Металлофиз. новейшие технол. / Metallofiz. Noveishie Tekhnol.
2017, т. 39, № 11, сс. 1445–1454 / DOI: 10.15407/mfint.39.11.1445

ЭЛЕКТРОННЫЕ СТРУКТУРА И СВОЙСТВА

PACS numbers: 03.50.De, 63.20.kd, 71.10.Ca, 71.45.Gm, 72.15.Lh, 73.20.Mf, 78.20.Bh, 78.67.Bf

Релаксація енергії зв'язку електронів з фононами в металах

М. І. Григорчук

Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, вул. Метрологічна, 14[б], 03143 Київ, Україна

Досліджується релаксація енергії електронів на коливаннях ґратниці у металах. Розподіл енергії по станах вважається рівноважним, що можна описати функціями Фермі та Бозе. Одержано аналітичну формулу для втрати електронної енергії за одиницю часу, необхідної для запуску акустичних коливань ґратниці. Показано, що величина поглинутої ґратницею потужности визначається співвідношеннями температур Дебайової та ґратниці, а також температур ґратниці й електронів.

Ключові слова: метали, електрон-фононний зв'язок, температура електронів.

The relaxation of electron energy by means of the lattice vibrations in a metal is investigated. The energy distribution between the states is considered as equilibrium one that can be described by the Fermi and Bose functions. An analytical formula is obtained for the electron-energy loss per unit time that is necessary to trigger the lattice acoustic vibrations. As shown, the value of power absorbed by lattice is defined by both relations of the Debye temperature to the lattice temperature and the lattice temperature to the electrons' temperature.

Key words: metals, electron–phonon coupling, electrons' temperature.

Исследуется релаксация энергии электронов на колебаниях решётки в

Corresponding author: Mykola Ivanovych Grygorchuk
E-mail: ngrigor@bitp.kiev.ua

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, N.A.S. of Ukraine, 14-b Metrologichna Str., UA-03143 Kyiv, Ukraine

Please cite this article as: M. I. Grygorchuk, Relaxation of a Coupling Energy of Electrons with Phonons in Metals, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **39**, No. 11: 1445–1454 (2017) (in Ukrainian), DOI: 10.15407/mfint.39.11.1445.

металлах. Распределение энергии по состояниям считается равновесным, таким, что можно описать функциями Ферми и Бозе. Получена аналитическая формула для потери электронной энергии в единицу времени, необходимой для запуска акустических колебаний решётки. Показано, что величина поглощённой решёткой мощности определяется соотношениями температур Дебая и решётки, а также температур решётки и электронов.

Ключевые слова: металлы, электрон-фононная связь, температура электронов.

(Отримано 20 жовтня 2017 р.)

1. ВСТУП

Взаємодія між електронами і фононами є однією з головних характеристик у вивченні фундаментальних властивостей фізики конденсованих середовищ. Загальна теорія розсіяння електронів на фононах розвивалася багатьма авторами, і її основні результати можна знайти, наприклад, у Займановій монографії [1]. Різні аспекти цієї проблеми у випадку об'ємних металів досліджувались у роботах [2–12]. Основи теорії електрон-фононної взаємодії розроблялися в роботах [2–4]. Електрон-фононна релаксація відіграє важливу роль у високочастотних електронних приладах [5, 6] та в ультракоротких лазерних процесах [7], коли електрони і фонони перебувають у нерівноважному стані через велику ріжницю їхніх теплоємностей. Нерівноважний обмін енергією між електронами і ґратницею було вперше теоретично оцінено у роботі [8]. З практичного боку потрібно знати, якою буде електронна температура і температура ґратниці протягом підігрівання металів коротким лазерним імпульсом. До певної міри це завдання розв'язує добре відомий двотемпературний модель [9–12], який ґрунтується на двох диференційних рівняннях балансу потоків тепла в об'ємних металах.

Є значний інтерес у встановленні зміни енергії електрон-фононного зв'язку при зменшенні розмірів об'ємних металів до металевих наночастинок, металевих острівців, плівок або кластерів, де значний вплив на всі процеси відіграє поверхня частинки [13–16]. Він зумовлений більш загальною фізичною проблемою, а саме, як трансформуються добре відомі фізичні параметри, коли просторові розміри металу зменшуються і поверхня починає виступати як додатковий розсіювач? Для цього необхідно спочатку виявити особливості зв'язку електронів з фононами в об'ємних металах.

У даній роботі запропоновано новий підхід до обчислення енергії електрон-фононної взаємодії у металах. Він уможливлює аналітично оцінити згасання енергії електронів на коливаннях ґратниці в об'ємному металі, залежно від температур електронів і ґратниці.

Далі статтю побудовано так: загальні теоретичні положення подано у другому розділі; розділ 3 присвячено обчисленню зміни енергії електронів при зіткненні з фононами; останній розділ містить короткі висновки.

2. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Взаємодію електромагнетної хвилі (ЕМ) з металом вивчатимемо у рамках класичної оптики. Вважається, що кожен електрон отримує від зовнішнього поля поштовх, який прискорює його рух, і деякий час, званий часом життя τ, він рухається вільно. Однак, при зіткненні з ґратницею його швидкість губиться, і надлишкова енергія передається коливанням йонів. У такому випадку говорять про народження та знищення фононів.

Ефективність передачі енергії від лазерного пучка до металу істотно залежить від середньої довжини вільного пробігу (СДВП) електрона провідности в нескінченому об'ємі l_∞ та від Дебайової довжини l_D, яку визначають як $l_D = \pi \upsilon_F \omega_D$, де υ_F — швидкість електрона на межі Фермі, а ω_D позначає Дебайову частоту. Параметер l_D відіграє важливу роль в обміні енергією між гарячими електронами і ґратницею. Його значення для шляхетних металів подано в табл. 1 разом з концентрацією електронів n_e і Дебайовою температурою T_D.

У класичному випадку вільних електронів в об'ємі металу згасання ($\gamma_b \equiv \nu$, де ν — частота електронних зіткнень) зумовлено розсіянням електронів на фононах, дефектах ґратниці чи на домішках, які, загалом, скорочують СДВП електрона. У цьому випадку часто подають об'ємне згасання як $\gamma_b = 1/\tau = \upsilon_F / l_\infty$.

Об'ємне розсіяння не спричиняє значного згасання у високочастотному випадку, коли $\omega\tau >> 1$; тут ω — кутова частота світла, а τ — час життя електрона (або час релаксації), який можна оцінити як $1/\tau = \Gamma$. За обмежених розмірів металу починає відігравати роль поверхневе розсіяння. Його внесок у згасання є незначним, коли

$$l_\infty / d << \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}\ , \tag{1}$$

ТАБЛИЦЯ 1. Значення деяких параметрів для шляхетних металів.

TABLE 1. The values of some parameters of noble metals.

Параметер / Метал	l_D, Å	l_∞, Å [17]	υ_F, см/с [18]	n_e, см$^{-3}$ [18]	ω_D, с$^{-1}$ [19]	T_D, К [19]
Cu	1197	399	$1{,}57 \cdot 10^8$	$8{,}45 \cdot 10^{22}$	$4{,}49 \cdot 10^{13}$	315
Ag	1552	533	$1{,}39 \cdot 10^8$	$5{,}85 \cdot 10^{22}$	$2{,}95 \cdot 10^{13}$	215
Au	1968	377	$1{,}394 \cdot 10^8$	$5{,}90 \cdot 10^{22}$	$2{,}16 \cdot 10^{13}$	170

де d — розмір металу, і стає важливим, якщо

$$\omega\tau >> \max(1, l_\infty/d). \qquad (2)$$

Аби оцінити вплив електронного розсіяння на поверхні, часто використовують таке емпіричне співвідношення [20, 21]

$$\gamma_s = A\upsilon_F/l_{\text{eff}}\,, \qquad (3)$$

де l_{eff} — ефективна СДВП електрона і A — деякий феноменологічний фактор. Однак ця формула може бути застосовною лише до металевих кластерів сферичної форми у випадку, коли СДВП електрона l є меншою від їхнього розміру.

3. ЗМІНА ЕНЕРГІЇ ВЗАЄМОДІЇ ЕЛЕКТРОНІВ ПРИ ЗІТКНЕННІ З ФОНОНАМИ

Розглядатимемо розсіяння ЕМ-хвиль у металі з розмірами, набагато більшими від l_∞. Тоді зіткнення електронів провідности з коливаннями ґратниці стають найвпливовішим релаксаційним процесом, і жодні інші обміни енергією електронів не розглядатимемо.

Опромінення масивного металу на початковому етапі веде до нагрівання в його середині електронного газу. Оскільки час встановлення рівноваги між електронами після збудження є набагато меншим, ніж час встановлення рівноваги між електронами та ґратницею, то можна вважати, що електронний газ знаходиться у рівноважному стані з фермі-діраківським розподілом за енергією окремих електронів, тобто

$$n_{\mathbf{k}} = (e^{(\varepsilon_{\mathbf{k}}-\mu)/k_B\Theta} + 1)^{-1}\,, \qquad (4)$$

де Θ — температура електронів, а μ — хемічний потенціял, який визначають через концентрацію n_e електронів за виразом [22]

$$\mu = \left(\frac{3n_e}{8\pi}\right)^{2/3}\frac{(2\pi\hbar)^2}{2m}, \qquad (5)$$

де m — маса електрона.

Вважається, що температура електронів Θ набагато перевищує температуру ґратниці, яку позначимо літерою T: $\Theta >> T$. Максимальна ріжниця температур між електронами і ґратницею, яка задає час релаксації електронів, визначається швидкістю передачі тепла від електронів до ґратниці.

Обчислимо ту кількість енергії, яка передається від електронів до ґратниці в одиницю об'єму за одиницю часу за довільних температур. Відповідно до стандартної методики [23],

$$\frac{dU}{dt} = W = \frac{V}{(2\pi)^3} \int (dN_{\mathbf{q}}(t)/dt)\, E(\mathbf{q})\, d\mathbf{q}, \tag{6}$$

де V — об'єм кристалу, вираз в круглих дужках під інтеґралом описує зміну числа фононів за одиницю часу в одиниці об'єму, $E(\mathbf{q}) = \hbar\mathbf{q}\cdot\upsilon_s$ — енергія фонона з імпульсом $\mathbf{q}$, υ_s — швидкість звуку в кристалі.

Нехай $P_{\mathbf{k}_i,\mathbf{k}_i+\mathbf{q}}$ — ймовірність переходу електрона із стану з хвильовим вектором $\mathbf{k}_i$ в стан з хвильовим вектором $\mathbf{k}_i+\mathbf{q}$. При взаємодії електрона з ґратницею народжується або поглинається фонон; при цьому виконуються закон збереження імпульсу $\mathbf{q}=\mathbf{k}_f-\mathbf{k}_i$ та закон збереження енергії:

$$\delta\varepsilon = \frac{m\upsilon_f^2}{2} - \frac{m\upsilon_i^2}{2} = \frac{\hbar^2}{2m}(k_f^2 - k_i^2) = \pm E(q),\quad 2m\upsilon_F \sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{E(q)}{\upsilon_s}, \tag{7}$$

де υ_i — початкова, а υ_f — кінцева швидкості електрона, υ_F — швидкість електрона на сфері Фермі, φ — кут між початковим і кінцевим напрямками швидкости електрона. Знак (–) відповідає поглинанню фонона, а знак (+) — його народженню. Приблизно протягом половини часу життя електрон може прийняти участь у зіткненні з випусканням фонона, а в іншу половину цього часу може відбутися його зіткнення з поглинанням фонона. Вважаючи взаємодію електронів з ґратницею лінійною стосовно координат осциляторів звукового поля, тобто пропорційною зміщенню йонів, ймовірність випускання фонона одержимо пропорційною числу $N_{\mathbf{q}}+1$, а ймовірність його поглинання — $N_{\mathbf{q}}$. З урахуванням закону збереження енергії ця ймовірність буде: $P_{\mathbf{k},\mathbf{k}\pm\mathbf{q}}\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}_i} + E(\mathbf{q}) - \varepsilon_{\mathbf{k}_f})$. Таким чином, виходячи зі сказаного, одержуємо:

$$P_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \frac{\pi D^2}{\rho V \hbar \upsilon_s^2} E(\mathbf{q}), \tag{8}$$

де D — стала взаємодії електрона з ґратницею, ρ — густина маси кристалу, $\mathbf{k}'=\mathbf{k}\pm\mathbf{q}$.

Знайдемо зміну числа фононів за одиницю часу, що входить у (7). За Гаррісоном [23],

$$\begin{gathered} dN_{\mathbf{q}}(t)/dt = 2(2\pi)^{-3} \times \\ \times \int P_{\mathbf{k}_i,\mathbf{k}_i\pm\mathbf{q}} \{(N_{\mathbf{q}}+1)n_{\mathbf{k}_f}(1-n_{\mathbf{k}_i}) - N_{\mathbf{q}} n_{\mathbf{k}_i}(1-n_{\mathbf{k}_f})\}\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}_i} + E(\mathbf{q}) - \varepsilon_{\mathbf{k}_f})\, dV_{\mathbf{k}_f}. \end{gathered} \tag{9}$$

Тут

$$N_{\mathbf{q}} = (e^{E(\mathbf{q})/k_B T} - 1)^{-1}. \tag{10}$$

У виразі (9) зміну числа фононів у часі зумовлено їх народженням і знищенням. Такі процеси можуть відбуватися за умови, що швидкість електронів є більшою за швидкість звуку в кристалі. У такому випадку «народження» фонона відповідає класичному черенковському випромінюванню. Коли температури електронів і фононів зрівнюються, вираз (9) стає нулем. Проведемо обчислення виразу (9), коли ці температури різні. Подамо спочатку вираз у фіґурних дужках (9) явно через відповідні енергії та температури, скориставшись функціями розподілу для $n_{\mathbf{k}}$ і $N_{\mathbf{q}}$ та законом збереження енергії $\varepsilon_{\mathbf{k}_i} = \varepsilon_{\mathbf{k}_f} - E(q)$. Після простих алґебричних перетворень одержуємо

$$(N_{\mathbf{q}} + 1)n_{\mathbf{k}_f}(1 - n_{\mathbf{k}_i}) - N_{\mathbf{q}}n_{\mathbf{k}_i}(1 - n_{\mathbf{k}_f}) = \\ = \frac{1}{e^{(\varepsilon_{\mathbf{k}_f}-\mu)/k_B\Theta} + 1} \frac{e^{E(q)/k_BT} - e^{E(q)/k_B\Theta}}{e^{E(q)/k_BT} - 1} \frac{e^{(\varepsilon_{\mathbf{k}_f}-\mu-E(q))/k_B\Theta}}{e^{(\varepsilon_{\mathbf{k}_f}-\mu-E(q))/k_B\Theta} + 1}. \quad (11)$$

Підставивши цей вираз у (9), перейдемо у ньому до інтеґрування за кінцевими станами у просторі квазиімпульсів за правилом

$$\int dV_{\mathbf{k}_f} \Rightarrow \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{k_{\max}} k_f^2\, dk_f, \quad (12)$$

де $k_{\max} = k_F$ — максимальний імпульс електрона (ферміївський), та візьмемо до уваги властивість δ-функції

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}[\delta(x - a) + \delta(x + a)]. \quad (13)$$

В результаті знаходимо:

$$\frac{d}{dt}N_{\mathbf{q}}(t) = \frac{(2m)^{3/2}D^2E(q)}{4\pi\hbar^4\rho V\upsilon_s^2}\sqrt{\varepsilon_F + E(q)}\,\frac{e^{E(q)/k_BT} - e^{E(q)/k_B\Theta}}{(e^{E(q)/k_B\Theta} + 1)(e^{E(q)/k_BT} - 1)}. \quad (14)$$

Якщо врахувати рівність

$$\frac{m\upsilon_s^2}{2} = \varepsilon_F + E(q), \quad (15)$$

то формула (9) перепишеться у вигляді

$$\frac{d}{dt}N_{\mathbf{q}}(t) = \frac{m^2D^2E(q)}{2\pi\hbar^4\rho V\upsilon_s}\,\frac{e^{E(q)/k_BT} - e^{E(q)/k_B\Theta}}{(e^{E(q)/k_B\Theta} + 1)(e^{E(q)/k_BT} - 1)}. \quad (16)$$

Знак у знаменнику формули (16) відрізняє її від відомого раніше виразу з роботи [8]. Відмінність виникла через низку припущень, зроблених у роботі [8], які значно полегшували авторам подальші обчислення.

Знаючи динаміку $N_{\mathbf{q}}(t)$, перейдемо до обчислення величини поглинутої потужности W. Перейдемо в (6) до сферичної системи координат. Використовуючи (16), одержимо

$$W = \frac{2}{(2\pi)^3}\frac{\upsilon_s m^2 D^2}{\hbar^2\rho}\int_0^{q_D} q^4 \frac{e^{E(q)/k_B T} - e^{E(q)/k_B\Theta}}{(e^{E(q)/k_B\Theta}+1)(e^{E(q)/k_B T}-1)}dq. \quad (17)$$

Виконаємо тут наступну заміну змінних:

$$[\hbar\upsilon_s/(k_B T)]q = x \quad (18)$$

і скористаймося рівністю $\hbar\upsilon_s q_D = k_B T_D$. Тоді $x = (q/q_D)(T/T_D)$, і вираз (17) перепишеться у вигляді:

$$W = \frac{2}{(2\pi)^3}\frac{\upsilon_s}{\rho}(mD/\hbar)^2 I, \quad (19)$$

де через I ми позначили інтеґрал

$$I = q_D^5 (T/T_D)^5 \int_0^{T_D/T} x^4 \frac{e^x - e^{xT/\Theta}}{(e^x-1)(e^{xT/\Theta}+1)}dx. \quad (20)$$

Оскільки усереднена для 39 металів Дебайова температура складає $T_D \cong 250$ К, а електронна температура Θ у середньому сягає 7500 К, то на верхній границі інтеґрала (20) показник експоненти (з відношенням температур) сягне величини $T_D/\Theta \approx 1/30$, а сама експонента буде $e^{1/30} \approx 1{,}034$. Отже, у межах інтеґрування множник $(e^{xT/\Theta}+1)$ у знаменнику підінтеґрального виразу (20) можна вважати рівним ≈ 2. Таким чином, з великою точністю обчислення інтеґрала I зводиться до обчислення інтеґрала

$$I_0 = \frac{q_D^5}{2}(T/T_D)^5 \int_0^{T_D/T} x^4 \frac{e^x - e^{xT/\Theta}}{e^x - 1}dx. \quad (21)$$

Коли температури зрівнюються ($T = \Theta$), очевидно, $I_0 = 0$. Якщо скористатися рівністю

$$ze^{xz}(e^z-1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) z^n/n!, \quad |z| < 2\pi, \quad (22)$$

де $B_n(x)$ — Бернуллійова функція n-го порядку [24], то результат інтеґрування можна подати у вигляді:

$$I_0 = \frac{q_D^5}{2}\left(\frac{T}{T_D}\right)^5 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T_D}{T}\right)^{n+4}\frac{1}{n!(n+4)}\left[(-1)^n B_n - B_n\left(\frac{T}{\Theta}\right)\right], \quad \frac{T_D}{T} < 2\pi. \quad (23)$$

У випадку $T = \Theta$, $B_n(1) = (-1)^{-n} B_n(0) = (-1)^{-n} B_n$, де B_n — Бернуллійові числа, і $I_0 = 0$.

Обчислення нескінченої суми з Бернуллійовими функціями в (23) може бути складним. Тому підемо іншим шляхом. Використовуючи значення

$$I_s = \int_0^{T_D/T} x^s e^{-kx} dx = \frac{\Gamma(s+1)}{k^{s+1}} - e^{-k_D T_D/T} \sum_{n=1}^{s+1} \frac{1}{k^n} \left(\frac{T_D}{T} \right)^{s+1-n} \frac{\Gamma(s+1)}{(s+1-n)!}, \tag{24}$$

та тотожності [24]

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \zeta(n), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} e^{-k\frac{T_D}{T}} = e^{-\frac{T_D}{T}} \Phi(e^{-\frac{T_D}{T}}, n, 1),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(k+1-\frac{T}{\Theta}\right)^n} = -\frac{1}{\left(1-\frac{T}{\Theta}\right)^n} + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \psi^{(n-1)}\left(1-\frac{T}{\Theta}\right), \tag{25}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k\frac{T_D}{T}}}{\left(k+1-\frac{T}{\Theta}\right)^n} = -\frac{1}{\left(1-\frac{T}{\Theta}\right)^n} + \Phi(e^{-\frac{T_D}{T}}, n, 1-\frac{T}{\Theta}),$$

знаходимо:

$$W = \frac{q_D^5}{(2\pi)^3} \frac{\upsilon_s}{\rho} \left(\frac{mD}{\hbar} \right)^2 \left(\frac{T}{T_D} \right)^5 \left\{ \frac{1}{5} \left(\frac{T_D}{T} \right)^5 + \Gamma(5)\,\varsigma(5) - \left| \psi^{(4)}(1-\frac{T}{\Theta}) \right| + \right.$$
$$\left. + e^{-\frac{T_D}{T}} \sum_{n=1}^{5} \left(\frac{T_D}{T} \right)^{5-n} \frac{\Gamma(5)}{(5-n)!} [e^{\frac{T_D}{\Theta}} \Phi(e^{-\frac{T_D}{T}}, n, 1-\frac{T_D}{T}) - \Phi(e^{-\frac{T_D}{T}}, n, 1)] \right\}. \tag{26}$$

Тут $\Phi(a, b, z)$ — конфлюентна або Куммерова вироджена гіпергеометрична функція, $\Gamma(z)$ — Ойлерова гама-функція, $\zeta(z)$ — Ріманова дзета-функція, $\psi^{(n)}(z)$ — полігама-функція [24].

Аналітичний результат (26) було чисельно зіставлено з чисельним інтеґруванням формул (20) і (21). У широкому діяпазоні відношень T/Θ ми одержали збіг результатів. Збіг тим ліпший, чим менше відношення T/Θ. У випадку $T \ll \Theta$ полігама-функція $\psi^{(4)}(1) = -\Gamma(5)\varsigma(5)$, і ми остаточно одержуємо:

$$W = \frac{q_D^5}{5(2\pi)^3} \frac{\upsilon_s}{\rho} \left(\frac{mD}{\hbar} \right)^2 \times$$
$$\times \left\{ 1 + e^{-\frac{T_D}{T}} \sum_{n=1}^{5} \left(\frac{T}{T_D} \right)^n \frac{5\Gamma(5)}{(5-n)!} [e^{\frac{T_D}{\Theta}} \Phi(e^{-\frac{T_D}{T}}, n, 1-\frac{T_D}{T}) - \Phi(e^{-\frac{T_D}{T}}, n, 1)] \right\}. \tag{27}$$

4. ВИСНОВКИ

Одержано загальну формулу для енергії, яка передається електронами ґратниці в одиницю об'єму за одиницю часу за довільних температур електронів і ґратниці. Вона уможливлює аналітично оцінити швидкість згасання (чи часу розпаду), зумовленого розсіянням електронів в об'ємному металі. Цей результат може бути важливим для аналізи транспортних та оптичних властивостей для довільних металів і для більш точної оцінки в подальшому енергії електрон-фононного зв'язку в металевих наночастинках.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. J. M. Ziman, *Electrons and Phonons* (Oxford: Clarendon Press: 1960).
2. V. L. Ginzburg and V. P. Shabanski, *Sov. Doklady AN SSSR*, **100**: 445 (1955).
3. J. Bardin, L. N. Cooper, and J. R. Schriffer, *Phys. Rev.*, **106**: 162 (1957); ibidem, **108**: 1175 (1957).
4. T. Holstein, *Annals of Physics*, **29**: 410 (1964).
5. P. E. Hopkins, J. L. Kassebaum, and P. M. Norris, *J. Appl. Phys.*, **105**: 023710 (2009).
6. A. N. Smith and J. P. Calame, *Int. J. Thermophys.*, **25**: 409 (2004).
7. J. K. Chen, W. P. Latham, and J. E. Beraun, *J. Laser. Appl.*, **17**: 63 (2005).
8. M. I. Kaganov, I. M. Lifshitz, and L. V. Tanatarov, *Sov. Phys. JETP*, **4**: 173 (1957).
9. S. I. Anisimov, B. L. Kapeliovich, and T. L. Perelman, *Sov. Phys. JETP*, **39**: 375 (1974).
10. T. Q. Qui and C. L. Tien, *Trans. ASME J. Heat Transf.*, **115**: 835 (1993).
11. R. D. Fedorovich, A. G. Naumovets, and P. M. Tomchuk, *Phys. Rep.*, **328**: 73 (2000).
12. Y. Bilitsky, N. I. Grigorchuk, and P. M. Tomchuk, *Surf. Sci.*, **603**: 3267 (2009).
13. N. I. Grigorchuk, *Condens. Matter Phys.*, **16**: 33706 (2013).
14. A. Crut, P. Maioli, N. Del Fatti, and F. Vallèe, *Chem. Soc. Rev.*, **43**: 3921 (2014).
15. П. М. Томчук, М. І. Григорчук, *Металлофиз. новейшие технол.*, **29**, № 5: 623 (2007).
16. V. G. Karpov, M. Nardone, and N. I. Grigorchuk, *Phys. Rev. B*, **86**: 075463 (2012).
17. D. Gall, *J. Appl. Phys.*, **119**: 085101 (2016).
18. Ч. Киттель, *Введение в физику твёрдого тела* (Москва: Наука: 1978).
19. Ф. Зейтц, *Современная теория твёрдого тела* (Москва–Ленинград: Гос. изд. технико-теоретической лит.: 1949).
20. E. A. Coronado and G. C. Schatz, *J. Chem. Phys.*, **119**: 3926 (2003).
21. N. I. Grigorchuk, *J. Phys. Chem. C*, **116**: 23704 (2012).
22. С. Л. Королюк, *Основи статистичної фізики та термодинаміки* (Чернівці: Книги-XXI: 2004).
23. W. A. Harrison, *Solid State Theory* (New York–London–Toronto: McGraw-Hill: 1970).
24. *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover Publ.: 1972).

REFERENCES

1. J. M. Ziman, *Electrons and Phonons* (Oxford: Clarendon Press: 1960).
2. V. L. Ginzburg and V. P. Shabanski, *Sov. Doklady AN SSSR*, **100**: 445 (1955).
3. J. Bardin, L. N. Cooper, and J. R. Schriffer, *Phys. Rev.*, **106**: 162 (1957); ibidem, **108**: 1175 (1957).
4. T. Holstein, *Annals of Physics*, **29**: 410 (1964).
5. P. E. Hopkins, J. L. Kassebaum, and P. M. Norris, *J. Appl. Phys.*, **105**: 023710 (2009).
6. A. N. Smith and J. P. Calame, *Int. J. Thermophys.*, **25**: 409 (2004).
7. J. K. Chen, W. P. Latham, and J. E. Beraun, *J. Laser. Appl.*, **17**: 63 (2005).
8. M. I. Kaganov, I. M. Lifshitz, and L. V. Tanatarov, *Sov. Phys. JETP*, **4**: 173 (1957).
9. S. I. Anisimov, B. L. Kapeliovich, and T. L. Perelman, *Sov. Phys. JETP*, **39**: 375 (1974).
10. T. Q. Qui and C. L. Tien, *Trans. ASME J. Heat Transf.*, **115**: 835 (1993).
11. R. D. Fedorovich, A. G. Naumovets, and P. M. Tomchuk, *Phys. Rep.*, **328**: 73 (2000).
12. Y. Bilitsky, N. I. Grigorchuk, and P. M. Tomchuk, *Surf. Sci.*, **603**: 3267 (2009).
13. N. I. Grigorchuk, *Condens. Matter Phys.*, **16**: 33706 (2013).
14. A. Crut, P. Maioli, N. Del Fatti, and F. Vallèe, *Chem. Soc. Rev.*, **43**: 3921 (2014).
15. P. M. Tomchuk and M. I. Grigorchuk, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **29**, No. 5: 623 (2007) (in Ukrainian).
16. V. G. Karpov, M. Nardone, and N. I. Grigorchuk, *Phys. Rev. B*, **86**: 075463 (2012).
17. D. Gall, *J. Appl. Phys.*, **119**: 085101 (2016).
18. Ch. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (New York: Wiley: 1995).
19. F. Zeitz, *The Modern Theory of Solids* (New York: McGraw-Hill Book: 1940).
20. E. A. Coronado and G. C. Schatz, *J. Chem. Phys.*, **119**: 3926 (2003).
21. N. I. Grigorchuk, *J. Phys. Chem. C*, **116**: 23704 (2012).
22. S. L. Koroljuk, *Osnovy Statystychnoi Fizyky ta Termodynamiky* (Chernivtsi: Knygy-XXI: 2004) (in Ukrainian).
23. W. A. Harrison, *Solid State Theory* (New York–London–Toronto: McGraw-Hill: 1970).
24. *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover Publ.: 1972).