -\mu_0M_0H_iR\int\limits_{L_y}\sin^2\alpha d\alpha = -2\mu_0M_0H_iR\left(0.5\alpha - 0.25\sin2\alpha\right)\Big|_0^{\pi} = -\pi\mu_0M_0H_iR\ ,$$

что с учетом (11) и (17) дает
$$f_y = -iB_0\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}. \qquad (24)$$

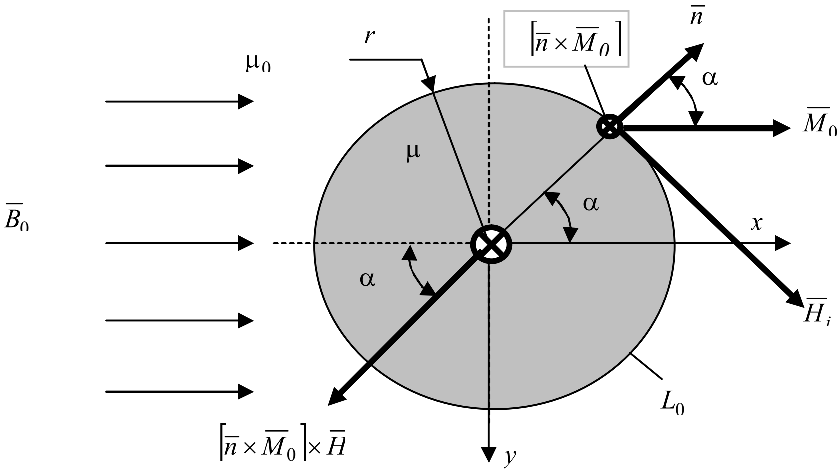

Рис. 3

Что касается горизонтальной составляющей силы $\overline{f}_{2i0}$ по модели эквивалентных токов намагничивания, то с учетом (22) и изложенного выше о направлении вектора $\left[\overline{n}\times\overline{M}_0\right]\times\overline{H}_i$ можно записать интеграл $f_x = -\mu_0H_iM_0R\int\limits_{L_0}\sin\alpha\cos\alpha d\alpha$, который аналогичен интегралу для f_x по модели фиктивных магнитных зарядов, что дает для f_x и в этом случае тождественный ноль.

Кроме рассмотренных двух моделей намагниченного состояния магнитного вещества (эквивалентных токов намагничивания и фиктивных магнитных зарядов), на практике находит применение и **модель магнитных моментов** [2,4], согласно которой любой дифференциальный объем dV магнитного вещества может быть представлен как некоторый магнитный момент $\overline{M}dV$, а соответствующая объемная плотность силы задается выражением
$$\mu_0(\overline{M}\cdot grad)\overline{H}\ . \qquad (25)$$

Для рассматриваемого примера, когда нас интересует только сила магнитного поля тока на намагниченность вещества проводника, вызванную однородным внешним полем (выше эта сила обозначена как F_{2i0}), на основе выражения (25) для удельного (на единицу объема проводника) значения силы можно записать следующее выражение
$$\mu_0\left(\overline{M}_0\cdot grad\right)\overline{H}_i\ . \qquad (26)$$

Если учесть, что в рассматриваемом случае проводника с током в однородном внешнем магнитном поле вектор намагниченности $\overline{M}_0$, согласно (11), является постоянным, то выражение (26) может быть представлено в виде: $\mu_0 div(M_0\overline{H}_i)$. В результате для модели магнитных моментов силовое воздействие магнитного поля тока в проводнике напряженности $\overline{H}_i$ на вещество, имеющее намагниченность $\overline{M}_0$, может быть определено, как и выше (с учетом плоскопараллельности задачи), в виде интеграла
$$\overline{f}_{2i0} = -\mu_0\int\limits_{S_0}div(M_0\overline{H}_i)ds\ . \qquad (27)$$

Последний интеграл на основе теоремы Остроградского-Гаусса [3] можно преобразовать к интегралу $\overline{f}_{2i0} = \mu_0\int\limits_{L_0}\overline{n}(\overline{H}_i\cdot\overline{M}_0)dl$, который, в свою очередь, может быть преобразован к интегралу
$$\overline{f}_{2i0} = \mu_0\int\limits_{L_0}\left(\left[\overline{n}\times\overline{M}\right]\times\overline{H}_i + \overline{M}_0(\overline{H}_i\cdot\overline{n})\right)dl\ . \qquad (28)$$

В (28) второе слагаемое под знаком интеграла равно нулю (векторы $\overline{H}_i$ и $\overline{n}$ на поверхности проводника ортогональны друг другу). В результате вместо (28) можно записать
$$\overline{f}_{2i0} = \mu_0\int\limits_{L_0}\left[\overline{n}\times\overline{M}\right]\times\overline{H}_idl\ , \qquad (29)$$

которое отличается от выражения (21) только знаком.

Это позволяет заключить, что результат интегрирования выражения (29) будет такой же, как и результат интегрирования выражения (21) с заменой знака на противоположный. Несложно видеть, что указанная замена знаков приводит в итоге к выражению (19).

Обсуждение полученных результатов. Таким образом, все рассмотренные модели намагниченного состояния вещества проводника в однородном внешнем поле позволяют получить для силы, действующей на ферромагнитное вещество проводника, в рассматриваемом случае ненулевой результат. Причем, для модели фиктивных магнитных зарядов и модели эквивалентных токов намагничивания имеем одинаковые по модулю силы, действующие на ферромагнитное вещество, при противоположной направленности этих сил. Это означает, что наличие тока в ферромагнитном веществе проводника не сохранило интегральную эквивалентность при определении суммарной силы, действующей на тело из магнитного вещества, которая, как отмечалось во Введении, имеет место при отсутствии электрических токов в магнитном веществе. Указанная интегральная эквивалентность, согласно (29), сохраняется лишь для моделей фиктивных магнитных зарядов и магнитных моментов.

Это означает также, что, т.к. обе модели должны давать одинаковый результат для суммарной силы, действующей на проводник с током, то определение силы, действующей на ток в проводнике, по этим моделям также даст различный результат (чтобы сумма сил, действующих на ток и ферромагнитное вещество, была одинаковой). А именно, суммарное силовое воздействие на ферромагнитный проводник с током определяется лишь силовым действием на ток со стороны внешнего магнитного поля, что дает $F_{\Sigma} = iB_0$ (сила $\overline{F}_{\Sigma}$ направлена по оси y). Тогда силовое воздействие только на ток проводника ($\overline{F}_{20} = 0$, а, следовательно $\overline{F}_{\Sigma} = \overline{F}_{10}$) можно найти как разность сил

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_{\Sigma} - \overline{F}_{2i}, \tag{30}$$

поскольку, как отмечалось выше, имеет место равенство $\overline{F}_{1M} = -\overline{F}_{2i}$.

Очевидно, что расчет по (30) будет давать разный результат, ввиду полученного выше для рассматриваемой задачи различия результатов при расчете силового воздействия на ферромагнитный материал провода. Такая неоднозначность результата расчета силового воздействия на ток в ферромагнитном проводнике и на ферромагнитное вещество проводника ставит вопрос о необходимости решения задачи об определении такой модели намагниченного состояния вещества, которая позволяла бы адекватно определять эффект силового воздействия магнитного поля на тела из магнетиков, по которым протекает электрический ток. Такая неоднозначность позволяет также утверждать, что вопрос о способе определения силы, действующей на ток в ферромагнитном веществе, который в свое время поставил А.Эйнштейн [6], остается актуальным.

Выводы. 1. Показано, что для рассмотренного примера не сохраняется интегральная эквивалентность между моделями намагниченного состояния (модель эквивалентных токов намагничивания и модель фиктивных магнитных зарядов) при определении суммарной силы, действующей на ферромагнитное вещество тела, по которому протекает электрический ток.

2. Показано, что при определении суммарной силы, действующей на ферромагнитное вещество тела, по которому протекает электрический ток, имеет место эквивалентность между моделями фиктивных магнитных зарядов и магнитных моментов.

3. Требует дополнительного решения задача определения силового воздействия магнитного поля на электрический ток в теле из ферромагнитного вещества.

1. *Бинс К., Лоуренсон П.* Анализ и расчет электрических и магнитных полей. – М.: Энергия, 1970. – 376 с.

2. *Загирняк М.В., Ю.А. Бранспиз Ю.А*. Оценка общих способов определения объёмной плотности и результирующей силы взаимодействия малого ферромагнитного тела с полем электромагнита – сепаратора.// Изв. ВУЗов. Электромеханика – 1987. – №11. – С. 134 – 136.

3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831с.

4. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. – М.: Мир, 1991. – 560 с.

5. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 504 с.

6. *Эйнштейн А*. О пондеромоторных силах, действующих на ферромагнитные проводники с током, помещенные в магнитное поле / Собрание научных трудов в 4-х т., Т. 3. – М.: Наука, – 1966. – С. 240 – 241.

7. *Müller W*. Comparison of different methods of force calculation // IEEE Transactions on magnetics. – 1987. – Vol. 26. – №26. – Pp. 1058 – 1061.

Надійшла 02.07.09