Физика низких температур, 2002, т. 28, № 4, с. 327–337

О классификации равновесных сверхтекучих состояний со скалярным и тензорным параметрами порядка

М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, Н. Н. Чеканова

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина
E-mail: mik@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 6 ноября 2001 г.

Проведена классификация равновесных состояний сверхтекучих жидкостей со скалярным и тензорным параметрами порядка на основе концепции квазисредних. Дано обобщение условия ненарушенной симметрии на неоднородные равновесные состояния. Найдены допустимые условия пространственной симметрии в терминах интегралов движения. Установлена связь этих условий симметрии с геликоидальной структурой векторов спиновой и пространственной анизотропии. При некоторых ограничениях показано, что равновесная структура параметра порядка может быть представлена в виде произведения однородной и зависящей от пространственных координат неоднородной части параметра порядка.

Проведено класифікацію рівноважних станів надплинних рідин зі скалярним та тензорним параметрами порядку на основі концепції квазісередніх. Надано узагальнення умов непорушеної симетрії на неоднорідні рівноважні стани. Знайдено допустимі умови просторової симетрії в термінах інтегралів руху. Встановлено зв'язок цих умов симетрії з гелікоїдальною структурою векторів спінової та просторової анізотропії. При певних обмеженнях показано, що рівноважна структура параметра порядку може бути наведена у вигляді добутку однорідної та залежної від просторових координат неоднорідної частини параметра порядку.

PACS: **67.57.–z**, 67.57.Lm

1. Введение

Исследования явления сверхтекучести в ^{3}He привели к предсказанию и открытию ряда сверхтекучих фаз. К ним относится изотропное состояние, описанное Бальяном и Вертхаммером [1], получившее название *B*-фазы. Устойчивость предсказанного Андерсеном и Морелом [2] состояния, соответствующего *A*-фазе, объясняется влиянием спиновых флуктуаций, стабилизирующих анизотропное состояние сверхтекучей жидкости. При включении магнитного поля наблюдается устойчивая A_1-фаза [3]. Ряд других фазовых состояний, предсказанных ранее, таких как полярная фаза [4], а также α-, β-, δ-, ε-фазы [5] и 2*D*-фаза [6] экспериментально не обнаружены. Общим свойством указанных выше состояний является их трансляционная инвариантность. Анализ и классификация таких состояний в ^{3}He проводились в работах [5,7–11] на основе теории Гинзбурга–Ландау или с использованием теоретико-групповых методов. Связь коллективных мод и неприводимых представлений группы симметрии состояния равновесия изучена в [12]. Известно, что в некоторой области изменения термодинамических параметров однородное состояние теряет устойчивость и сверхтекучая фаза переходит в неоднородное состояние. В работах [13–16] рассмотрены неоднородные равновесные состояния в сверхтекучем ^{3}He. В них в рамках модельных выражений для свободной энергии выяснены условия устойчивости геликоидальных структур. Работы [17,18] уточняют границы устойчивости состояний в более широкой области температур.

Интерес к этому вопросу повысился ввиду его тесной связи с проблемой критических скоростей в сверхтекучем ^{3}He. Однако классификация равновесных неоднородных состояний не проводилась.

Цель работы — на основе концепции квазисредних [19] произвести классификацию сверхтекучих фаз при синглетном или триплетном спаривании, учитывая возможность возникновения неоднородных равновесных структур. В микроскопическом подходе в работах [20–23] исследовано состояние равновесия магнитных и сверхтекучих систем с нарушенной симметрией относительно спиновых поворотов и фазовых преобразований и рассмотрена термодинамика геликоидальных структур в таких конденсированных средах. В настоящей работе сформулировано условие ненарушенной симметрии состояния равновесия и совместимое с ним условие пространственной симметрии, включающее возможность нарушения симметрии относительно поворотов в конфигурационном пространстве. Дана физическая интерпретация дополнительных термодинамических параметров, возникших в результате такого обобщения условий симметрии. Найдены неоднородные структуры параметра порядка и показано, что при некоторых ограничениях эта структура может быть представлена в виде произведения однородной и зависящей от пространственных координат неоднородной части параметра порядка. При этом задача классификации однородной части параметра порядка эффективно сводится к задаче трансляционно-инвариантного случая.

2. Равновесие. Нормальная фаза ферми-жидкости

Рассмотрим состояние равновесия нормальных конденсированных сред, описываемое статистическим оператором Гиббса

$$\hat{w} = \exp(\Omega - Y_0 \hat{\mathcal{H}} - Y_4 \hat{N}) . \qquad (2.1)$$

Здесь $\hat{\mathcal{H}}$ — гамильтониан, $\hat{N}$ — оператор числа частиц. Термодинамический потенциал Ω определяется из условия нормировки $\mathrm{Sp}\, \hat{w} = 1$. Набор термодинамических сил включает в себя температуру $T \equiv Y_0^{-1}$ и химический потенциал $\mu_k \equiv \equiv - Y_4 / Y_0$. Для удобства рассматриваем конденсированную среду в системе покоя и эффективное магнитное поле предполагаем равным нулю. Свойства симметрии равновесного статистического оператора (2.1) имеют вид

$$[\hat{w}, \hat{\mathcal{P}}_k] = 0 , \quad [\hat{w}, \hat{\mathcal{H}}] = 0 , \quad [\hat{w}, \hat{N}] = 0 ,$$

$$[\hat{w}, \hat{S}_\alpha] = 0 , \quad [\hat{w}, \hat{\mathcal{L}}_i] = 0 , \qquad (2.2)$$

где $\hat{\mathcal{P}}_k$ — оператор импульса, $\hat{S}_\alpha$ и $\hat{\mathcal{L}}_i$ — операторы спинового и орбитального моментов. Первые три соотношения отражают пространственно-временную трансляционную инвариантность и фазовую инвариантность. Условия симметрии относительно поворотов в спиновом и конфигурационном пространствах означают пренебрежение слабыми дипольными и спин-орбитальными взаимодействиями при характеристике состояния равновесия. Полная группа симметрии нормального состояния равновесия ферми-жидкости имеет вид

$$G = [SO(3)]_S \times [SO(3)]_{\mathcal{L}} \times [U(1)]_\varphi \times [T(3)] \times [T(1)] . \qquad (2.3)$$

Здесь $[SO(3)]_S$, $[SO(3)]_{\mathcal{L}}$ — группы симметрии относительно поворотов в спиновом и конфигурационном пространствах, $[T(3)]$, $[T(1)]$ — трансляционные группы в пространстве и времени, $[U(1)]_\varphi$ — группа фазовой симметрии. Каждый элемент группы представляет собой унитарный оператор $U \equiv \exp i\hat{G}g$ (g — параметр преобразования), оставляющий инвариантным распределение Гиббса:

$$U \hat{w} U^+ = \hat{w} . \qquad (2.4)$$

Генераторами преобразований (2.4) являются линейные комбинации операторов $\{\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathcal{L}}, \hat{N}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{H}}\}$. Средние вида $\mathrm{Sp}\, \hat{w}[\hat{G}, \hat{b}(x)]$ обращаются в нуль при произвольном квазилокальном операторе $\hat{b}(x)$ для $\hat{G} \in (\hat{\mathcal{P}}_k, \hat{N}, \hat{S}_\alpha, \hat{\mathcal{L}}_k)$. Это, в частности, справедливо для операторов параметра порядка $\hat{b}(x) \equiv \hat{\Delta}_a(x)$, не коммутирующих с интегралами движения $\hat{G}$. Индекс a отражает тензорную размерность параметра порядка. Как будет видно ниже, коммутаторы $[\hat{G}, \hat{\Delta}_a(x)]$ линейны и однородны по операторам параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$, что в нормальном состоянии приводит к обращению в нуль равновесных средних параметров порядка: $\mathrm{Sp}\, \hat{w} \hat{\Delta}_a(x) = 0$.

3. Равновесие. Синглетное спаривание сверхтекучей ферми-жидкости

Квазисреднее значение величины $a(x) = \langle \hat{a}(x) \rangle$ в состоянии статистического равновесия с нарушенной симметрией определяется формулой [19]

$$\langle \hat{a}(x)\rangle = \lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} \mathrm{Sp}\, \hat{w}_\nu \hat{a}(x) \,, \qquad (3.1)$$

где

$$\hat{w}_\nu \equiv \exp\,(\Omega_\nu - Y_0\hat{H} - Y_4\hat{N} - \nu Y_0\hat{F}) \qquad (3.2)$$

и в общем случае зависит от структуры источника $\hat{F}$, нарушающего симметрию, который выбирается в виде линейного функционала оператора параметра порядка. Для сверхтекучей ферми-жидкости с синглетным спариванием состояние равновесия характеризуется скалярным параметром порядка

$$\hat{\Delta}(x) \equiv (i/2)\hat{\psi}(x)\sigma_2\hat{\psi}(x) \,, \qquad (3.3)$$

где $\hat{\psi}(x)$ — фермиевский полевой оператор уничтожения частицы в точке x и σ_2 — матрица Паули. Оператор параметра порядка удовлетворяет коммутационным соотношениям:

$$[\hat{N},\hat{\Delta}(x)] = -2\hat{\Delta}(x) \,, \quad i\,[\hat{S}_\alpha,\hat{\Delta}(x)] = 0 \,,$$

$$i\,[\hat{P}_k,\hat{\Delta}(x)] = -\nabla_k\hat{\Delta}(x),\; i\,[\hat{L}_i,\hat{\Delta}(x)] = -\varepsilon_{ikl}\, x_k\nabla_l\hat{\Delta}(x). \qquad (3.4)$$

Оператор $\hat{F}$ обладает симметрией исследуемой фазы конденсированной среды и снимает вырождение состояния равновесия:

$$\hat{F} = \int d^3x\; (f(x,t)\hat{\Delta}(x) + \mathrm{h.c.}) = \hat{F}(t) \,. \qquad (3.5)$$

Здесь $f(x,t)$ — некоторая функция координат и времени, сопряженная оператору параметра порядка, которая задает его равновесные значения в смысле квазисредних $\Delta(x,t) = \langle\hat{\Delta}(x)\rangle$. Зависимость $\Delta = \Delta(x,t)$ от координат и времени обусловлена тем, что введение источника $\hat{F}$ нарушает инвариантность равновесного статистического оператора по отношению к трансляциям в пространстве и времени, т.е. $[\hat{w},\hat{P}\,] \neq 0$, $[\hat{w},\hat{H}\,] \neq 0$, Равновесный статистический оператор $\hat{w}(Y,F(t)) \equiv \equiv \hat{w}(t)$ удовлетворяет уравнению фон-Неймана, вследствие чего

$$e^{-i\hat{H}\tau}\, \hat{w}(t)\, e^{i\hat{H}\tau} = \hat{w}(t+\tau) \qquad (3.6)$$

(для нормальных систем оператор $\hat{w}$ не зависит от времени t).

Рассмотрим трансляционно-инвариантные подгруппы H полной группы симметрии G и установим возможные равновесные структуры скалярного параметра порядка. Трансляционная инвариантность означает, что равновесный статистический оператор удовлетворяет соотношению симметрии

$$[\hat{w},\hat{P}_k] = 0 \,. \qquad (3.7)$$

Анализ трансляционно-инвариантных подгрупп ненарушенной симметрии равновесных состояний в соответствии с [7] осуществим исходя из соотношения

$$[\hat{w},\hat{T}] = 0 \,, \qquad (3.8)$$

где генератор ненарушенной симметрии $\hat{T}$ представляет собой линейную комбинацию интегралов движения (генераторы подгруппы H)

$$\hat{T} \equiv a_i\hat{L}_i + b_\alpha\hat{S}_\alpha + c\hat{N} \equiv \hat{T}(\xi) \qquad (3.9)$$

с некоторыми действительными числовыми параметрами $(a_i,b_\alpha,c\equiv\xi)$. Унитарные преобразования $U(\xi) = \exp\, i\hat{T}(\xi)$ образуют непрерывные подгруппы ненарушенных симметрий $U(\xi)U(\xi') = = U(\xi''(\xi,\xi'))$ равновесного состояния. Для трансляционно-инвариантных состояний равновесия параметр порядка и функция f в силу (3.4) не зависят от координаты:

$$\Delta(x) = \mathrm{Sp}\;\hat{w}\hat{\Delta}(x) = \Delta(0,Y_0,Y_4) \,, \quad f(x) = f(0) \,. \qquad (3.10)$$

Согласно (3.2), (3.4), (3.8), имеем $[\hat{w},\hat{S}_\alpha] = 0$, $[\hat{w},\hat{L}_i] = 0$. Поэтому $c = 0$, так как $\Delta(x) \neq 0$. Генератор ненарушенной симметрии приобретает вид

$$\hat{T} \equiv a_i\hat{L}_i + b_\alpha\hat{S}_\alpha \,. \qquad (3.11)$$

Отсюда найдем параметр порядка в состоянии равновесия для этого случая:

$$\langle\hat{\Delta}(x)\rangle = \eta(Y_0,Y_4)\,\exp\, i\varphi \,.$$

Здесь η — модуль параметра порядка и φ — сверхтекучая фаза.

Для дальнейшего уточнения симметрийных свойств состояния равновесия необходимо привлечение параметров порядка, не обладающих свойством инвариантности относительно поворотов в спиновом или конфигурационном пространствах. Проведение аналогичной процедуры классификации с этими параметрами порядка позволяет установить возможные состояния равновесия, различающиеся анизотропными свойствами, а также исследовать вопрос сосуществования нескольких не равных нулю параметров порядка. Однако здесь на этом останавливаться не будем.

Рассмотрим состояния равновесия, которые не обладают свойством трансляционной инвариантности (3.8). В вырожденной конденсированной среде в принципе могут существовать различные физические возможности нарушения такой инвариантности состояния равновесия. Это может произойти вследствие нарушения фазовой инвариантности (если сверхтекучий импульс не равен нулю). Возможны и другие механизмы нарушения трансляционной инвариантности. К ним относятся нарушения симметрии относительно поворотов спинов (вектор магнитной спирали отличен от нуля), нарушения симметрии относительно поворотов в конфигурационном пространстве (вектор холестерической спирали не равен нулю). Рассмотрим все указанные механизмы возникновения пространственно-неоднородных структур и увидим, к каким следствиям это приводит в равновесной структуре параметра порядка. Полагаем, что пространственная симметрия такого рода состояний равновесия может быть задана соотношением

$$[\hat{w},\hat{P}_k] = 0\ ,\quad \hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - p_k\hat{N} - q_{k\alpha}\hat{S}_\alpha - t_{kj}\hat{\mathcal{L}}_j\ , \tag{3.12}$$

где p_k, $q_{k\alpha}$, t_{kj} — некоторые действительные параметры. Генератор ненарушенной симметрии таких состояний теперь включает в себя оператор импульса

$$\hat{T} \equiv a_i\hat{\mathcal{L}}_i + b_\alpha\hat{S}_\alpha + c\hat{N} + d_i\hat{\mathcal{P}}_i\ . \tag{3.13}$$

Согласно (3.4), (3.12), приходим к уравнениям, которые связывают параметры генератора пространственной симметрии:

$$t_{kj}\varepsilon_{juv}p_v = 0\ ,\quad \nabla_k\Delta(x) = 2ip_k\Delta(x)\ . \tag{3.14}$$

Тождество (3.9) с учетом (3.4), (3.13) ведет к уравнению связи параметров генератора ненарушенной симметрии

$$a_i\varepsilon_{ikl}x_k 2ip_l\Delta(x) + 2ic\Delta(x) + d_i 2ip_i\Delta(x) = 0\ .$$

Откуда получаем соотношения

$$a_i\varepsilon_{ikl}p_l = 0\ ,\quad c + \mathbf{dp} = 0\ , \tag{3.15}$$

совместные с ненулевым равновесным значением параметра порядка $\Delta(x)$.

Используя тождество Якоби, установим дополнительные связи параметров, введенных соотношениями (3.12), (3.13). Для операторов $\hat{w}$, $\hat{T}$, $\hat{\mathbf{P}}$, принимая во внимание (3.12), (3.13), приходим к равенству $\mathrm{Sp}\,[\hat{w},[\hat{T},\hat{P}_k]]\,\hat{\Delta}(x) = 0$. Откуда, учитывая (3.15), имеем

$$p_i p_l t_{kl} - p^2 t_{ik} = 0\ . \tag{3.16}$$

Используя тождество Якоби, для операторов $\hat{w}$, $\hat{P}_i$, $\hat{P}_k$ получаем соотношение $\mathrm{Sp}\,[\hat{w},[\hat{P}_i,\hat{P}_k]]\,\hat{\Delta}(x) = 0$. Отсюда следует равенство

$$(t_{ij}t_{kl} - t_{il}t_{kj})p_l = 0\ . \tag{3.17}$$

Величину t_{kj} ищем в виде $t_{kj} = t\delta_{kj} + t_i\varepsilon_{ikj} + t^s_{kj}$, где t^s_{kj} — симметричный и бесшпуровый тензор. Умножая (3.16) на δ_{ik}, найдем $t = l_i l_j t^s_{ij}/2$, где $\mathbf{l} \equiv \mathbf{p}/p$. Умножая далее (3.16) на $\varepsilon_{ikj}l_j$, видим, что $\mathbf{t} \perp \mathbf{l}$. Умножая первое соотношение в (3.14) на $\varepsilon_{ku\lambda}$, получаем $t_i = l_i(\mathbf{lt})$, поэтому $\mathbf{t} = 0$. Параметризуем симметричную и бесшпуровую матрицу t^s_{ik} соотношением

$$t^s_{ik} = An_i n_k + Bm_i m_k - (A + B)\delta_{ik}/3\ , \tag{3.18}$$

где $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ — единичные и взаимно ортогональные векторы. Используя это представление и соотношение (3.14), легко видеть, что $\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$. Кроме того, в силу (3.16), (3.18) нетрудно показать, что $A = B$ и, следовательно, $t = -A/3$. Таким образом, матрица t_{ik} имеет вид

$$t_{ik} = Al_i l_k\ . \tag{3.19}$$

Формулы (3.14)–(3.17), (3.19) устанавливают допустимую структуру генераторов ненарушенной и пространственной симметрии квантовой жидкости с синглетным спариванием

$$\begin{aligned} \hat{T} &\equiv al_i\hat{\mathcal{L}}_i + b_\alpha\hat{S}_\alpha + d_i(\hat{\mathcal{P}}_i - pl_i\hat{N})\ , \\ \hat{P}_k &\equiv \hat{\mathcal{P}}_k - pl_k\hat{N} - q_{k\alpha}\hat{S}_\alpha - Al_k l_j\hat{\mathcal{L}}_j\ . \end{aligned} \tag{3.20}$$

Видим, что структура коммутационных соотношений для скалярного параметра порядка (3.4) и свойства симметрии (3.9), (3.12) оставляют достаточный произвол у параметров генераторов ненарушенной и пространственной симметрии. Сужение такого произвола связано либо с рассмотрением параметров порядка, затрагивающих спиновые или орбитальные степени свободы, либо одновременного, наряду с параметром порядка синглетного спаривания, существования параметров порядка, связанных с указанными выше степенями свободы.

В работе [20] рассмотрен частный случай $q_{k\alpha} = 0$ и $A = 0$. При этом генератор ненарушенной симметрии приобретет вид (3.11). В соответствии с идеей бозе-конденсации термодинамический параметр p_k имеет смысл сверхтекучего импульса. Условие пространственной симметрии

$$[\hat{w},\hat{P}_k] = 0\ ,\quad \hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - p_k\hat{N} \qquad (3.21)$$

означает, что макроскопически большое число частиц может находиться в состоянии с импульсом $\mathbf{p}$. Симметрия равновесного состояния относительно поворотов в конфигурационном и спиновом пространствах не нарушена и определяется формулами

$$[\hat{w},\hat{\mathcal{L}}_k] = 0,\quad [\hat{w},\hat{S}_\alpha] = 0\ . \qquad (3.22)$$

Заметим далее, что $[\hat{w}_\nu, Y_0\hat{\mathcal{H}} + Y_4\hat{N} + \nu\hat{F}] = 0$. Так как в силу канонических перестановочных соотношений оператор $[\hat{F},\hat{a}(x)]$ также является квазилокальным, а среднее квазилокального оператора предполагается конечным, то

$$\lim_{\nu\to 0}\ \lim_{V\to\infty}\ \nu\ \mathrm{Sp}\ \hat{w}_\nu\ [\hat{F},\hat{a}(x)] = 0\ .$$

Таким образом, приходим к условию стационарности:

$$[\hat{w}_\nu,\hat{H}] = 0\ ,\quad \hat{H} \equiv \hat{\mathcal{H}} + p_0\hat{N}\ ,\ p_0 \equiv Y_4/Y_0\ . \qquad (3.23)$$

Подгруппа ненарушенной симметрии сверхтекучего состояния ферми-жидкости с синглетным спариванием имеет вид

$$H = [SO(3)]_s \times [SO(3)]_{\mathcal{L}} \times [T(3)] \times [T(1)] \subset G\ . \qquad (3.24)$$

Здесь в качестве генераторов унитарных преобразований следует понимать операторы, определенные в смысле соотношений (3.21), (3.23).

Статистический оператор $\hat{w}$ удовлетворяет уравнению фон-Неймана (3.6). Используя соотношение стационарности (3.23), получаем

$$\hat{w}(1+\tau) = e^{ip_0\hat{N}\tau}\ \hat{w}(t)\ e^{-ip_0\hat{N}\tau}\ . \qquad (3.25)$$

Условия пространственной однородности (3.21) и стационарности (3.23) приводят к зависимости функции $f(x,t)$ от координаты и времени:

$$f(x,t) = \exp\ i2\varphi(x,t)\ ,\quad \varphi(x,t) = \mathbf{px} - p_0 t + \varphi(0,0)\ . \qquad (3.26)$$

Соотношения (3.21), (3.23) позволяют также найти зависимость от координаты и времени равновесного значения параметра порядка:

$$\Delta(x,t) = \mathrm{Sp}\ \hat{w}(t)\hat{\Delta}(x) = \eta(Y,\mathbf{p})\exp 2i\varphi(x,t)\ . \qquad (3.27)$$

4. Трансляционно-инвариантные состояния равновесия сверхтекучего ^{3}He

Параметр порядка сверхтекучей жидкости с триплетным спариванием содержит спиновый индекс $\alpha = 1, 2, 3$, соответствующий спиновому моменту количества движения $s = 1$, и векторный индекс $k = 1, 2, 3$, соответствующий, в силу принципа Паули, орбитальному моменту количества движения $l = 1$. Кроме того, триплетный оператор параметра порядка должен быть комплексным. Этот факт отражает то обстоятельство, что в рассматриваемом случае теряется симметрия относительно фазовых преобразований, благодаря образованию куперовских пар. В качестве оператора $\hat{\Delta}_{\alpha k}(x)$ удобно выбрать оператор [20]

$$\hat{\Delta}_{\alpha k}(x) \equiv \hat{\psi}(x)\sigma_2\sigma_\alpha\nabla_k\hat{\psi}(x) - \nabla_k\hat{\psi}(x)\sigma_2\sigma_\alpha\hat{\psi}(x)\ . \qquad (4.1)$$

Здесь σ_α — матрицы Паули. Матрицы $(\sigma_2\sigma_\alpha)_{\mu\nu} = (\sigma_2\sigma_\alpha)_{\nu\mu}$ симметричны по индексам μ и ν. В соответствии с этим определением и каноническими перестановочными соотношениями для ферми-операторов видим, что справедливы равенства

$$i\ [\hat{S}_\alpha,\hat{\Delta}_{\beta i}(x)] = -\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\Delta}_{\gamma i}(x),\quad [\hat{N},\hat{\Delta}_{\beta i}(x)] = -2\hat{\Delta}_{\beta i}(x),$$
$$i\ [\hat{\mathcal{P}}_k,\hat{\Delta}_{\alpha i}(x)] = -\nabla_k\hat{\Delta}_{\alpha i}(x), \qquad (4.2)$$
$$i\ [\hat{\mathcal{L}}_k,\hat{\Delta}_{\alpha i}(x)] = -\varepsilon_{kjl}x_j\nabla_l\hat{\Delta}_{\alpha i}(x) - \varepsilon_{kil}\hat{\Delta}_{\alpha l}(x)\ .$$

Следуя концепции квазисредних, равновесный статистический оператор рассматриваемой ферми-жидкости определяется равенством (3.2). Оператор, нарушающий симметрию состояния равновесия, представляет собой линейный функционал оператора параметра порядка

$$\hat{F} = \int d^3x\ (\hat{\Delta}_{\alpha k}(x) f_{k\alpha}(x,t) + \mathrm{h.c.})\ . \qquad (4.3)$$

Квазисреднее значение параметра порядка является функцией термодинамических параметров и функционалом величины $f_{k\alpha}(x,t)$:

$$\Delta_{\alpha k}(x,t) = \mathrm{Sp}\ \hat{w}(t)\hat{\Delta}_{\alpha k}(x) = \Delta_{\alpha k}(Y,f(x,t))\ . \qquad (4.4)$$

В случае обращения в нуль термодинамических сил $Y_i = 0$, $Y_\alpha = 0$, сопряженных к аддитивным интегралам движения $\hat{\mathcal{P}}_i$, $\hat{S}_\alpha$, свойства ненарушенной симметрии трансляционно-инвариантного ($[\hat{w},\hat{\mathcal{P}}_i] = 0$) статистического оператора Гиббса и источника $\hat{F}$ совпадают:

$$[\hat{w},\hat{T}] = 0 \ , \quad [\hat{F},\hat{T}] = 0 \ . \qquad (4.5)$$

В силу алгебры (4.2) и соотношений (3.8)–(3.10) получим равенство, определяющее равновесную структуру параметра порядка:

$$a_k \, \varepsilon_{kil}\Delta_{\beta l} + b_\alpha \, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma i} + 2ic\Delta_{\beta i} = 0 \ . \qquad (4.6)$$

Выясним, при каких условиях возможны ненулевые значения параметра порядка в состоянии равновесия. Рассмотрим подгруппу ненарушенной симметрии, генератором которой является оператор вида $\hat{T} \equiv a_i\hat{\mathcal{L}}_i + c\hat{N}$. Не ограничивая общности рассмотрения, полагаем $a_i^2 = 1$, $a_i = l_i$. Из условия симметрии (4.6) найдем $(a_i\varepsilon_{ikj} + 2ic\delta_{kj})\Delta_{\beta j} = 0$. Ненулевое решение для параметра порядка обеспечивается обращением в нуль детерминанта

$$\det |a_i\varepsilon_{ikj} + 2ic\delta_{kj}| = 2ic(a^2 - 4c^2) \equiv$$

$$\equiv F_3(\mathbf{a},c) = 2ic(1 - 4c^2) = 0 \ . \qquad (4.7)$$

Решения этого уравнения $c = 0, \pm 1/2$ приводят к оператору $\hat{T}$ вида

$$\hat{T} \equiv l_i\hat{\mathcal{L}}_i - \frac{m_l}{2}\hat{N} \ , \quad m_l = 0, \pm 1 \ . \qquad (4.8)$$

Рассмотрим другой частный случай оператора $\hat{T}$: $\hat{T} \equiv b_\alpha\hat{S}_\alpha + c\hat{N}$. Как и в предыдущем случае, полагаем $b_\alpha^2 = 1$, $b_\alpha = d_\alpha$. В соответствии с условием (4.6) и алгебраическими соотношениями (4.2) получим равенство $(b_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} + 2ic\delta_{\beta\gamma})\Delta_{\beta j} = 0$, отсюда найдем значение детерминанта

$$\det |b_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} + 2ic\delta_{\beta\gamma}| = 2ic(b^2 - 4c^2) \equiv$$

$$\equiv F_3(\mathbf{b},c) = 2ic(1 - 4c^2) \ .$$

Из условия обращения этого детерминанта в нуль получим значения величины $c = 0, \pm 1/2$ и, следовательно, в этом случае оператор $\hat{T}$ имеет вид

$$\hat{T} \equiv d_\alpha\hat{S}_\alpha - \frac{m_s}{2}\hat{N} \ , \quad m_s = 0, \pm 1 \ . \qquad (4.9)$$

Разъясним физический смысл условий ненарушенной симметрии, генерируемых операторами (4.8), (4.9) [20]. Для этого введем «волновую функцию» куперовской пары частиц системы:

$$\Psi_{\alpha_1\alpha_2}(x_1,x_2) = \mathrm{Sp}\ \hat{w}\hat{\psi}_{\alpha_1}(x_1)\hat{\psi}_{\alpha_2}(x_2) \ . \qquad (4.10)$$

В силу условий ненарушенной симметрии (3.9) имеем

$$\mathrm{Sp}\left[\hat{w},\mathbf{l}\hat{\boldsymbol{\mathcal{L}}} - \frac{m_l}{2}\hat{N}\right]\hat{\psi}_{\alpha_1}(x_1)\hat{\psi}_{\alpha_2}(x_2) = 0 \ ,$$

$$\mathrm{Sp}\left[\hat{w},\mathbf{d}\hat{\mathbf{S}} - \frac{m_s}{2}\hat{N}\right]\hat{\psi}_{\alpha_1}(x_1)\hat{\psi}_{\alpha_2}(x_2) = 0 \ . \qquad (4.11)$$

Так как

$$[\hat{\mathcal{L}}_i,\hat{\psi}_\alpha(x)] = -\hat{l}_i\hat{\psi}_\alpha(x) \ ,$$

$$[\hat{S}_i,\hat{\psi}_\alpha(x)] = -(\sigma_i)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta(x)/2 \ ,$$

то

$$\mathbf{l}(\hat{\mathbf{l}}^{(1)} + \hat{\mathbf{l}}^{(2)})\Psi_{\alpha_1\alpha_2}(x_1,x_2) = m_l\Psi_{\alpha_1\alpha_2}(x_1,x_2) \ ,$$

$$\mathbf{d}(\hat{\mathbf{s}}^{(1)} + \hat{\mathbf{s}}^{(2)})\Psi_{\alpha_1\alpha_2}(x_1,x_2) = m_s\Psi_{\alpha_1\alpha_2}(x_1,x_2) \ ,$$

где $\hat{l}_i^{(a)} = -i\varepsilon_{ikl}x_k^{(a)}\nabla_l^{(a)}$, $s_i^{(a)}$ $(a = 1, 2)$ — операторы момента количества движения и спина, действующие соответственно на первый и второй аргументы «волновой функции». Состояние статистического равновесия, для которого выполняются соотношения (4.11), соответствует состоянию, в котором проекция на направление $\mathbf{l}$ орбитального момента количества движения куперовской пары равна m_l , проекция спина куперовской пары на направление $\mathbf{d}$ равна m_s . Выбор оператора параметра порядка в виде вектора по спиновому и орбитальному индексам (4.1) соответствует тому, что спин и момент количества движения куперовской пары предполагаются равными единице. Из соотношений (4.11) следует, что функция $f_{\alpha k}$, входящая в источник $\hat{F}$, определяется формулой

$$f_{\alpha k} = d_\alpha(m_s)\xi_k(m_l) \ , \qquad (4.12)$$

где

$$d_\alpha(m_s) = \begin{cases} d_\alpha^+, \ m_s = -1 \\ d_\alpha^-, \ m_s = 1 \\ d_\alpha, \ m_s = 0 \end{cases} , \quad \xi_k(m_l) = \begin{cases} \xi_k^+, \ m_l = -1 \\ \xi_k^-, \ m_l = 1 \\ l_k, \ m_l = 0 \end{cases} . \qquad (4.13)$$

Здесь $\mathbf{d}^\pm = (\mathbf{e} \pm i\mathbf{f})/\sqrt{2}$, $\boldsymbol{\xi}^\pm = (\mathbf{m} \pm i\mathbf{n})/\sqrt{2}$ и $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}(\mathbf{e},\mathbf{f})$ — единичные вещественные взаимно ортогональные векторы, ортогональные вектору $\mathbf{l}(\mathbf{d})$.

Равновесная структура параметров порядка ^{3}He для различных фазовых состояний может быть представлена в едином виде:

$$\Delta_{\alpha k} = \sum_{m_s m_l} a_{m_s m_l} d_\alpha(m_s)\xi_k(m_l) \ .$$

Свойства симметрии состояния равновесия приводят к определенным связям амплитуд параметра порядка $a_{m_s m_l}$. Сверхтекучие состояния, генераторы ненарушенной симметрии которых имеют вид (4.8), (4.9), получили название инертных фаз [5]. В частности, для A-фазы квантовые числа куперовских пар принимают значения $m_l = \pm 1$, $m_s = 0$ [2]. Параметр порядка в равновесии имеет вид

$$\Delta_{\alpha k} = a_{0\mp} d_\alpha \xi_k^{\mp} \ , \qquad (4.14)$$

здесь и в дальнейшем принята декартова система координат, для которой векторы d_α и l_k обладают проекциями $d_\alpha = (0,0,1)$ и $l_k = (0,0,1)$. Полярной фазе ^{3}He отвечает состояние с квантовыми числами $m_l = 0$, $m_s = 0$ [4]. Параметр порядка в этом случае принимает форму

$$\Delta_{\alpha k} = a_{00} d_\alpha l_k \ . \qquad (4.15)$$

Значения квантовых чисел $m_l = 0$, $m_s = \pm 1$ соответствуют β-фазе [5]. Для этого состояния находим параметр порядка

$$\Delta_{\alpha k} = a_{\mp 0} d_\alpha^{\mp} l_k \ . \qquad (4.16)$$

Случай $m_l = \pm 1$, $m_s = \pm 1$ соответствует A_1-фазе [3]. Параметр порядка в равновесии имеет вид

$$\Delta_{\alpha k} = a_{\mp\mp} d_\alpha^{\mp} \xi_k^{\mp} \ . \qquad (4.17)$$

Равновесная структура параметров порядка ^{3}He (4.14)–(4.17) дает четыре анизотропных фазовых состояния, каждое из которых характеризуется одной независимой амплитудой.

Для множества возможных анизотропных состояний сверхтекучего ^{3}He не обязательно одновременное выполнение соотношений (4.11) с генераторами (4.8), (4.9). Еще четыре анизотропных состояния равновесия возникают в случаях, когда имеет место условие ненарушенной симметрии только с одним из этих генераторов. Если справедливо соотношение (3.9) с генератором (4.8), то при значении квантового числа $m_l = 0$ приходим к состоянию с параметром порядка

$$\Delta_{\alpha k} = V_{\alpha 0} l_k \ , \qquad (4.18)$$

где спиновая его составляющая

$$V_{\alpha 0} = A e_\alpha + B f_\alpha + C d_\alpha \equiv \sum_{m_s} a_{m_s 0} d_\alpha(m_s)$$

представляет собой произвольный комплексный вектор. Для значения $m_l = \pm 1$ параметр порядка в соответствии с (3.9) имеет вид

$$\Delta_{\alpha k} = V_{\alpha\mp} \xi_k^{\mp} \ . \qquad (4.19)$$

Здесь $\quad V_{\alpha\mp} = A_\mp e_\alpha + B_\mp f_\alpha + C_\mp d_\alpha \equiv \sum_{m_s} a_{m_s \mp} d_\alpha(m_s)$

— спиновая структура параметра порядка.

Соотношение ненарушенной симметрии (3.9) с генератором (4.9) при значении $m_s = 0$ приводит к состоянию равновесия с параметром порядка

$$\Delta_{\alpha k} = d_\alpha \Psi_{0k} \ , \qquad (4.20)$$

где его пространственная часть

$$\Psi_{0k} = A\, m_k + B n_k + C\, l_k \equiv \sum_{m_l} a_{0 m_l} \xi_k(m_l)$$

— произвольный комплексный вектор. Аналогично для значения $m_s = \pm 1$ параметр порядка в равновесии имеет вид

$$\Delta_{\alpha k} = d_\alpha^{\mp} \Psi_{\mp k} \ , \qquad (4.21)$$

где $\quad \Psi_{\mp k} = A_\mp m_k + B_\mp n_k + C_\mp l_k \equiv \sum_{m_l} a_{\mp m_l} \xi(m_l) \quad$ —

соответствующая пространственная структура параметра порядка. Представленные четыре анизотропных состояния (4.18)–(4.21) по сравнению с состояниями (4.14)–(4.17) обладают меньшей ненарушенной симметрией и поэтому содержат больший произвол в структуре параметра порядка. Каждое из этих состояний характеризуется тремя независимыми амплитудами.

Рассмотрим теперь генератор ненарушенной симметрии (3.10) и найдем оставшиеся анизотропные состояния. Для этого выпишем соответствующий детерминант матрицы размером 9×9:

$$\det \left| a_i \varepsilon_{ikj} \delta_{\gamma\beta} + b_\alpha \delta_{kj} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} + 2ic\delta_{kj}\delta_{\beta\gamma} \right| = F_9(\mathbf{a},\mathbf{b},c) \ .$$

Не нарушая общности рассмотрения и в силу инвариантности детерминанта относительно поворотов в спиновом и конфигурационном пространствах, систему координат выбираем так, чтобы в спиновом пространстве $\mathbf{b} \equiv (0,0,b)$ и в координатном $\mathbf{a} \equiv (0,0,a)$. При этом вычисление детерминанта матрицы $F_9(a,b,c)$ сводится к вычислению определителей третьего и шестого порядков:

$$F_9(a,b,c) = F_3(a,c)F_6(a,b,c) \ . \qquad (4.22)$$

Здесь матрица $\hat{F}_6(a,b,c)$ имеет блочный вид:

$$\hat{F}_6(a,b,c) = \begin{vmatrix} \hat{F}_3(a,c) & b\hat{I}_3 \\ -b\hat{I}_3 & \hat{F}_3(a,c) \end{vmatrix} ,$$

где $\hat{I}_3$ — единичная матрица размером 3×3 и матрица $\hat{F}_3(a,c)$ определяется равенством (4.7). Учитывая явный вид матрицы (4.7), видим, что справедливо соотношение

$$F_6(a,b,c) = F_3(a,c{+}b/2)F_3(a,c{-}b/2) \ . \quad (4.23)$$

Согласно (4.22), (4.23), получаем следующее выражение для детерминанта $F_9(a,b,c)$:

$$F_9(a,b,c) = F_3(a,c)F_3(a,c{+}b/2)F_3(a,c{-}b/2) = 2ic \times$$

$$\times (a^2 - 4c^2)(b^2 - 4c^2)[(a-b)^2 - 4c^2]\,[(a+b)^2 - 4c^2] \ . \qquad (4.24)$$

Система линейных и однородных уравнений (4.6) имеет ненулевое решение, если определитель (4.24) обращается в нуль. Обращение в нуль каждого из пяти сомножителей в отдельности приводит к уже рассмотренным случаям (4.14)–(4.21). Их сочетание позволяет получить еще четыре состояния.

1. При обращении в нуль 1- и 4-го или 1- и 5-го сомножителей условие ненарушенной симметрии (3.9) приобретает вид $[\hat{w}, l_i\hat{L}_i \pm d_\alpha \hat{S}_\alpha] = 0$. В этом случае возникает состояние ζ-фазы [5] с параметром порядка

$$\Delta_{\alpha k} = \begin{vmatrix} A & B & 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} . \qquad (4.25)$$

2. Сочетание случаев $c = \pm\, b/2$ и $c = \pm\, a/2$ описывает ε-состояние [5]. Генератор ненарушенной симметрии $\hat{T} = l_i\hat{L}_i + d_\alpha \hat{S}_\alpha \pm \hat{N}/2$ приводит к параметру порядка

$$\Delta_{\alpha k} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & \pm\, iA \\ B & \pm\, iB & 0 \end{vmatrix} . \qquad (4.26)$$

3. Решение $c = \pm\, a/2$ в сочетании с $c = \pm\,(a-b)/2$ или $c = \pm\,(a+b)/2$ (чередование знаков произвольное) приводит к состоянию равновесия с генератором ненарушенной симметрии $\hat{T} = l_i\hat{L}_i + 2d_\alpha \hat{S}_\alpha \pm \hat{N}/2$ и структуре параметра порядка [7,8]:

$$\Delta_{\alpha k} = \begin{vmatrix} A & -iA & 0 \\ -iA & -A & 0 \\ B & iB & 0 \end{vmatrix} . \qquad (4.27)$$

4. Сочетание значений $c = \pm\, b/2$ с $c = \pm\,(a+b)/2$ или $c = \pm(a-b)/2$ позволяет получить генератор ненарушенной симметрии вида $\hat{T} = 2l_i\hat{L}_i + d_\alpha \hat{S}_\alpha \pm \hat{N}/2$ и параметр порядка [7,8]

$$\Delta_{\alpha k} = \begin{vmatrix} A & -iA & B \\ -iA & -A & iB \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \qquad (4.28)$$

Представленные формулы (4.14)–(4.21), (4.25)–(4.28) описывают 12 анизотропных фаз сверхтекучего ^{3}He, соответствующих трансляционно-инвариантным состояниям.

Рассмотрим теперь состояние, соответствующее изотропной сверхтекучей фазе, которое возникает в результате обращения детерминанта (4.24) в нуль при значениях параметров $c = 0$, $a = b$. Введем в рассмотрение ортогональную матрицу поворота, которая описывает разворот пространственной системы координат относительно спиновой равенством $b_\alpha = a_i R_{i\alpha}$. Учитывая (3.9), получаем $a_i[\hat{w}, \hat{L}_i + R_{i\alpha}\hat{S}_\alpha] = 0$. Условие изотропии означает справедливость последнего соотношения для произвольных направлений вектора **a**. Поэтому свойство симметрии состояния имеет вид [20]

$$[\hat{w}, \hat{L}_i + R_{i\alpha}\hat{S}_\alpha] = 0 \ . \qquad (4.29)$$

Это состояние описывает B-фазу сверхтекучего ^{3}He. Для состояний с симметрией (4.29) среднее значение параметра порядка выглядит так:

$$\Delta_{\alpha k} = a_B R_{k\alpha} \ , \qquad (4.30)$$

a_B — амплитуда параметра порядка.

5. Неоднородные состояния равновесия сверхтекучих фаз ^{3}He

Как и при решении вопроса о классификации трансляционно-инвариантных состояний, целесообразно вначале рассмотреть подгруппы пространственной симметрии, генератор которых состоит из двух операторов. Пусть

$$\hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - p_k\hat{N} \ . \tag{5.1}$$

Согласно этому определению и алгебре (4.2), для параметра порядка получаем уравнение

$$\nabla_i\Delta_{\beta k}(x) = 2ip_i\Delta_{\beta k}(x) \ , \tag{5.2}$$

решение которого имеет вид

$$\Delta_{\beta k}(x) = e^{2i\varphi(\mathbf{x})}\underline{\Delta}_{\beta k}(0) \ , \quad \varphi(\mathbf{x}) = \varphi + \mathbf{px} \ , \tag{5.3}$$

здесь $\underline{\Delta}_{\beta k}(0)$ — однородная часть параметра порядка, которая не зависит от координаты. В силу явного вида генератора ненарушенной симметрии (3.13) и уравнения (5.2) справедливы равенства

$$a_k\varepsilon_{kil}\Delta_{\beta l} + b_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma i} + a_i\varepsilon_{imn}x_m p_n\Delta_{\beta k}(x) + 2i\underline{c}\Delta_{\beta i} = 0 \ ,$$

где $\underline{c} \equiv c + \mathbf{pd}$. Из требования зануления линейного по координате слагаемого в этом уравнении следуют соотношения, определяющие равновесную структуру параметра порядка:

$$a_k\varepsilon_{kil}\underline{\Delta}_{\beta l} + b_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\underline{\Delta}_{\gamma i} + 2i\underline{c}\underline{\Delta}_{\beta i} = 0 \ , \quad \mathbf{a}\times\mathbf{p} = 0 \ . \tag{5.4}$$

Видим, что для однородной части параметра порядка $\underline{\Delta}_{\beta k}(0)$ (5.3) справедлива процедура классификации, изложенная выше. В работах [13–15] исходя из модельного гамильтониана изучен вопрос о стабильности неоднородных конфигураций в A-^{3}He и показана устойчивость конфигурации при $\mathbf{a}\parallel\mathbf{p}$.

Рассмотрим случай, когда оператор пространственной симметрии имеет вид

$$\hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - q_{k\alpha}\hat{S}_\alpha \ . \tag{5.5}$$

Это условие приводит к уравнению для параметра порядка

$$\nabla_i\Delta_{\beta k}(x) = q_{i\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma k}(x) \ . \tag{5.6}$$

Тождество Якоби для операторов $\hat{w}$, $\hat{P}_i$, $\hat{P}_k$ позволяет получить соотношение

$$\mathrm{Sp}\,[\hat{w},[\hat{P}_i,\hat{P}_k]]\,\hat{\Delta}_{\beta l}(x) =$$
$$= (q_{i\beta}q_{k\alpha} - q_{i\alpha}q_{i\beta})\Delta_{\alpha l}(x) = 0 \ ,$$

откуда следует ограничение на структуру параметра $q_{i\alpha}$:

$$q_{i\alpha} = q_i n_\alpha \ . \tag{5.7}$$

Здесь q_k — вектор магнитной спирали, n_α — ось анизотропии в спиновом пространстве. Решение уравнения (5.6) с учетом (5.7) дает явную структуру параметра порядка для этого состояния:

$$\Delta_{\beta k}(x) = a_{\beta\gamma}(\mathbf{n}\theta(x))\underline{\Delta}_{\gamma k}(0) \ , \quad \theta(x) = \theta + \mathbf{qx} \ , \tag{5.8}$$

где $a_{\beta\gamma}$ — ортогональная матрица поворота в спиновом пространстве. Условие ненарушенной симметрии (3.9) с учетом вида генератора пространственной симметрии (5.5) и уравнения (5.6) приводит к равенству

$$a_k\varepsilon_{kil}\Delta_{\beta l}(x) + \underline{b}_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma i}(x) +$$
$$+ a_j\varepsilon_{jmn}x_m q_n n_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma i}(x) + 2ic\Delta_{\beta i}(x) = 0 \ , \tag{5.9}$$

где $\underline{b}_\alpha \equiv b_\alpha + \mathbf{dq}n_\alpha$. Отсюда, принимая во внимание требование отсутствия линейного по координате слагаемого, получаем уравнения

$$a_k\varepsilon_{kil}\,\Delta_{\beta l}(x) + \underline{b}_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\Delta_{\gamma i}(x) + 2ic\Delta_{\beta i}(x) = 0 \ ,$$
$$a_j\varepsilon_{jmn}q_{il} = 0 \ ,$$

которые задают равновесную структуру параметра порядка. Учитывая формулу (5.8), нетрудно получить уравнение только для однородной части параметра порядка, которая не зависит от координат:

$$a_k\varepsilon_{kil}\,\underline{\Delta}_{\beta l} + \underline{b}_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\underline{\Delta}_{\gamma i} + 2ic\,\underline{\Delta}_{\beta i} = 0 \ ,$$

при условии, что $\mathbf{b}\times\mathbf{n} = 0$. В результате анализ возможных состояний для однородной части параметра порядка $\underline{\Delta}_{\beta k}$ сводится к уже рассмотренному случаю.

Исследуем случай, когда пространственная симметрия определяется равенством

$$\hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - t_{kj}\hat{\mathcal{L}}_j \ . \tag{5.10}$$

Условие симметрии (3.12) и алгебра (4.2) приводят к системе уравнений

$$\nabla_i\Delta_{\beta k}(x) = t_{ij}\varepsilon_{jkl}\Delta_{\beta l}(x) \ , \quad t_{ij}\varepsilon_{juv}\nabla_v\Delta_{\beta k}(x) = 0 \ , \tag{5.11}$$

откуда получим условие на допустимую структуру параметра t_{ij}:

$$t_{ij}\varepsilon_{juv}t_{v\lambda}\varepsilon_{\lambda kl} = 0 \ . \qquad (5.12)$$

Величину t_{kj} будем искать в виде $t_{kj} = t\delta_{kj} + t_i\varepsilon_{ikj} + t^s_{kj}$, где t^s_{kj} — симметричный и бесшпуровый тензор. Подставим это выражение в соотношение (5.12) и учтем, что это соотношение справедливо при любых значениях индексов. Поэтому, сворачивая его с тензором $(\delta_{ki}\delta_{lu} - \delta_{ku}\delta_{li})$, получаем уравнения связи на параметры матрицы t_{kj} :

$$6t^2 - t_n^2 - t^s_{i\lambda}\, t^s_{i\lambda} = 0 \ . \qquad (5.13)$$

Сворачивая соотношения (5.12) с тензором ε_{klu} , приходим к другому уравнению:

$$t_j(t\delta_{ij} + t^s_{ij}) = 0 \ . \qquad (5.14)$$

Следствием уравнений (5.13), (5.14) будет равенство $t_j = 0$. Обратимся теперь к тождеству Якоби для операторов $\hat{w}$, $\hat{P}_i$, $\hat{P}_k$. Заметим, что $[\hat{P}_i,\hat{P}_k] \neq 0$. В соответствии с явным видом (5.10) найдем условия на структуру элементов матрицы t_{ij} :

$$t_{ii}t^2_{kl} - t_{ik}\, t_{kl}\, t_{li} = 0 \ , \quad t_{ik}\, t_{ki} - t_{ii}\, t_{kk} = 0 \ . \qquad (5.15)$$

Нетрудно получить явный вид матрицы t_{ij} , удовлетворяющей (5.13)–(5.15):

$$t_{ik} = tl_i\, l_k \ . \qquad (5.16)$$

Пространственно-неоднородная часть параметра порядка может быть найдена из уравнения (5.11) с учетом (5.16). Решение имеет вид

$$\Delta_{\gamma i}(x) = a_{ik}(\mathbf{l}\psi(x))\underline{\Delta}_{\gamma k}(0) \ , \qquad (5.17)$$

здесь $a_{ik}(\mathbf{l}\psi(x))$ — ортогональная матрица поворота вокруг оси $\mathbf{l}$ в конфигурационном пространстве на угол $\psi(x) = \psi + t\mathbf{lx}$. Это решение описывает геликоидальную структуру. Величина $2\pi t^{-1}$ определяет шаг геликоида, направление которого задано единичным вектором $\mathbf{l}$. Условие ненарушенной симметрии с учетом (5.10), (5.17) приводит к уравнению

$$\underline{a}_k(\varepsilon_{kil}\,\Delta_{\beta l} + \varepsilon_{iuv}x_u\nabla_v\Delta_{\beta l}) + b_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\Delta_{\gamma i} + 2ic\Delta_{\beta i} = 0, \qquad (5.18)$$

где $\underline{a}_i \equiv a_i + tl_i\mathbf{ld}$. Отсюда получим соотношение $\mathbf{a} \times \mathbf{l} = 0$, ограничивающее структуру параметра порядка, которое возникает из требования отсутствия линейного слагаемого по координате в уравнении (5.18), и уравнение для однородной части параметра порядка

$$\underline{a}_k\varepsilon_{kil}\,\underline{\Delta}_{\beta l} + b_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\underline{\Delta}_{\gamma i} + 2ic\underline{\Delta}_{\beta i} = 0 \ .$$

Общая структура оператора пространственной симметрии, согласно (5.1), (5.5), (5.10), имеет вид

$$\hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - p_k\hat{N} - q_kn_\alpha\hat{S}_\alpha - tl_jl_k\hat{\mathcal{L}}_j \ . \qquad (5.19)$$

Условие пространственной симметрии состояния равновесия рассматриваемой ферми-жидкости следует дополнить условием ненарушенной симметрии состояния равновесия (3.9), где теперь генератор $\hat{T}$ определяется равенством (3.13). В соответствии с этими условиями симметрии запишем равенства

$$i\ \mathrm{Sp}\ [\hat{w},\hat{T}]\ \hat{\Delta}_{\beta k}(x) = 0 \ , \quad i\ \mathrm{Sp}\ [\hat{w},\hat{P}_i]\ \hat{\Delta}_{\beta k}(x) = 0 \ .$$

Отсюда получаем уравнения, устанавливающие равновесную структуру параметра порядка, и найдем ограничения на параметры a_i , b_α , c, d_i генератора $\hat{T}$ и параметры p_k , q_k , n_α , t, l_k оператора пространственной симметрии $\hat{P}_k$:

$$\underline{a}_i[\varepsilon_{ikl}\Delta_{\beta l}(x) + \varepsilon_{iuv}x_u\nabla_v\Delta_{\beta l}(x)] +$$
$$+ \underline{b}_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma l}(x) + 2i\underline{c}\Delta_{\beta k}(x) = 0 \ ,$$
$$\nabla_i\Delta_{\beta k}(x) = 2ip_i\Delta_{\beta k}(x) + q_in_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\Delta_{\gamma k}(x) +$$
$$+ tl_il_j\ [\varepsilon_{jkm}\Delta_{\beta m}(x) + \varepsilon_{juv}x_u\nabla_v\Delta_{\beta m}(x)] \ . \qquad (5.20)$$

Параметры $\underline{a}_i$, $\underline{b}_\alpha$, $\underline{c}$ связаны с величинами a_i , b_α , c соотношениями

$$\underline{a}_i \equiv a_i + tl_i\mathbf{ld} \ , \quad \underline{b}_\alpha \equiv b_\alpha + \mathbf{dq}n_\alpha \ , \quad \underline{c} \equiv c + \mathbf{pd}.$$

Требование отсутствия линейных по координате слагаемых в обоих уравнениях (5.20) приводит к соотношениям

$$l_j\varepsilon_{juv}[2ip_v\Delta_{\beta k}(x) + q_vn_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\Delta_{\gamma k}(x)] = 0 \ ,$$
$$\underline{a}_j\varepsilon_{juv}\,[2ip_v\Delta_{\beta k}(x)+q_vn_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma k}(x)+$$
$$+ tl_vl_m\varepsilon_{mkn}\Delta_{\beta n}(x)] = 0 \ . \qquad (5.21)$$

которые позволяют связать направления векторов $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{l}$ между собой и с вектором $\underline{\mathbf{a}}$. Уравнения (5.20), (5.21) служат основой анализа классификации равновесных состояний сверхтекучих фаз

^{3}He с генератором пространственной симметрии (5.19). Решение второго уравнения в (5.20) имеет вид

$$\Delta_{\beta i}(x) = e^{2i\varphi(x)} a_{\beta\gamma}(\mathbf{n}\,\theta(x)) a_{ik}(\mathbf{l}\psi(x)) \underline{\Delta}_{\gamma k}(0) \ . \quad (5.22)$$

Соотношения (5.21) выполняются, если векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{l}$, $\underline{\mathbf{a}}$ коллинеарны. В этом случае первое уравнение (5.20) позволяет свести уравнение для однородной части параметра порядка $\underline{\Delta}_{\gamma k}(0)$ (5.22), при выполнении равенства $\mathbf{b} \times \mathbf{n} = 0$, к стандартному виду:

$$\underline{a}_i \varepsilon_{ikl} \underline{\Delta}_{\beta l}(0) + \underline{b}_{\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \underline{\Delta}_{\gamma l}(0) + 2i\underline{c}\, \underline{\Delta}_{\beta k}(0) = 0 \ .$$

Изучим условие стационарности сверхтекучих состояний ^{3}He. Для равновесного оператора Гиббса справедливо соотношение $[\hat{w},\hat{H}] = 0$ (см. (3.23)). Уравнение фон-Неймана совместно с условием стационарности позволяет определить временную зависимость равновесных средних. В частности, для параметра порядка получим

$$\mathrm{Sp}\ \hat{w}(t)\hat{\Delta}_{\alpha k}(x) = \mathrm{Sp}\ \hat{w}(0)\, e^{i\hat{N}p_0 t}\hat{\Delta}_{\alpha k}(x)\, e^{-i\hat{N}p_0 t} =$$
$$= e^{2ip_0 t}\ \mathrm{Sp}\ \hat{w}(0)\hat{\Delta}_{\alpha k}(x) \ . \quad (5.23)$$

Соотношения (5.22) и (5.23) определяют пространственно-временную зависимость параметра порядка в состоянии равновесия.

Заключение

В работе на основе концепции квазисредних проведено обобщение классификации состояний равновесия квантовых жидкостей со скалярным и тензорным параметрами порядка, учитывающее возможность возникновения неоднородных равновесных структур. Сформулированы условия ненарушенной и пространственной симметрии. Показана возможность существования неоднородных пространственных структур типа магнитной спирали и геликоидального жидкокристаллического упорядочения в квантовых жидкостях.

1. R. Balian and N. R. Werthamer, *Phys. Rev.* **131**, 1553 (1963).
2. P. W. Anderson and P. Morel, *Phys. Rev.* **123**, 1911 (1961).
3. V. Ambegaokar and N. D. Mermin, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 81 (1973).
4. Z. M. Galasiewicz, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **9**, 605 (1961).
5. G. Barton and M. Moore, *J. Phys.* **C7**, 4220 (1974).
6. C. M. Varma and N. R. Werthamer, *Phys. Rev.* **A9**, 1465 (1974).
7. V. P. Mineev, *Soviet Scientific Reviews, Physics Reviews*, v. 2, 173 (1980).
8. F. W. Nijhoff, H. W. Capel, and A. den Breems, *Physica* **130**, 375 (1985).
9. C. Bruder and D. Vollhardt, *Phys. Rev.* **B34**, 131 (1986).
10. A. M. J. Schakel and F. A. Bais, *J. Phys.: Conden. Matter* **1**, 1743 (1989).
11. D. Vollhardt and P. Wolfle, *The Superfluid Phases of Helium 3*, F. Taylor (ed.), Francis, London–New York–Philadelphia (1990).
12. Г. Е. Воловик, М. В. Хазан, *ЖЭТФ* **85**, 948 (1983).
13. A. Fetter, *Phys. Rev.* **B20**, 303 (1979).
14. Y. R. Lin-Liu, D. Vollhardt, and K. Maki, *Phys. Rev.* **B20**, 159 (1979).
15. A. Fetter, *Phys. Rev.* **B23**, 218 (1981).
16. J. N. Kotzev and D. V. Shopova, *Phys. Lett.* **A187**, 264 (1994).
17. V. M. Ruutu, J. Kopu, M. Krusius, U. Parts, B. Placais, E. V. Thuneberg, and W. Xu, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 5058 (1997).
18. J. Kopu, R. Hanninen, and E. V. Thuneberg, *Phys. Rev.* **B62**, 12374 (2000).
19. Н. Н. Боголюбов, *Препринт Д-781*, Дубна (1961).
20. Н. Н. Боголюбов (мл.), М. Ю. Ковалевский, А. М. Курбатов, С. В. Пелетминский, А. Н. Тарасов, *УФН* **154**, 585 (1989).
21. М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, *ТМФ* **100**, 59 (1994).
22. М. Ю. Ковалевский, А. А. Рожков, *ФНТ* **21**, 1138 (1995).
23. М. Ю. Ковалевский, А. А. Рожков, *ТМФ* **127**, 317 (2001).

On classification of equilibrium superfluid states with scalar and tensor order parameters

M. Yu. Kovalevsky, S. V. Peletminsky, and N. N. Chekanova

The equilibrium superfluid states with scalar and tensor order parameters are classified on the basis of the quasi-average concept. The unbroken symmetry condition is generalized to inhomogeneous equilibrium states. Admissible conditions for spatial symmetry are derived in terms of integrals of motion. The relation between these symmetry conditions and the helicoidal structure of vectors of spin and spatial anisotropies is determined. At certain restrictions the equilibrium structure of the order parameter is shown to be represented as the product of a homogeneous and a space coordinates-dependent inhomogeneous parts of the order parameter.