

Гидродинамические флуктуации в газе квазичастиц

В. Ф. Алексин

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина*

В. Д. Ходусов

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: khodusov@pem.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 10 февраля 2000 г., после переработки 8 ноября 2000 г.

Рассмотрены гидродинамические флуктуации в слабонеидеальном газе бозе-квазичастиц с несохраняющимся числом квазичастиц. С использованием флуктуационно-диссипативной теоремы найдены спектральные плотности корреляций флуктуаций для основных величин, характеризующих газ квазичастиц, которые выражаются через кинетические коэффициенты. В области существования вторичных волн в газе квазичастиц эти спектральные плотности имеют лоренцеву форму. Для некоторых чистых монокристаллов кубической сингонии приведены температурные зависимости резонансной спектральной плотности флуктуации энергии фононного газа, которые дают возможность определить температурный интервал существования волн второго звука. Для NaF этот интервал совпадает с областью температур, в которой экспериментально наблюдался второй звук.

Розглянуто гідродинамічні флуктуації в слабонеідеальному газі бозе-квазічастинок з незберігаючимся числом квазічастинок. З використанням флуктуаційно-дисипативної теореми знайдено спектральні густини кореляцій флуктуацій для основних величин, які характеризують газ квазічастинок, котрі визначаються через кінетичні коефіцієнти. В області існування вторинних хвиль в газі квазічастинок ці спектральні густини мають лоренцеву форму. Для деяких чистих монокристалів кубічної сингонії надано температурні залежності резонансної спектральної густини флуктуації енергії фононного газу, які дають можливість визначити температурний інтервал існування хвиль другого звуку. Для NaF цей інтервал співпадає з областю температур, в якій експериментально спостерігався другий звук.

PACS: 05.40.+j, 63.20.-e

Введение

Для исследования флуктуаций в газе бозе-квазичастиц можно использовать различные подходы: микроскопический, основанный на применении функции Грина [1–5], и макроскопический, использующий уравнения газодинамики квазичастиц и флуктуационно-диссипативную теорему (ФДТ). Макроскопический подход впервые был предложен в работах [6,7] для изучения флуктуации в жидкостях, а в [8] применялся для исследования флуктуаций в газе квазичастиц квантовых жидкостей. В работах [1–5] рассмотрены флуктуации в газе фононов в диэлектриках с использова-

нием функции Грина и гамильтониана для одной фононной ветви колебаний. При этом получены довольно громоздкие выражения для спектральных плотностей корреляторов флуктуаций, которые достаточно сложно анализировать в различных предельных случаях, в частности в гидродинамическом или газодинамическом пределах. Гидродинамический предел представляет наибольший интерес при изучении флуктуаций вследствие наличия резонансного эффекта в области существования волн второго звука (ВВЗ). Естественно и значительно проще исследовать флуктуации в этой области, основываясь на уравнениях фононной гидродинамики.

В обзоре [9] рассмотрена газодинамика квазичастиц без учета флуктуаций. Газодинамика квазичастиц существенно отличается от газодинамики частиц, описываемой уравнением Навье–Стокса [10], тем, что число квазичастиц в процессах взаимодействия может не сохраняться. Кроме того, в уравнения газодинамики квазичастиц входит сила внешнего трения, обусловленная взаимодействием квазичастиц с внешней средой (процессы переброса, рассеяние на примесях и т.д.). При выполнении определенных условий эти уравнения описывают слабозатухающие вторичные волны (ВВ) типа ВВЗ, которые, по сути, являются температурными или энтропийными волнами; возможно существование связанных волн с участием ВВ. Все эти различия сказываются на поведении флуктуаций в газе квазичастиц.

В представленной работе изучаются гидродинамические флуктуации в газе бозе-квазичастиц (фононов, магнонов, плазмонов и т.п.). При этом используется метод, предложенный в [6,7] для изучения гидродинамических флуктуаций в жидкостях, основанный на введении сторонних случайных источников в диссипативные потоки и использовании ФДТ [11–13].

Получены спектральные плотности гидродинамических флуктуаций, которые выражаются через кинетические коэффициенты для газа квазичастиц и имеют для некоторых из них лоренцеву форму в области существования ВВ, в частности, спектральная плотность квадрата температуры и плотности энергии флуктуаций квазичастиц. Такое поведение спектральных плотностей может проявиться при изучении эволюции тепловых импульсов и рассеяния света в газе квазичастиц, приводя к появлению резонансных спутных пиков, обусловленных ВВ. Обнаружение этих пиков в экспериментах по рассеянию света в различных газах квазичастиц может служить свидетельством существования ВВ.

В фононной газодинамике в области низких температур ВВЗ в твердых телах были обнаружены экспериментально при изучении эволюции тепловых импульсов в чистых монокристаллах ^4He [14], NaF [15,16] и сапфира [17]. Предложенная в [9] модель приведенного изотропного кристалла позволяет определить численные значения кинетических коэффициентов фононной газодинамики конкретных кристаллов и рассчитать значения спектральных плотностей корреляций флуктуаций для конкретных кристаллов, в отличие от качественных значений спектральной плотности, получаемых в микроскопическом подходе в гидродинамическом пределе с применением

функций Грина и гамильтониана с однофононной ветвью колебаний. В заключении приводятся температурные зависимости резонансной спектральной плотности флуктуации энергии для некоторых чистых монокристаллов, принадлежащих кубической сингонии, которые дают возможность установить температурную область («окно») существования второго звука и определить, для какого из этих кристаллов спектральная плотность имеет максимальную величину. Для кристаллов NaF эта температурная область совпадает с областью температур, в которой экспериментально был обнаружен второй звук [15,16].

Гидродинамические флуктуации в газе квазичастиц с несохраняющимся числом квазичастиц

Для описания флуктуаций в газодинамике квазичастиц будем исходить из уравнений переноса квазичастиц [9], вводя в них сторонние источники, как это делается в теории гидродинамических флуктуаций [6,7].

Система линейных уравнений газодинамики со сторонними источниками u и y_4 для дрейфовой скорости квазичастиц u и относительной температуры $\theta = (T - T_0)/T_0$ в случае, когда число квазичастиц при их взаимодействии не сохраняется, имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{ij} \dot{u}_j + S_0 T_0 \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \tilde{\eta}_{ijlm} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_m \partial x_j} + r_{ij} u_j = y_i; \\ C_0 \dot{\theta} + S_0 \operatorname{div} u - \tilde{\kappa}_{ij} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} = y_4, \end{aligned} \quad (1)$$

где T_0 — равновесная температура; $\tilde{\rho}_{ij}$ — тензор размерностью плотности массы, характеризующий инерцию квазичастиц; C_0 , S_0 — равновесные плотности теплоемкости и энтропии; $\tilde{\eta}_{ijlm}$, $\tilde{\kappa}_{ij}$ — тензоры вязкости и гидродинамической теплопроводности; r_{ij} — симметричный тензор внешнего трения в газе квазичастиц. Значения этих величин в кинетической теории квазичастиц приведены в [9].

Общее решение системы (1) представляется в виде суммы двух решений — регулярного, являющегося решением соответствующей однородной системы уравнений с граничными условиями, и нерегулярного, являющегося решением неоднородной системы уравнений и представляющего собой линейные функционалы относительно сторонних источников u и y_4 .

При исследовании флуктуаций будем рассматривать неограниченную пространственно-одно-родную среду, а сторонние источники считать случайными. В этом случае регулярные решения будут нулевыми, а нерегулярные — случайными величинами, средние значение которых равны нулю. Флуктуации этих величин будут определяться следующими пространственно-временными корреляционными функциями (корреляторами):

$$\langle \theta(\mathbf{x}_1, t_1) \theta(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle; \langle \theta_1(\mathbf{x}_1, t_1) u_i(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle; \\ \langle u_i(\mathbf{x}_1, t_1) u_j(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle,$$

которые будут зависеть от разностей $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$ и $t_2 - t_1 = t$. Эти корреляторы также будут определяться линейными функционалами от корреляторов случайных источников u и y_4 , которые находятся с помощью ФДТ [12].

Введем спектральные плотности корреляторов, определяемые с помощью следующего преобразования Фурье для пространственно-временных функций $A(\mathbf{x}, t)$:

$$A(\mathbf{x}, t) = \int A(\mathbf{k}, \omega) \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)) d\mathbf{k}d\omega. \quad (2)$$

Для коррелятора двух случайных функций $A(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $B(\mathbf{x}_2, t_2)$ имеем

$$\langle A(\mathbf{x}_1, t_1), B(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = \\ = \int \langle A B \rangle_{\mathbf{k}\omega} \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)) d\mathbf{k}d\omega, \quad (3)$$

где $\langle A B \rangle_{\mathbf{k}\omega}$ — спектральная плотность коррелятора. Если известны фурье-компоненты величин A и B , то их корреляторы связаны со спектральной плотностью соотношением

$$\langle A(\mathbf{k}, \omega), B(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \langle AB \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega'). \quad (4)$$

Воспользовавшись ФДТ для спектральных плотностей корреляторов случайных величин u и y_4 , получим

$$\langle y_4, y_i \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = 0; \quad \langle y_4^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = c(\omega) \frac{k^2 \tilde{\kappa}}{T_0}; \\ \langle y_i, y_j \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = c(\omega) (r_{ij} + k^2 \tilde{\eta}_{ij}), \quad (5)$$

где $c(\omega) = \hbar\omega / (2\pi)^4 \text{cth}(\hbar\omega / 2T_0)$, а $\tilde{\kappa}$ и $\tilde{\eta}_{ij}$ — обозначают свертки тензоров $\tilde{\kappa}_{ij}$, $\tilde{\eta}_{ijlm}$ с единичным

вектором $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ вида $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}_{ij} n_i n_j$; $\tilde{\eta}_{ij} = \tilde{\eta}_{ijlm} n_l n_m$. В изотропной среде $\tilde{\eta}_{ij} = (\tilde{\xi} + \frac{4}{3}\tilde{\eta})n_i n_j + \tilde{\eta}(\delta_{ij} - n_i n_j)$, а $\tilde{\eta}$ и $\tilde{\xi}$ — соответственно коэффициенты первой и второй вязкостей.

Применив к системе (1) преобразование Фурье (2), получим систему линейных алгебраических уравнений для компонент Фурье $u_{\mathbf{k}, \omega}$ и $\theta_{\mathbf{k}, \omega}$:

$$a_{ij} u_j - STk_i \theta = i y_i; \\ (\omega C + ik^2 \tilde{\kappa}) \theta - S(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = i y_4, \quad (6)$$

с симметричным тензором a_{ij} :

$$a_{ij} = \omega \tilde{\rho}_{ij} + i(r_{ij} + k^2 \tilde{\eta}_{ij}). \quad (7)$$

Здесь и далее индекс нуль у равновесных величин и индексы u компонент Фурье опускаем.

На вещественной оси ω в случае диссипативных систем тензор a_{ij} невырожден ($\text{Det} \|a_{ij}\| \neq 0$) и имеет обратный a_{ij}^{-1} , поэтому решение системы уравнений (6) можно записать в виде

$$\theta = \frac{i}{D} (y_4 + S k a_j^{-1} y_j); \quad u_j = STk \theta a_j^{-1} + i a_{ji}^{-1} y_i, \quad (8)$$

где D — определитель системы (8):

$$D = (\omega C + i \tilde{\kappa} k^2) - k^2 S^2 T a^{-1}, \quad (9)$$

здесь $a_i^{-1} = a_{ij}^{-1} n_j$; $a^{-1} = a_{ij}^{-1} n_i n_j$ — свертки тензора a_{ij}^{-1} .

Используя выражение (8), находим спектральные плотности корреляторов флуктуации полей θ и u :

$$\langle \theta^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = - \frac{c(\omega)}{T} \text{Im} \left\{ \frac{1}{D} \right\}; \\ \langle u_j \theta \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = - c(\omega) k S \text{Im} \left\{ \frac{a_i^{-1}}{D} \right\}; \quad (10) \\ \langle u_i u_j \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = - c(\omega) \text{Im} \left\{ \frac{a_i^{-1} a_j^{-1}}{D} S^2 T k^2 + a_{ij}^{-1} \right\}.$$

При выводе этих выражений мы воспользовались следующим соотношением:

$$r_{ij} + k^2 \tilde{\eta}_{ij} = \frac{1}{2i} (a_{ij} - a_{ij}^*).$$

Спектральная плотность энергии флуктуаций определяется выражением

$$\langle \delta U \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{CT}{2} \langle \theta^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} + \frac{\tilde{\rho}_{ij}}{2} \langle u_i u_j \rangle_{\mathbf{k}, \omega}. \quad (11)$$

Заметим, что флуктуация энтропии $\delta S = S - S_0$ связана с флуктуацией θ соотношением $\delta S = C\theta$ [9], а спектральная плотность коррелятора энтропии равна $\langle (\delta S)^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = C^2 \langle \theta^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}$.

При малых вязкостях, когда $r_{ij} + k^2 \tilde{\eta}_{ij} \ll \omega \tilde{\rho}_{ij}$, тензор a_{ij}^{-1} приближенно равен

$$a_{ij}^{-1} \approx \frac{1}{\omega} \tilde{\rho}_{ij}^{-1} - \frac{i}{\omega^2} \tilde{\rho}_{il}^{-1} (r_{lm} + k^2 \tilde{\eta}_{lm}) \tilde{\rho}_{mj}^{-1}. \quad (12)$$

В этом случае определитель D (9) можно представить в виде

$$D = \frac{a^{-1}C}{\tilde{\rho}^{-1}} (\omega^2 - \Omega^2 + 2i\omega\Gamma_{\parallel}), \quad (13)$$

здесь $\Omega = k W_{\parallel}$; $W_{\parallel} = [(TS/C)\tilde{\rho}^{-1}]^{1/2}$;

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{1}{2\tilde{\rho}^{-1}} [\tilde{\rho}_j^{-1}(r_{ij} + k^2 \tilde{\eta}_{ij}) \tilde{\rho}_l^{-1}] + \frac{k^2}{2C} \tilde{\kappa}; \quad (14)$$

$\tilde{\rho}_j^{-1}$, $\tilde{\rho}^{-1}$ – свертки тензора ρ_{ij}^{-1} вида $\tilde{\rho}_j^{-1} = \tilde{\rho}_{jl}^{-1} n_l$; $\tilde{\rho}^{-1} = \tilde{\rho}_{ij}^{-1} n_i n_j$. При выполнении известных условий, так называемого «окна» существования вторичных волн, Ω , W_{\parallel} и Γ_{\parallel} – определяют соответственно частоту, скорость и коэффициент затухания ВВ [9]. В этом случае спектральные плотности имеют лоренцеву форму

$$\begin{aligned} \langle \theta^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} &= \frac{c(\omega)}{T} \frac{\omega}{C} \frac{2\omega\Gamma_{\parallel}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega^2\Gamma_{\parallel}^2}; \\ \langle u_i \theta \rangle_{\mathbf{k}, \omega} &= \frac{TSk\tilde{\rho}_i^{-1}}{\omega} \langle \theta^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}; \\ \langle u_i u_j \rangle_{\mathbf{k}, \omega} &= CT \frac{\Omega^2}{\omega^2} \frac{\tilde{\rho}_i^{-1} \tilde{\rho}_j^{-1}}{\tilde{\rho}^{-1}} \langle \theta^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}; \\ \langle \delta U \rangle_{\mathbf{k}, \omega} &= \frac{CT}{2} \langle \theta^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

В идеальной среде, когда упоминавшиеся выше кинетические коэффициенты стремятся к нулю ($\Gamma_{\parallel} \rightarrow 0$), из (15) следует, что в области частот $\omega = \pm \Omega$ спектральные плотности имеют δ -образный характер:

$$\langle \theta^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{\pi c(\omega)}{2CT} (\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)).$$

Рассмотрим другой предельный случай, когда $\omega \tilde{\rho}_{ij} \ll r_{ij} + k^2 \tilde{\eta}_{ij}$ и определяющим является внешнее трение r . Тензор a_{ij}^{-1} в этом случае в линейном приближении по параметру $\omega \tilde{\rho}/r$ имеет вид

$$a_{ij}^{-1} = -ir_{ij}^{-1} + \omega r_{im}^{-1} \tilde{\rho}_{ml} r_{lj}^{-1}. \quad (16)$$

Тензор r_{ij}^{-1} связан с тензором статической теплопроводности κ_{ij} соотношением $\kappa_{ij} = TS^2 r_{ij}^{-1}$ [9], поэтому

$$a_{ij}^{-1} = -\frac{i}{TS^2} \left(\kappa_{ij} + \frac{i\omega}{TS^2} \kappa_{im} \tilde{\rho}_{ml} \kappa_{mj} \right). \quad (17)$$

Можно показать, что второе слагаемое в (17) мало, если $(kl_{\kappa})^2 \ll 1$, где $l_{\kappa} = CW_{\parallel} \kappa$ – длина свободного пробега квазичастиц, связанная с внешним трением. Тогда определитель D имеет вид

$$D = C\omega + ik^2(\kappa + \tilde{\kappa}), \quad (18)$$

а спектральные плотности корреляторов равны

$$\begin{aligned} \langle \theta^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} &= \frac{c(\omega)}{T} \frac{k^2(\kappa + \tilde{\kappa})}{(C\omega)^2 + k^4(\kappa + \tilde{\kappa})^2}; \\ \langle u_i \theta \rangle_{\mathbf{k}, \omega} &= \frac{c(\omega)k\omega}{TS} \frac{C\kappa_i}{(C\omega)^2 + k^4(\kappa + \tilde{\kappa})^2}; \\ \langle u_i u_j \rangle_{\mathbf{k}, \omega} &= \frac{c(\omega)}{TS^2} \left\{ \kappa_{ij} - \frac{k^4 \kappa_i \kappa_j (\kappa + \tilde{\kappa})}{(C\omega)^2 + k^4(\kappa + \tilde{\kappa})^2} \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\kappa = \kappa_{ij} n_i n_j$; $\kappa_i = \kappa_{ij} n_j$. Заметим, что $\langle \theta^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}$ в этом случае совпадает со спектральной плотностью коррелятора температуры в упругой анизотропной среде с учетом теплопроводности фононного газа $\kappa_{ij} + \tilde{\kappa}_{ij}$.

Спектральные плотности корреляции гидродинамических флуктуаций в изотропной среде

Исследуем основные свойства гидродинамических флуктуаций в газодинамике квазичастиц на примере изотропной среды. В изотропной среде тензор a_{ij} представим в виде

$$a_{ij} = a_1 n_i n_j + a_2 (\delta_{ij} - n_i n_j), \quad (20)$$

обратный тензор a_{ij}^{-1} можно получить без каких-либо приближений:

$$a_{ij}^{-1} = a_1^{-1} n_i n_j + a_2^{-1} (\delta_{ij} - n_i n_j),$$

где $a_1 = \omega\tilde{\rho} + ir + ik^2(\xi + \frac{4}{3}\tilde{\eta})$; $a_2 = \omega\tilde{\rho} + ir + ik^2\tilde{\eta}$.
 Определитель D (9) в этом случае будет равен $(C\tilde{\rho}/a_1)\Delta$, где

$$\Delta = \left[\left(\omega + ik^2 \frac{\tilde{\kappa}}{C} \right) \left(\omega + i \frac{r}{\tilde{\rho}} + i \frac{k^2}{\tilde{\rho}} (\xi + \frac{4}{3}\tilde{\eta}) \right) - \Omega^2 \right]. \quad (21)$$

Введем следующие обозначения для характеристики диссипативных процессов: частоту $v_r = r/\tilde{\rho}$, определяющую релаксацию дрейфовой скорости квазичастиц \mathbf{u} в результате внешнего трения, и диффузионные времена энергии $\tau_{\tilde{\kappa}}$ и импульса квазичастиц $\tau_{\tilde{\eta}}$ и $\tilde{\tau}$ за счет их взаимодействия [9]:

$$\tau_{\tilde{\kappa}} = \frac{\tilde{\kappa}}{CW_{\parallel}^2}; \quad \tau_{\tilde{\eta}} = \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\rho}W_{\parallel}^2}; \quad \tilde{\tau} = \frac{(\xi^2 + \frac{4}{3}\tilde{\eta})}{\tilde{\rho}W_{\parallel}^2}. \quad (22)$$

В изотропной среде для векторов \mathbf{y} и \mathbf{u} естественно ввести продольные y_{\parallel} , u_{\parallel} и перпендикулярные y_{\perp} , u_{\perp} составляющие относительно направления вектора \mathbf{k} . Спектральные плотности корреляторов случайных величин y_{\parallel} и y_{\perp} равны

$$\langle y_{\parallel}^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} = c(\omega)\tilde{\rho}(v_r + \Omega^2\tilde{\tau}); \quad (23)$$

$$\langle y_{i\perp}y_{j\perp} \rangle_{\mathbf{k},\omega} = c(\omega)\tilde{\rho}(v_r + \Omega^2\tau_{\tilde{\eta}}) (\delta_{ij} - n_i n_j).$$

Продольная и поперечная составляющие y_{\parallel} и y_{\perp} некоррелированы, т.е. $\langle y_{\parallel}y_{\perp} \rangle_{\mathbf{k},\omega} = 0$.

Для величин θ , u_{\parallel} и u_{\perp} находим

$$\langle \theta^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} = -\frac{c(\omega)}{CT} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\omega + i(v + v')}{\Delta} \right\};$$

$$\langle u_{\parallel}^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} = -\frac{c(\tilde{\omega})}{\tilde{\rho}} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\omega + i(v - v')}{\Delta} \right\}; \quad (24)$$

$$\langle u_{i\perp}u_{j\perp} \rangle_{\mathbf{k},\omega} = -\frac{c(\omega)}{\tilde{\rho}} (\delta_{ij} - n_i n_j) \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\omega + iv_r + i\Omega^2\tau_{\tilde{\eta}}} \right\};$$

$$\langle u_{\parallel}\theta \rangle_{\mathbf{k},\omega} = -\frac{Skc(\omega)}{C\tilde{\rho}} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\Delta} \right\};$$

$$\langle u_{i\perp}u_{\parallel} \rangle_{\mathbf{k},\omega} = 0; \quad \langle u_{i\perp}\theta \rangle_{\mathbf{k},\omega} = 0,$$

где $\Delta = (\omega + iv)^2 - (\Omega^2 - v^2)$;

$$v = \frac{1}{2} (v_r + \Omega^2(\tilde{\tau} + \tilde{\tau}_{\tilde{\kappa}})); \quad v' = \frac{1}{2} (v_r + \Omega^2(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_{\tilde{\kappa}})). \quad (25)$$

Плотность энергии равна $\delta U = \delta U_{\parallel} + \delta U_{\perp}$, где $\delta U_{\parallel} = \frac{1}{2} (CT\theta^2 + \tilde{\rho}u_{\parallel}^2)$, а $\delta U_{\perp} = \frac{1}{2} \tilde{\rho}u_{\perp}^2$. Спектральная плотность энергии флуктуаций имеет вид

$$\langle \delta U_{\parallel} \rangle_{\mathbf{k},\omega} = -c(\omega) \operatorname{Im} \left\{ \frac{\omega + iv}{\Delta} \right\}; \quad (26)$$

$$\langle \delta U_{\perp} \rangle_{\mathbf{k},\omega} = -c(\omega) \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\omega + iv_r + i\Omega^2\tau_{\tilde{\eta}}} \right\}.$$

В области существования ВВ, определяемой условием $\min(1/\tau_{\tilde{\kappa}}; 1/\tilde{\tau}) \gg \Omega \gg v_r$, спектральная плотность $\langle \delta U_{\parallel} \rangle_{\mathbf{k},\omega}$ имеет лоренцеву форму, а спектральная плотность $\langle \delta U_{\perp} \rangle_{\mathbf{k},\omega}$ не имеет.

Заключение

В работе [9] в модели приведенного изотропно-го кристалла вычислены значения кинетических коэффициентов фоновой газодинамики в области низких температур для следующих чистых монокристаллов, принадлежащих кубической сингонии: NaCl; NaF; LiF; KCl; MgO; GaAs; InSb; YIG; Si; Ge. Используя взятые из справочника [18] данные, характеризующие эти кристаллы, вычислим фоновые теплоемкость C , энтропию S , плотность $\tilde{\rho}$ и скорость ВВЗ W_{\parallel} . Если размеры кристаллов порядка 1 см (именно в образцах NaF таких размеров экспериментально наблюдался второй звук), то волновой вектор ВВЗ $k = 2\pi \text{ см}^{-1}$. Подставляя эти значения в (26), получаем спектральную плотность флуктуации энергии фононов как функцию температуры и частоты. В качестве примера приведем значения этих величин для NaF: плотность $\rho = 2,801 \text{ г/см}^3$; $v_t = 5,64 \cdot 10^5 \text{ см/с}$; $v_l = 3,31 \cdot 10^5 \text{ см/с}$; фоновая плотность $\tilde{\rho} = 7,06 \cdot 10^{-11} T^4 \text{ г/см}^3$; $\tilde{\eta} = 0,203 \cdot T^{-1} \text{ г/см}\cdot\text{с}$; $C = 3S = 24,3 \cdot T^3 \text{ эрг/см}^3\cdot\text{К}$; $W_{\parallel} = 1,96 \cdot 10^5 \text{ см/с}$; $\tilde{\kappa} = 7,19 \cdot 10^{12} T^{-2} \text{ эрг/см}\cdot\text{с}\cdot\text{К}$; $v_r = 4,3 \cdot 10^{15} T^{-3} \times \exp(-220/T) [1 + 10^{-3} T^2 \exp(-12/T)] \text{ с}^{-1}$, $\Omega = 1,23 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$.

В изотропной среде спектральные плотности энергии флуктуаций в газе квазичастиц (26) имеют максимальное значение при частоте $\omega_r = \Omega [1 + \tilde{\tau}_{\tilde{\kappa}}(v_r + \Omega^2\tilde{\tau})]^{1/2}$, которая является частотой ВВЗ с учетом диссипативных добавок. На рис. 1 приведены температурные зависимости резонансных спектральных плотностей флуктуации энергии на частоте $\omega = \omega_r$ для некоторых кристаллов кубической сингонии, каждая из которых имеет лоренцеву форму и фактически определяет область температур («окно») существования ВВЗ. Убедимся в этом на примере NaF (рис. 1, кривая 2). Видно, что область существования ВВЗ лежит в интервале 9–16 К. Это совпадает с ин-

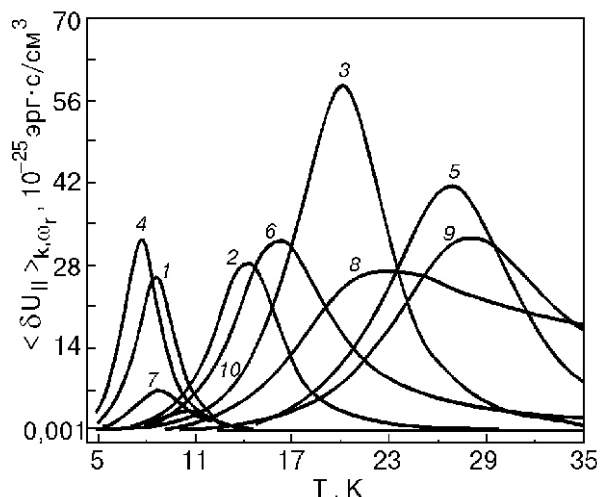


Рис. 1. Температурная зависимость резонансной спектральной плотности флуктуации энергии фононов $\langle \delta U_{\parallel} \rangle_{k, \omega}$ для различных кристаллов: NaCl (1); NaF (2); LiF (3); KCl (4); MgO (5); GaAs (6); InSb (7); YIG (8); Si (9); Ge (10).

тервалом температур, в котором экспериментально наблюдался второй звук [15,16]. Действительно, из вида зависимостей спектральной плотности флуктуации энергии частоты для NaF при температурах 6; 10; 13,33; 15 и 18 К следует, что они имеет лоренцеву форму в окрестности частоты

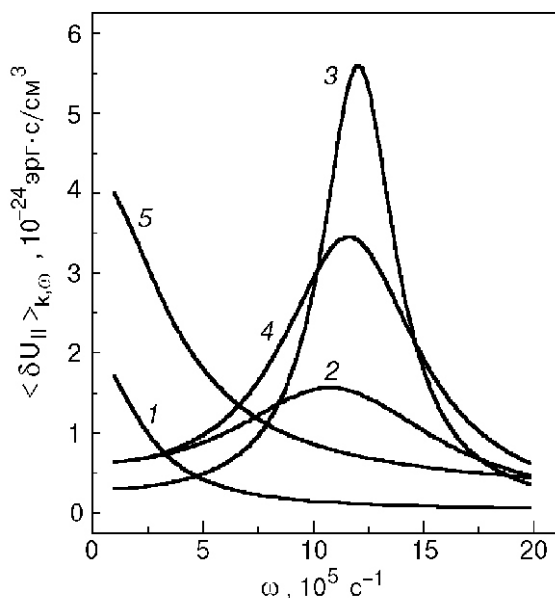


Рис. 2. Зависимость спектральной плотности флуктуации энергии фононов $\langle \delta U_{\parallel} \rangle_{k, \omega}$ для NaF от частоты в окрестности частот ВВЗ при различных температурах $T, \text{ К}$: 6 (1); 10 (2); 13,3 (3); 15 (4); 18 (5).

ВВЗ для температур 10; 13,33 и 15 К (см. рис. 2). Для NaF кривая резонансной спектральной плотности энергии фононов имеет максимум при температуре 13,33 К. Такое совпадение температурных областей существования ВВЗ для NaF служит еще одним подтверждением того, что модель приведенного изотропного кристалла, предложенная в работе [9], наиболее близка к реальным кристаллам.

Из анализа кривых на рис. 1 следует, что максимальное значение резонансной спектральной плотности флуктуации энергии фононов имеют кристаллы LiF, а минимальное — Ge.

Зная спектральные плотности корреляторов флуктуации, можно найти пространственные и временные корреляции флуктуаций.

Работа поддержана УНТЦ (проект № 1499).

1. P. C. Kwok, P. C. Martin, and P. V. Miller, *Solid State Commun.* **3**, 181 (1965).
2. P. C. Kwok and P. C. Martin, *Phys. Rev.* **142**, 495 (1966).
3. A. Griffin, *Rev. Mod. Phys.* **40**, 167 (1968).
4. R. K. Wehner and R. Klein, *Physica* **62**, 161 (1972).
5. R. A. Cowley, *Adv. Phys.* **12**, 421 (1963).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **32**, 618 (1957).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Гостехиздат, Москва (1957).
8. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
9. А. И. Ахизер, В. Ф. Алексин, В. Д. Ходусов, *ФНТ* **20**, 1199 (1994); *там же* **21**, 3 (1995).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1964).
12. Н. В. Callen and T. A. Welton, *Phys. Rev.* **83**, 34 (1951).
13. М. Л. Левин, С. М. Рытов, *Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике*, Наука, Москва (1967).
14. С. С. Ackermann, B. Bertman, H. A. Fairbank, and R. A. Guyer, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 789 (1966).
15. T. F. McNelly, S. J. Rogers, D. J. Chanin, R. J. Rollefson, W. M. Goubau, G. E. Schmidt, J. A. Krumhansl, and R. O. Pohl, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 100 (1970).
16. H. E. Jackson and S. T. Walker, *Phys. Rev.* **B3**, 1428 (1971).
17. Б. А. Данильченко, В. Н. Порошин, О. Г. Сарбей, *Письма в ЖЭТФ* **30**, 215 (1979).
18. *Акустические кристаллы*, Справочник, М. П. Шаскольская (ред.), Наука, Москва (1967).

Hydrodynamical fluctuation in the quasi-particle gas

V. F. Aleksin and V. D. Khodusov

The hydrodynamical fluctuations in a weakly nonideal quasi-particles gas with a nonconserving number of quasi-particles is considered. Using the

fluctuation-dissipation theorem, the spectral densities of fluctuations for the basic quantities, characterizing the quasi-particle gas, can be expressed via the kinetic coefficients of the quasi-particle gas. These spectral densities have the Lorentz form in the range of existence of secondary waves. For some specific pure single cubic crystals the resonance spectral density of phonon gas energy fluctuation is

given as a function of temperature. These relations make it possible to determine the temperature range of the existence of second sound waves. For NaF this temperature range coincides with the temperature range over which the second sound has experimentally observed.