

# О структуре сверхтекучей компоненты и спектре элементарных возбуждений в квантовой бозе-жидкости $^4\text{He}$

Э. А. Пашицкий

*Институт физики НАН Украины, пр. Науки, 46, г. Киев, 03022, Украина*  
E-mail: pashitsk@iop.kiev.ua

С. И. Вильчинский

*Киевский университет им. Т. Шевченко, пр. Акад. Глушкова, 6, г. Киев, 03022, Украина*  
E-mail: sivil@phys.univ.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 20 декабря 1999 г., после переработки 17 июля 2000 г.

Построена самосогласованная модель сверхтекучей (СТ) бозе-жидкости с подавленным за счет сильного взаимодействия между бозонами одночастичным бозе-эйнштейновским конденсатом (БЭК). В качестве малого параметра используется отношение плотности БЭК к полной плотности бозе-жидкости  $n_0/n \ll 1$ , в отличие от теории Боголюбова для почти идеального бозе-газа, в которой малым параметром является отношение числа надконденсатных возбуждений к числу частиц в интенсивном БЭК  $(n - n_0)/n_0 \ll 1$ . Получена замкнутая система нелинейных интегральных уравнений для нормальной  $\tilde{\Sigma}_{11}(\mathbf{p}, \omega)$  и аномальной  $\tilde{\Sigma}_{12}(\mathbf{p}, \omega)$  собственно-энергетических частей в рамках перенормированной теории возмущений, построенной на комбинированных гидродинамических (при  $p \rightarrow 0$ ) и полевых (при  $p \neq 0$ ) переменных, использование которых обеспечивает аналитичность функций  $\tilde{\Sigma}_{ij}(\mathbf{p}, \epsilon)$  при  $p \rightarrow 0$  и  $\epsilon \rightarrow 0$  и ненулевые значения СТ параметра порядка  $\tilde{\Sigma}_{12}(0, 0) \neq 0$  при  $T = 0$ . Показано, что структура спектра квазичастиц  $E(p)$  и, в частности, наличие ротонного минимума определяется знакопеременным осциллирующим характером фурье-компоненты парного взаимодействия между бозонами в модели «твердых сфер». При этом важную роль играет перенормировка («экранировка») парного взаимодействия за счет многочастичных (коллективных) эффектов, которая описывается поляризационным оператором бозонов на «массовой поверхности» и приводит к усилению эффективного притяжения в определенных областях импульсного пространства. Показано, что сверхтекучая компонента  $\rho_s$  в рассматриваемой модели при  $T \rightarrow 0$  представляет собой суперпозицию одночастичного БЭК и парного когерентного конденсата, аналогичного конденсату куперовских пар в сверхпроводниках. Рассмотрена также структура СТ состояния при  $T \neq 0$  с учетом появления нормальной компоненты  $\rho_n$  и ветви второго звука, скорость которого стремится к нулю в  $\lambda$ -точке. Обсуждается вопрос о применимости критерия сверхтекучести Ландау и о предельно допустимой критической скорости СТ потока в отсутствие квантовых вихрей.

Побудовано самоузгоджену модель надплинної (НП) бозе-рідини з подавленням за рахунок сильної взаємодії між бозонами одночастинковим бозе-ейнштейнівським конденсатом (БЕК). У якості малого параметра використовується відношення густини БЕК до повної густини бозе-рідини  $n_0/n \ll 1$ , на відміну від теорії Боголюбова для майже ідеального бозе-газу, в котрій малим параметром є відношення числа надконденсатних збуджень до числа частинок у інтенсивному БЕК  $(n - n_0)/n_0 \ll 1$ . Отримано замкнену систему нелінійних інтегральних рівнянь для нормальної  $\tilde{\Sigma}_{11}(\mathbf{p}, \omega)$  та аномальної  $\tilde{\Sigma}_{12}(\mathbf{p}, \omega)$  власно-енергетичних частин в рамках перенормованої теорії збурень, яку побудовано на комбінованих гідродинамічних (при  $p \rightarrow 0$ ) та польових (при  $p \neq 0$ ) змінних, використання котрих забезпечує аналітичність функцій  $\tilde{\Sigma}_{ij}(\mathbf{p}, \epsilon)$  при  $p \rightarrow 0$  та  $\epsilon \rightarrow 0$  і ненульове значення НП параметра порядку  $\tilde{\Sigma}_{12}(0, 0) \neq 0$  при  $T = 0$ . Показано, що структура спектра квазичастинок  $E(p)$  та, зокрема, наявність ротонного мінімуму визначається знакозмінним осцилюючим характером фур'є-компоненти парної взаємодії між бозонами у моделі «твердих сфер». При цьому важливу роль грає перенормування («екранування») парної взаємодії за рахунок багаточастинкових (коллективних) ефектів, котре описується поляризаційним оператором бозонів на «масовій поверхні» і призводить до підсилення ефективного притягання у визначених областях імпульсного простору. Показано, що надплинна компонента  $\rho_s$  в розглянутій моделі при  $T \rightarrow 0$  є суперпозицією одночастин-

кового БЕК та парного когерентного конденсата, аналогічного конденсату куперівських пар у надпровідниках. Розглянуто також структуру НП станів при  $T \neq 0$  з врахуванням появи нормальної компоненти  $\rho_n$  і вітки другого звуку, швидкість якого прямує до нуля в  $\lambda$ -точці. Обговорюється питання про використання критерію надплинності Ландау і про гранично припустимі критичної швидкості НП потоку у відсутності квантових вихорів.

PACS: 67.57.-z

## 1. Введение

В настоящее время вопрос о квантовомеханической структуре сверхтекучего (СТ) состояния жидкого  $^4\text{He}$  ниже  $\lambda$ -точки (He II) остается дискуссионным (см., например, [1–3]). Как отмечалось в обзоре [4], существует целый ряд противоречий между основополагающими принципами и выводами микроскопической теории сверхтекучести  $^4\text{He}$  [5–8] и экспериментальными данными. В частности, согласно последним результатам по квантовому испарению атомов  $^4\text{He}$  [9], максимальная плотность  $\rho_0$  одночастичного бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК) в бозе-жидкости  $^4\text{He}$  даже при очень низких температурах  $T \ll T_\lambda$  не превышает 10% полной плотности  $\rho$  жидкого  $^4\text{He}$ , тогда как плотность сверхтекучей (СТ) компоненты  $\rho_s \rightarrow \rho$  при  $T \rightarrow 0$ . Такая низкая плотность БЭК обусловлена сильным взаимодействием между атомами  $^4\text{He}$ , а также большой энергией квантовых флуктуаций (нулевых колебаний) при  $T \rightarrow 0$  и термодинамических (тепловых) флуктуаций при  $T > 0$ , и указывает на то, что сам по себе «истощенный» одночастичный БЭК не может служить микроосновой СТ компоненты  $\rho_s$ . Поэтому квантовая структура эффективного СТ конденсата в He II с «избыточной» плотностью  $\rho_s - \rho_0 \gg \rho_0$  требует более глубокого изучения [10,11].

На протяжении ряда лет обсуждалась модель свехтекучей бозе-жидкости с парной конденсацией бозонов, аналогичной куперовскому спариванию фермионов (электронов) в сверхпроводниках [12]. При этом рассматривались две возможности: либо сосуществование парного когерентного конденсата (ПКК) с БЭК [13–15], либо существование интенсивного ПКК при полном отсутствии БЭК [16–18]. В первом случае при малой плотности БЭК могут возникать проблемы с устойчивостью основного состояния и с гибридизацией одночастичной (щелевой) и коллективной (акустической) ветвей спектра бозе-жидкости [17]. В модели СТ состояния с «куперовским» ПКК без БЭК ( $\rho_0 = 0$ ) эти проблемы автоматически снимаются, поскольку фаза ПКК произвольна и может быть выбрана таким образом, чтобы обеспечить устойчивость звуковой (гидродинамической) вет-

ви коллективных возбуждений. При этом гибридизация происходит только между теми ветвями спектра, которые соответствуют одинаковой четности числа частиц, принимающих участие в возбуждении (см. [17]).

Однако в этом случае возникают трудности, связанные с тем, что щелевой одночастичный спектр  $\epsilon(p) = \sqrt{\Delta^2 + u^2 p^2}$  нарушает теорему Гугенгольца – Пайнса [19] и степенную асимптотику Ратто – Честера [20] для корреляционной функции  $\langle \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle \sim |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2}$ , превращая ее в экспоненциальную [17]. Кроме того, «куперовский» ПКК связанных бозонных пар как основа СТ компоненты при отсутствии БЭК должен приводить к полужелым значениям кванта циркуляции скорости  $\kappa = \hbar/2m$  (где  $m$  – масса атома  $^4\text{He}$ ), которые не наблюдаются в экспериментах [21–23].

Наряду с этим конечная щель  $\Delta \neq 0$  при  $p \rightarrow 0$  в спектре квазичастиц должна была бы приводить к экспоненциальным особенностям в температурной зависимости теплоемкости  $C_p(T)$  и к фазовым переходам I рода по температуре и давлению при исчезновении БЭК и возникновении ПКК [17], что также не наблюдается экспериментально.

С другой стороны, многочисленные прецизионные эксперименты по восстановлению динамического структурного фактора  $S(\mathbf{p}, \epsilon)$  в жидком гелии  $^4\text{He}$  с помощью неупругого рассеяния нейтронов [24–27] показывают, что спектр элементарных возбуждений  $E(p)$ , связанный с коллективными колебаниями плотности бозе-жидкости  $^4\text{He}$ , очень слабо зависит от температуры вплоть до  $\lambda$ -точки ( $T_\lambda \approx 2,17$  К) при всех импульсах, включая фононную, максонную и ротонную области. Это означает, что определяемая согласно критерию сверхтекучести Ландау критическая скорость  $v_c = \min [E(p)/p]$  практически не изменяется с повышением  $T$  и не обращается в нуль при  $T \rightarrow T_\lambda$ . В то же время срыв сверхтекучести в макроскопических потоках He II, как известно [23], определяется процессами рождения протяженных квантовых вихрей Онсагера – Фейнмана либо замкнутых вихревых нитей (петель, колец). В результате этого наблюдаемая в He II пороговая скорость разрушения бездиссипативного течения  $v_c^*$  может быть на два порядка меньше, чем

критическая скорость  $v_c \approx [\Delta_r/p_r] \approx 60$  м/с, связанная с ротонной щелью  $\Delta_r \approx 8,6$  К в точке  $p = p_r \approx 1,9$  А<sup>-1</sup> в спектре квазичастиц  $E(p)$ .

Однако в тех условиях, когда рождение и движение вихрей (или вихревых колец) затруднено, могут быть достигнуты гораздо более высокие значения пороговой скорости. Так, например, в ультратонких пленках и капиллярах при  $T < 1$  К наблюдались максимальные значения  $v_c^* \approx 2-3$  м/с [23], а при протекании He II через узкие отверстия диаметром несколько микрон в тонких перегородках были зафиксированы критические скорости  $v_c^* \approx 8-10$  м/с [28,29]. Более того, в экспериментах по ускорению ионов в He II [30] при давлениях  $P \approx 15-20$  бар были достигнуты пороговые скорости свыше 50 м/с.

В настоящей работе обсуждаются проблемы, связанные как с микроскопической квантовой структурой СТ компоненты  $\rho_s$  в He II, так и с критерием сверхтекучести Ландау, который определяет максимально допустимую критическую скорость в отсутствие квантовых вихрей.

Наш подход основан на предложенной в [17] микроскопической модели сверхтекучести бозе-жидкости с подавленным БЭК, в которой в качестве малого параметра используется отношение плотности БЭК к полной плотности бозе-жидкости  $\rho_0/\rho_s \ll 1$ , в отличие от теории Боголюбова [6] для почти идеального бозе-газа, когда малым параметром является отношение числа надконденсатных возбуждений к числу частиц в интенсивном БЭК  $(n - n_0)/n_0 \ll 1$ .

В рассматриваемой модели СТ состояние описывается «укороченной» системой уравнений Дайсона–Беляева для нормальной  $\tilde{\Sigma}_{11}(k, \omega)$  и аномальной  $\tilde{\Sigma}_{12}(k, \omega)$  собственно-энергетических частей в рамках перенормированной полевой теории возмущений [10,11], построенной на комбинированных переменных [31,32], которые в длинноволновом пределе ( $p \rightarrow 0$ ) сводятся к гидродинамическим переменным макроскопической квантовой (при  $T = 0$ ) или двухжидкостной (при  $T \neq 0$ ) гидродинамики, а в коротковолновой области соответствуют полевым бозонным операторам рождения (уничтожения) квазичастиц.

При этом плотность СТ компоненты  $\rho_s$  определяется величиной  $\tilde{\Sigma}_{12}(0, 0)$ , которая представляет собой суперпозицию «истощенного» одночастичного БЭК и интенсивного «куперовского» ПКК с совпадающими фазами (знаками) соответствующих параметров порядка. Парное взаимодействие между бозонами выбиралось в виде регуляризованного потенциала отталкивания в модели «твердых сфер» [33,34], фурье-компонента  $V(p)$  которого

является осциллирующей и знакопеременной функцией передаваемого импульса  $p$  благодаря эффекту «исключенного объема» и квантовой дифракции частиц друг на друге. Отрицательные минимумы  $V(p)$  в определенных областях импульсного пространства соответствуют эффективному притяжению, которое может усиливаться в результате перенормировки («экранирования») парного взаимодействия за счет многочастичных коллективных корреляций [17,18]. Показано, что такое притяжение может быть достаточным для образования ПКК в импульсном пространстве (но не для существования связанных бозонных пар в реальном пространстве). Проведенные с помощью итерационной схемы самосогласованные численные расчеты собственной энергии бозонов, парного параметра порядка и спектра квазичастиц при  $T = 0$  позволили найти условия, при которых теоретический спектр  $E(p)$  хорошо согласуется с экспериментально измеренным спектром элементарных возбуждений. При этом показано, что в рамках модели «твердых сфер» ротонный минимум в спектре квазичастиц  $E(p)$  в бозе-жидкости с подавленным БЭК однозначно связан с первым отрицательным минимумом фурье-компоненты перенормированного потенциала (аналогично минимуму в боголюбовском спектре [6] слабонеидеального разреженного бозе-газа [33,34]).

В работе рассмотрена также структура СТ состояния при  $T \neq 0$  с учетом появления нормальной компоненты  $\rho_n$  и ветви второго звука, скорость которого стремится к нулю в  $\lambda$ -точке. Обсуждается вопрос о применимости критерия сверхтекучести Ландау и о величине предельно допустимой критической скорости СТ потока в отсутствие квантовых вихрей.

## 2. Функции Грина и уравнения для собственно-энергетических частей в модели бозе-жидкости с подавленным БЭК

Будем исходить из перенормированной полевой теории возмущений [10,11], построенной на комбинированных переменных [31,32],

$$\tilde{\Psi}(x) = \tilde{\Psi}_L(x) + \tilde{\Psi}_{sh}(x), \quad (1)$$

которые в длинноволновой области  $|\mathbf{k}| < k_0$  (где  $k_0$  – некоторый характерный импульс) фактически являются гидродинамическими переменными  $\tilde{\Psi}_L(x)$  в духе квантовой гидродинамики Ландау [5], а в коротковолновой области  $|\mathbf{k}| > k_0$  совпадают с обычными полевыми операторами  $\tilde{\Psi}_{sh}(x)$ :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_L(x) &= \sqrt{\langle \tilde{n}_L \rangle} \left[ 1 + \frac{\tilde{n}_L - \langle \tilde{n}_L \rangle}{2 \langle \tilde{n}_L \rangle} + i\tilde{\phi}_L \right]; \\ \tilde{\Psi}_{sh} &= \Psi_{sh} e^{-i\tilde{\phi}_L}; \quad \Psi_{sh} = \Psi - \Psi_L; \\ \tilde{\Psi}_L(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{|\mathbf{k}| < k_0} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sqrt{\langle \tilde{n}_L \rangle} e^{i\tilde{\phi}_L}.\end{aligned}\quad (2)$$

Заметим, что приближенное выражение для длинноволновой части  $\tilde{\Psi}_L$  оператора бозонного поля  $\tilde{\Psi}$  записано с учетом только членов первого порядка в разложениях по медленно изменяющейся (гидродинамической) фазе  $\tilde{\phi}_L$  и по малому отклонению плотности  $\tilde{n}_L$  от его среднего значения  $\langle \tilde{n}_L \rangle$ . В [31,32] предполагалось, что при низких  $T$ , благодаря достаточно слабому взаимодействию ( $mk_0 V(k_0) \ll 1$ ), почти все частицы находятся в бозе-конденсате, и поэтому величина импульса  $k_0$  в [32] выбиралась достаточно малой, чтобы выполнялось приближенное равенство  $\langle \tilde{n}_L \rangle \simeq n_0$ , где  $n_0$  — концентрация частиц в БЭК. Однако в бозе-жидкости с сильным взаимодействием, когда одночастичный БЭК сильно подавлен ( $n_0 \ll n$ ), величину  $\langle \tilde{n}_L \rangle$  следует нормировать на плотность СТ компоненты  $n_s = \rho_s/m$ .

На основе полевых переменных (1), (2) в рамках метода функций Грина [8] при  $T \rightarrow 0$  может быть построена обычная система уравнений Дайсона — Беляева [7], которая позволяет выразить нормальную  $\tilde{G}_{11}$  и аномальную  $\tilde{G}_{12}$  перенормированные одночастичные функции Грина бозонов через соответствующие собственно-энергетические части  $\tilde{\Sigma}_{11}$  и  $\tilde{\Sigma}_{12}$ :

$$\tilde{G}_{11}(\mathbf{p}, \varepsilon) = \frac{G_0^{-1}(-\mathbf{p}, -\varepsilon) - \tilde{\Sigma}_{11}(-\mathbf{p}, -\varepsilon)}{Z(\mathbf{p}, \varepsilon)}; \quad (3)$$

$$\tilde{G}_{12}(\mathbf{p}, \varepsilon) = \tilde{\Sigma}_{12}(\mathbf{p}, \varepsilon)/Z(\mathbf{p}, \varepsilon). \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned}Z(\mathbf{p}, \varepsilon) &= \left[ G_0^{-1}(-\mathbf{p}, -\varepsilon) - \tilde{\Sigma}_{11}(-\mathbf{p}, -\varepsilon) \right] \times \\ &\times \left[ G_0^{-1}(\mathbf{p}, \varepsilon) - \tilde{\Sigma}_{11}(\mathbf{p}, \varepsilon) \right] - |\tilde{\Sigma}_{12}(\mathbf{p}, \varepsilon)|^2; \quad (5)\end{aligned}$$

$$G_0^{-1}(\mathbf{p}, \varepsilon) = \left[ \varepsilon - \frac{p^2}{2m} + \mu + i\delta \right]; \quad \delta \rightarrow +0, \quad (6)$$

где  $\mu$  — химический потенциал квазичастиц, который удовлетворяет соотношению Гугенгольца — Пайнса [19]:

$$\mu = \tilde{\Sigma}_{11}(0, 0) - \tilde{\Sigma}_{12}(0, 0). \quad (7)$$

Спектр всех элементарных возбуждений с нулевой спиральностью, благодаря сильной гибридизации одночастичных и коллективных ветвей в бозе-жидкости с конечным БЭК ( $n_0 \neq 0$ ), определяется полюсами одночастичных функций Грина  $\tilde{G}_{ik}(\mathbf{p}, \varepsilon)$ , т.е. нулями функции  $Z(\mathbf{p}, \varepsilon)$ :

$$\begin{aligned}E(\mathbf{p}) &= \left\{ \left[ \frac{p^2}{2m} + \tilde{\Sigma}_{11}^s(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) - \mu \right]^2 - |\tilde{\Sigma}_{12}(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}))|^2 \right\}^{1/2} + \\ &+ \tilde{\Sigma}_{11}^a(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})), \quad (8)\end{aligned}$$

где

$$\tilde{\Sigma}_{11}^{s,a}(\mathbf{p}, \varepsilon) = \frac{1}{2} \left[ \tilde{\Sigma}_{11}(\mathbf{p}, \varepsilon) \pm \tilde{\Sigma}_{11}(-\mathbf{p}, -\varepsilon) \right],$$

причем знак (+) соответствует симметричной части  $\tilde{\Sigma}_{11}^s$ , а знак (–) — антисимметричной части  $\tilde{\Sigma}_{11}^a$ . В дальнейшем полагаем, что  $\tilde{\Sigma}_{11}$  является четной функцией  $\mathbf{p}$  и  $\varepsilon$ , так что  $\tilde{\Sigma}_{11}^a = 0$  и  $\tilde{\Sigma}_{11}^s = \tilde{\Sigma}_{11}$ .

Соотношение (7) обеспечивает акустический закон дисперсии квазичастиц при  $p \rightarrow 0$ :

$$E(p \rightarrow 0) \simeq \tilde{c}|p|; \quad \tilde{c} = \sqrt{\tilde{\Sigma}_{12}(0, 0)/\tilde{m}^*}, \quad (9)$$

где

$$\frac{1}{\tilde{m}^*} = \frac{1}{B} \left[ \frac{1}{m} + 2 \frac{\partial \tilde{\Sigma}_{11}(0, 0)}{\partial |\mathbf{p}|^2} - 2 \frac{\partial \tilde{\Sigma}_{12}(0, 0)}{\partial |\mathbf{p}|^2} \right]; \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= \left[ 1 - \frac{\partial \tilde{\Sigma}_{11}(0, 0)}{\partial \varepsilon} \right]^2 - \tilde{\Sigma}_{12}(0, 0) \frac{\partial^2 \tilde{\Sigma}_{11}(0, 0)}{\partial \varepsilon^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} |\tilde{\Sigma}_{12}(0, 0)|^2. \quad (11)\end{aligned}$$

Для жидкого  $^4\text{He}$  фазовая скорость  $\tilde{c}$  должна совпадать со скоростью первого (гидродинамического) звука  $c_1 \simeq 236$  м/с благодаря гибридизации одночастичной и коллективной ветвей спектра элементарных возбуждений. При этом длинноволновая асимптотика функций Грина имеет вид

$$\tilde{G}_{11}(\mathbf{p} \rightarrow 0, \varepsilon) = -\tilde{G}_{12}(\mathbf{p} \rightarrow 0, \varepsilon) = \frac{\tilde{\Sigma}_{12}(0, 0)}{B[\varepsilon^2 - c_1^2 p^2 + i\delta]}. \quad (12)$$

Следует подчеркнуть, что в перенормированной полевой теории собственно-энергетические части  $\tilde{\Sigma}_{ij}$  являются аналитическими функциями  $\mathbf{p}$  и  $\varepsilon$ , так что в пределе  $\mathbf{p} \rightarrow 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем

$$\tilde{\Sigma}_{12}(0, 0) \neq 0 \text{ и } \tilde{B} \neq 0,$$

в отличие от перенормированной теории возмущений [7,8], в которой, как было показано в [10,32], функции  $\Sigma_{ij}(\mathbf{p}, \varepsilon)$  являются неаналитическими при  $\mathbf{p} \rightarrow 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а  $\Sigma_{12}(0, 0) = 0$  и  $B = 0$ . При этом в (12) требуется дополнительная процедура раскрытия неопределенности типа  $0/0$  для получения правильной асимптотики [35]:

$$G_{11}(\mathbf{p} \rightarrow 0, \varepsilon) = -G_{12}(\mathbf{p} \rightarrow 0, \varepsilon) = \frac{n_0 m c_1^2}{n[\varepsilon^2 - c_1^2 p^2 + i\delta]};$$

$$c_1^2 = \frac{n}{m} \frac{d\mu}{dn}, \quad (13)$$

где  $n$  — полная концентрация бозонов, а  $n_0$  — концентрация частиц в БЭК.

Как было показано в [17], для бозе-жидкости с достаточно сильным взаимодействием между частицами, когда БЭК сильно подавлен, с хорошей точностью можно ограничиться учетом только первого (нижайшего) члена разложения по малой плотности БЭК ( $n_0 \ll n$ ). Такое приближение прямо противоположно приближению Боголюбова [6] для слабонеидеального бозе-газа с интенсивным БЭК, когда  $n_0 \approx n$ .

В результате с точностью до членов порядка  $n_0/n \ll 1$  для бозе-жидкости получаем укороченную систему уравнений для  $\tilde{\Sigma}_{ik}$  [17]:

$$\tilde{\Sigma}_{11}(\mathbf{p}, \varepsilon) = n_0 \Lambda(\mathbf{p}, \varepsilon) \tilde{V}(\mathbf{p}, \varepsilon) + n_1 V(0) + \tilde{\Psi}_{11}(\mathbf{p}, \varepsilon); \quad (14)$$

$$\tilde{\Sigma}_{12}(\mathbf{p}, \varepsilon) = n_0 \Lambda(\mathbf{p}, \varepsilon) \tilde{V}(\mathbf{p}, \varepsilon) + \tilde{\Psi}_{12}(\mathbf{p}, \varepsilon), \quad (15)$$

где

$$\tilde{\Psi}_{ij}(\mathbf{p}, \varepsilon) =$$

$$= i \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{G}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \tilde{V}(\mathbf{p}-\mathbf{k}, \varepsilon-\omega) \Gamma(\mathbf{p}, \varepsilon, \mathbf{k}, \omega), \quad (16)$$

$$\tilde{V}(\mathbf{p}, \varepsilon) = V(\mathbf{p}) [1 - V(\mathbf{p}) \Pi(\mathbf{p}, \varepsilon)]^{-1}. \quad (17)$$

Здесь  $V(\mathbf{p})$  — фурье-компонента затравочного потенциала парного взаимодействия бозонов;  $\tilde{V}(\mathbf{p}, \varepsilon)$  — перенормированная («экранированная»)

за счет многочастичных коллективных эффектов фурье-компоненты запаздывающего (нелокального) взаимодействия;  $\Pi(\mathbf{p}, \varepsilon)$  — поляризационный оператор бозонов

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{p}, \varepsilon) = & i \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \Gamma(\mathbf{p}, \varepsilon, \mathbf{k}, \omega) \times \\ & \times \{ \tilde{G}_{11}(\mathbf{k}, \omega) \tilde{G}_{11}(\mathbf{k} + \mathbf{p}, \varepsilon + \omega) + \\ & + \tilde{G}_{12}(\mathbf{k}, \omega) \tilde{G}_{12}(\mathbf{k} + \mathbf{p}, \varepsilon + \omega) \}; \quad (18) \end{aligned}$$

$\Gamma(\mathbf{p}, \varepsilon; \mathbf{k}, \omega)$  — вершинная часть (трехполюсник), описывающая многочастичные корреляции;  $\Lambda(\mathbf{p}, \varepsilon) = \Gamma(\mathbf{p}, \varepsilon, 0, 0) = \Gamma(0, 0, \mathbf{p}, \varepsilon)$ , а  $n_1$  — число надконденсатных частиц ( $n_1 \gg n_0$ ), которое определяется из условия сохранения полного числа частиц:

$$n = n_0 + n_1 = n_0 + i \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{G}_{11}(\mathbf{k}, \omega). \quad (19)$$

Если учитывать только вычеты полюсов функций Грина  $\tilde{G}_{ij}(\mathbf{p}, \varepsilon)$  и пренебречь вкладом возможных полюсов функций  $\Gamma(\mathbf{p}, \varepsilon, \mathbf{k}, \omega)$  и  $\tilde{V}(\mathbf{p}, \varepsilon)$ , то с учетом соотношений (3)–(6), (8), (14) и (17) уравнения (16) на массовой поверхности  $\varepsilon = E(\mathbf{k})$  приводятся к следующему виду (при  $T = 0$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{11}(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Gamma(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}); \mathbf{k}, E(\mathbf{k})) \times \\ & \times \tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{k}, E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{k})) \left[ \frac{A(\mathbf{k}, E(\mathbf{k}))}{E(\mathbf{k})} - 1 \right]; \quad (20) \end{aligned}$$

$$\tilde{\Psi}_{12}(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) =$$

$$\begin{aligned} = & -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Gamma(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}); \mathbf{k}, E(\mathbf{k})) \tilde{V}(\mathbf{p}-\mathbf{k}, E(\mathbf{p})-E(\mathbf{k})) \times \\ & \times \frac{n_0 \Lambda(\mathbf{k}, E(\mathbf{k})) \tilde{V}(\mathbf{k}, E(\mathbf{k})) + \tilde{\Psi}_{12}(\mathbf{k}, E(\mathbf{k}))}{E(\mathbf{k})}, \quad (21) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) = & n_0 \Lambda(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) \tilde{V}(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) + \\ & + n_1 V(0) + \tilde{\Psi}_{11}(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) + \frac{p^2}{2m} - \mu. \quad (22) \end{aligned}$$

При этом нелинейное уравнение (8) для нахождения спектра квазичастиц  $E(\mathbf{p})$ , согласно (14), (15), принимает вид

$$E(\mathbf{p}) = \left\{ A^2(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) - [n_0 \Lambda(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) \tilde{V}(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) + \tilde{\Psi}_{12}(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}))]^2 \right\}^{1/2}, \quad (23)$$

а полная концентрация квазичастиц в бозе-жидкости определяется соотношением

$$n = n_0 + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ \frac{A(\mathbf{k}, E(\mathbf{k}))}{E(\mathbf{k})} - 1 \right]. \quad (24)$$

Соотношение Гугенгольца – Пайнса (7), согласно (14) и (15), может быть представлено в виде

$$\mu = n_1 V(0) + \tilde{\Psi}_{11}(0, 0) - \tilde{\Psi}_{12}(0, 0), \quad (25)$$

в результате чего выражение (22) приводится к следующему виду:

$$A(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) = n_0 \Lambda(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) \tilde{V}(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) + [\tilde{\Psi}_{11}(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) - \tilde{\Psi}_{11}(0, 0)] + \tilde{\Psi}_{12}(0, 0) + \frac{p^2}{2m}. \quad (26)$$

Из (23) и (26) следует, что спектр квазичастиц в силу аналитичности функций  $\tilde{\Psi}_{ij}(\mathbf{p}, \epsilon)$  является акустическим при  $p \rightarrow 0$ , а его структура при  $p \neq 0$  существенно зависит от характера парного взаимодействия бозонов.

Заметим также, что выражение для скорости звука  $\tilde{c}$ , согласно (9) и (15), может быть представлено в виде

$$\tilde{c} = \sqrt{\Lambda(0, 0) \tilde{V}(0, 0) \tilde{n} / \tilde{m}^*}; \quad (27)$$

$$\tilde{n} = n_0 + \frac{\tilde{\Psi}_{12}(0, 0)}{\Lambda(0, 0) \tilde{V}(0, 0)},$$

которое аналогично выражению для боголюбовской скорости звука для слабонеидеального бозе-газа  $c_B = \sqrt{V(0)n/m}$ . Условие  $\tilde{c} = c_1$  наряду с условием (13) налагает жесткие ограничения на выбор параметров модели взаимодействия бозонов (см. ниже).

С другой стороны, поскольку при  $T = 0$  плотность СТ компоненты  $\rho_s$  совпадает с полной плотностью бозе-жидкости  $\rho = mn$ , полагая  $\tilde{n} = n$ , с учетом (20) получаем следующие соотношения:

$$\rho_s = \rho_0 + \tilde{\rho}_s = m \frac{\tilde{\Sigma}_{12}(0, 0)}{\Lambda(0, 0) \tilde{V}(0, 0)}; \quad (28)$$

$$\tilde{\rho}_s = mn_1 = m \frac{\tilde{\Psi}_{12}(0, 0)}{\Lambda(0, 0) \tilde{V}(0, 0)}, \quad (29)$$

где  $\rho_0 = mn_0$  – плотность одночастичного БЭК, а  $\tilde{\rho}_s$  – плотность «куперовского» ПКК, причем концентрация  $n_1 = n - n_0$  определяется из соотношения (24) и для жидкого  ${}^4\text{He}$  при  $T \rightarrow 0$ , согласно экспериментальным данным [9], должна составлять не меньше 90% полной концентрации атомов  ${}^4\text{He}$ . Таким образом, СТ компонента в данной модели является суперпозицией одночастичного и парного когерентных конденсатов, а соотношения (24) и (28) накладывают дополнительные связи на параметры микротехории СТ бозе-жидкости.

### 3. Влияние парного взаимодействия на спектр элементарных возбуждений в бозе-жидкости с подавленным БЭК

Как было показано в [33,34], в случае сферически симметричного рассеяния частиц ( $S$ -волна) вычисленная в «лестничном» приближении фурье-компонента потенциала парного взаимодействия между бозонами в модели «твердых сфер» является знакопеременной и осциллирующей функцией передаваемого импульса благодаря так называемому «эффекту исключенного объема», который можно рассматривать как своего рода аналог принципа Паули в реальном пространстве. Благодаря взаимной квантовой дифракции частиц на бесконечном скачке потенциала  $V(r) \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow a$  (где  $a$  – диаметр твердой сферы) эффективный парный потенциал в импульсном пространстве равен ( $\hbar = 1$ )

$$V(p) = V_0 j_0(pa); \quad j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (30)$$

где  $V_0$  – положительная константа, которая определяется самосогласованным образом из нелинейного интегрального уравнения для одночастичной функции Грина при  $p \rightarrow 0$  и зависит от безразмерной плотности бозе-жидкости  $na^3$  (см. [33,34]), а  $j_0(x)$  – нулевая сферическая функция Бесселя первого рода.

Потенциал (30) показан штриховой линией на рис. 1 и соответствует отталкиванию  $V(p) > 0$  в тех областях импульсного пространства, где  $\sin(pa) > 0$  (в частности, при  $pa < \pi$ ), либо притяжению  $V(p) < 0$  в тех областях, где  $\sin(pa) <$

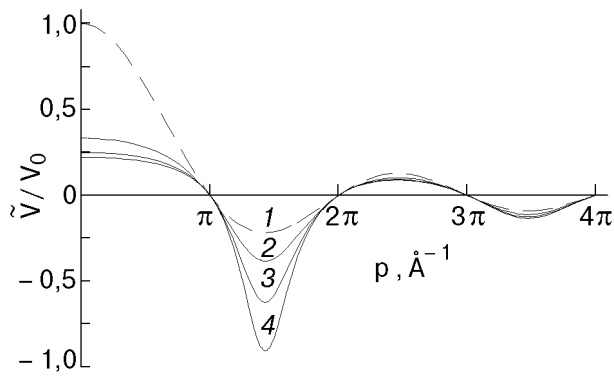


Рис. 1. Зависимость отношения  $\tilde{V}/V_0$  от  $p$  для разных значений безразмерного параметра  $\alpha = V_0\Pi$ : штриховой кривой 1 показан затравочный потенциал «твердых сфер» при  $\alpha = 0$ ; сплошная кривая 2 соответствует значению  $\alpha = 2$ , кривая 3 –  $\alpha = 3$ ; кривая 4 –  $\alpha = 3,5$ .

$< 0$  (например,  $\pi < pa < 2\pi$ ). Такой осциллирующий характер взаимодействия (30) аналогичен статическим фридлевским осцилляциям экранированного кулоновского потенциала с периодом  $\pi/k_F$  в реальном пространстве, которые возникают в результате рассеяния электронов (фермионов) на заполненной, согласно принципу Паули, ферми-сфере диаметром  $2k_F$  (где  $k_F$  – ферми-импульс электронов).

Если потенциал (30) подставить в боголюбовский спектр для разреженного почти идеального бозе-газа [6]

$$E_B(p) = \left\{ \frac{p^2}{2m} \left[ \frac{p^2}{2m} + 2nV(p) \right] \right\}^{1/2}, \quad (31)$$

то путем независимого подбора двух параметров  $V_0$  и  $a$  можно добиться вполне удовлетворительного совпадения спектра  $E_B(p)$  с экспериментально наблюдаемым по нейтронному рассеянию спектром элементарных возбуждений  $E_{\text{exp}}(p)$  в жидком  $^4\text{He}$  (рис. 2,а). Однако полученное в [33,34] самосогласованное решение при  $na^3 \approx 0,23$  заметно отличается от  $E_{\text{exp}}(p)$ , а для параметров  $n = 2,17 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$  и  $a = 2,44 \text{ \AA}$ , характерных для  $^4\text{He}$ , когда  $na^3 = 0,315$ , спектр (31) с потенциалом (30) оказывается неустойчивым, поскольку  $E_B^2(p) < 0$  в некоторой области  $p$  (рис. 2,б), что указывает на неприменимость теории Боголюбова [6] для описания бозе-жидкости.

Многочастичные корреляционные эффекты в бозе-жидкости приводят к существенной перенормировке («экранировке») парного взаимодействия, которое определяет нормальную и аномальную собственно-энергетические части (14) и (15). С учетом (17) и (30) запаздывающее экраниро-

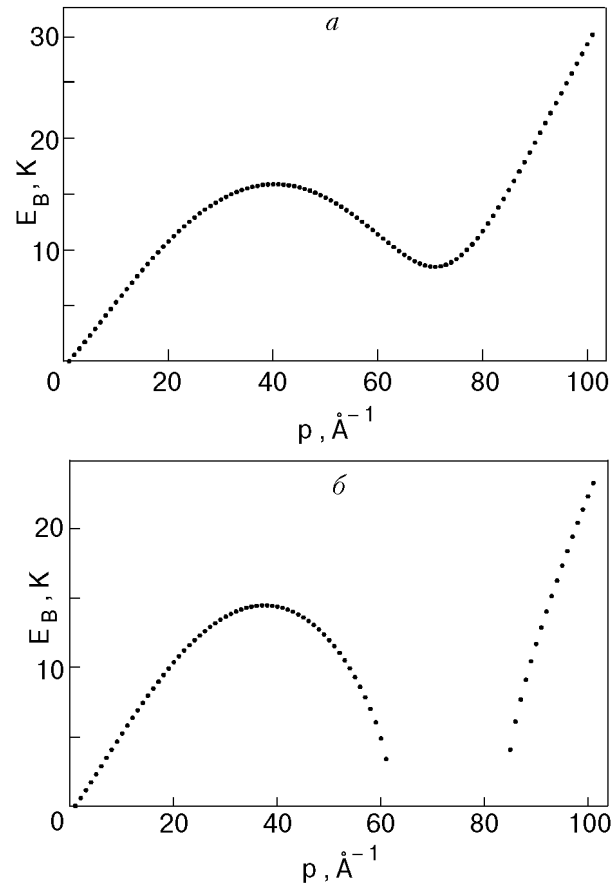


Рис. 2. а – Боголюбовский спектр (31) для разреженного почти идеального бозе-газа, полученный путем подстановки потенциала (30) при независимом подборе двух параметров  $\alpha = 2,5$  и  $V_0/a^3 = 169 \text{ К}$  при  $a = 2,44 \text{ \AA}$ . б – Неустойчивость боголюбовского спектра, полученного путем подстановки потенциала (30) в соотношение (31) для параметров  $n = 2,17 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$  и  $a = 2,44 \text{ \AA}$ , характерных для  $^4\text{He}$ . Здесь, а также на рис. 3–5, импульс  $p$  выражается через число разбиений  $l$  интервала интегрирования; номер разбиения  $i$  связан с импульсом следующим образом:  $p = 2\pi i/al$ .

ванное взаимодействие между бозонами принимает вид

$$\tilde{V}(\mathbf{p}, \omega) = \frac{V_0 \sin(pa)}{pa - V_0 \Pi(\mathbf{p}, \omega) \sin(pa)}, \quad (32)$$

где  $\Pi(\mathbf{p}, \omega)$  – поляризационный оператор бозонов (18), который с учетом полюсных частей функций Грина (3) и (4) вычислен в Приложении.

Важным свойством перенормированного потенциала (32) является то, что в тех областях фазового объема  $\mathbf{p}, \omega$ , в которых  $\Pi(\mathbf{p}, \omega) < 0$ , благодаря экранировке происходит ослабление отталкивания при  $\sin(pa) > 0$  и эффективное усиление притяжения при  $\sin(pa) < 0$ .

Как следует из (23) и (26), основное влияние на спектр квазичастиц  $E(\mathbf{p})$  оказывает форма потенциала взаимодействия (32) на «массовой поверхности», когда  $\omega = E(\mathbf{p})$ . Что касается вершин  $\Lambda$  и  $\Gamma$ , то их сравнительно слабую зависимость от  $\mathbf{p}$  и  $\omega$  можно не учитывать, полагая  $\Lambda \approx \Gamma \approx \Lambda(0, 0) = \text{const}$  и включая постоянную величину  $\Lambda(0, 0)$  в константу  $V_0$ , которая рассматривается ниже как свободный подгоночный параметр. Зависимости функций  $\tilde{\Psi}_{ij}(\mathbf{p}, \epsilon)$  от  $p$ , которые определяются интегральными уравнениями (16) при  $\epsilon = E(\mathbf{p})$ , как будет видно из дальнейшего, также являются гораздо более слабыми, чем зависимость потенциала  $\tilde{V}(\mathbf{p}, \omega)$ .

Ключевым моментом в поведении «экранированного» потенциала  $\tilde{V}(\mathbf{p}, \omega)$  является то, что поляризационный оператор  $\Pi(\mathbf{p}, E(p))$  на «массовой поверхности» при всех  $p > 0$  остается отрицательным, если спектр квазичастиц  $E(p)$  устойчив по отношению к распадам на пары квазичастиц [36], т.е. если при любых  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$  выполняются условия

$$\begin{aligned} E(\mathbf{p}) &< E(\mathbf{k}) + E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) ; \\ E(\mathbf{k}) &< E(\mathbf{p}) + E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) . \end{aligned} \quad (33)$$

Действительно, как следует из полученных в Приложении выражений для подынтегральных функций  $I_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega)$ , при условии (33) и  $\omega = E(\mathbf{p})$  знаменатель перед фигурными скобками всегда отрицателен,

$$[E(\mathbf{k}) - E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{k} - \mathbf{p})] < 0 ,$$

тогда как знаменатель в первом члене в фигурных скобках всегда положителен,

$$[E(\mathbf{k}) - E(\mathbf{p}) + E(\mathbf{k} - \mathbf{p})] > 0 ,$$

и меньше, чем положительный знаменатель во втором члене,

$$[E(\mathbf{k}) + E(\mathbf{p}) + E(\mathbf{k} - \mathbf{p})] > 0 .$$

При этом, как показали численные расчеты, числители обоих членов остаются положительными (см. рис. 3) при любых  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$ , поэтому общий знак функций  $I_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega)$  является отрицательным, так что  $\Pi(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) < 0$ .

Учитывая отрицательный знак и относительно слабую импульсную зависимость  $\Pi(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}))$ , аппроксимируем перенормированный потенциал (32) при  $\omega = E(\mathbf{p})$  более простым потенциалом:

$$\tilde{V}(\mathbf{p}) = \frac{V_0 \sin(pa)}{pa - \alpha \sin(pa)} , \quad (34)$$

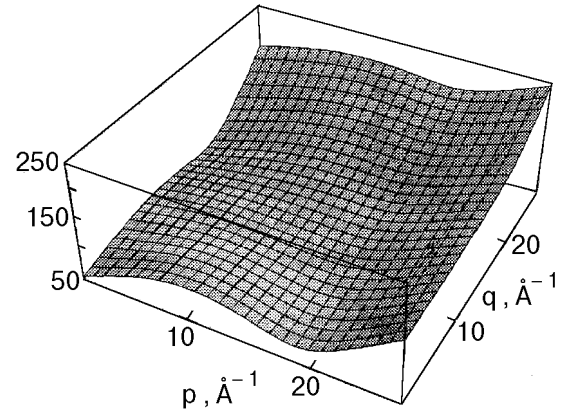
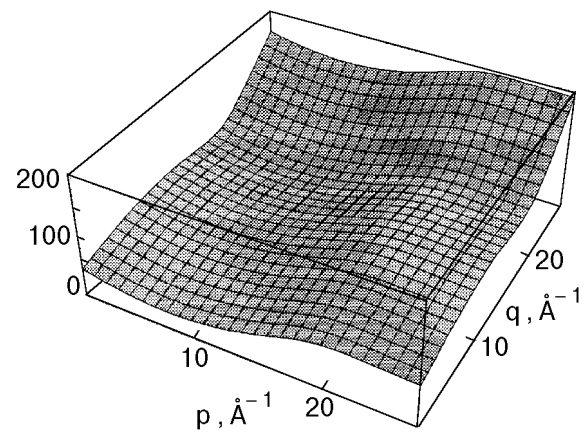


Рис. 3. Импульсные зависимости положительных числителей (приведены в кельвинах) двух слагаемых в выражении для функции  $I_{11}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega)$ , входящей в определение поляризационного оператора (см. Приложение).

где  $\alpha = V_0 |\tilde{\Pi}|$ , а  $|\tilde{\Pi}| = |\overline{\Pi(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}))}|$  — среднее значение модуля поляризационного оператора на массовой поверхности в области существования спектра  $E(p)$ . В дальнейшем все численные расчеты проводятся на основе модельного потенциала (34), в котором  $\alpha$  является свободным подгоночным параметром (наряду с  $V_0$ ). На рис. 1 показана зависимость  $\tilde{V}(p)$  для разных значений безразмерного параметра  $\alpha$ .

В качестве еще одного подгоночного параметра рассматриваемой модели выберем эффективную массу квазичастиц  $m^*$ , которая связана с массой  $\tilde{m}^*$ , определяющей согласно (9) и (10) скорость звука (9) в пределе  $p \rightarrow 0$ .

В результате уравнения (20) и (21) для функций  $\tilde{\Psi}_{ij}$  приводятся к более простому виду:

$$\tilde{\Psi}_{11}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \left[ \frac{A_0(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})} - 1 \right] , \quad (35)$$

$$\tilde{\Psi}_{12}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \frac{n_0 \tilde{V}(\mathbf{k}) + \Psi_{12}(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})} , \quad (36)$$



где

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{A_0^2(\mathbf{p}) - [n_0 \tilde{V}(\mathbf{p}) + \Psi_{12}(\mathbf{p})]^2}; \quad (37)$$

$$A_0(\mathbf{p}) = n_0 \tilde{V}(\mathbf{p}) + [\tilde{\Psi}_{11}(\mathbf{p}) - \tilde{\Psi}_{11}(0)] + \tilde{\Psi}_{12}(0) + \frac{p^2}{2m^*}, \quad (38)$$

причем эффективная масса  $m^*$  связана с  $\tilde{m}^*$  соотношением

$$\frac{1}{\tilde{m}^*} = \frac{1}{m^*} + p^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_{11}(0)}{\partial |\mathbf{p}|^2}, \quad (39)$$

так что при  $p \rightarrow 0$  из (37) получаем

$$E(p \rightarrow 0) = p \sqrt{[n_0 \tilde{V}(0) + \tilde{\Psi}_{12}(0)]/\tilde{m}^*}, \quad (40)$$

где  $\tilde{V}(0) = V_0/(1 + \alpha)$ . Параметры  $V_0$ ,  $\alpha$ ,  $m^*$  подбираются таким образом, чтобы фазовая скорость  $E(p \rightarrow 0)/p$  совпадала со скоростью гидродинамического звука  $c_1 \approx 236$  м/с в жидком  ${}^4\text{He}$ . С другой стороны, выбор этих параметров должен обеспечить максимальное совпадение спектра  $E(p)$  с экспериментальным спектром  $E_{\text{exp}}(p)$  в  ${}^4\text{He}$  [24–27].

На рис. 4 показаны импульсные зависимости функций  $\tilde{\Psi}_{11}(p)$ ,  $\tilde{\Psi}_{12}(p)$  и  $A_0(p)$ , полученные согласно (35), (36) и (38), для некоторого набора параметров  $V_0$ ,  $\alpha$ ,  $m^*$ , а на рис. 5 — зависимость спектра квазичастиц  $E(p)$ , вычисленная согласно (37). Как видно, в основном немонотонный характер спектра  $E(p)$  и, в частности, наличие «ротонного» минимума определяются импульсными зависимостями функций  $\tilde{\Psi}_{11}(p)$  и  $A_0(p)$ , которые имеют глубокие минимумы благодаря осцилляциям знакопеременного потенциала  $\tilde{V}(p)$  в области  $p < 2\pi/a$  (см. рис. 1). При данном выборе параметров теоретический спектр хорошо согласуется с экспериментальным спектром  ${}^4\text{He}$  как по положению, так и по абсолютным значениям максимума и минимума  $E(p)$ . При этом плотность БЭК, вычисленная согласно (24), равна 10% полной

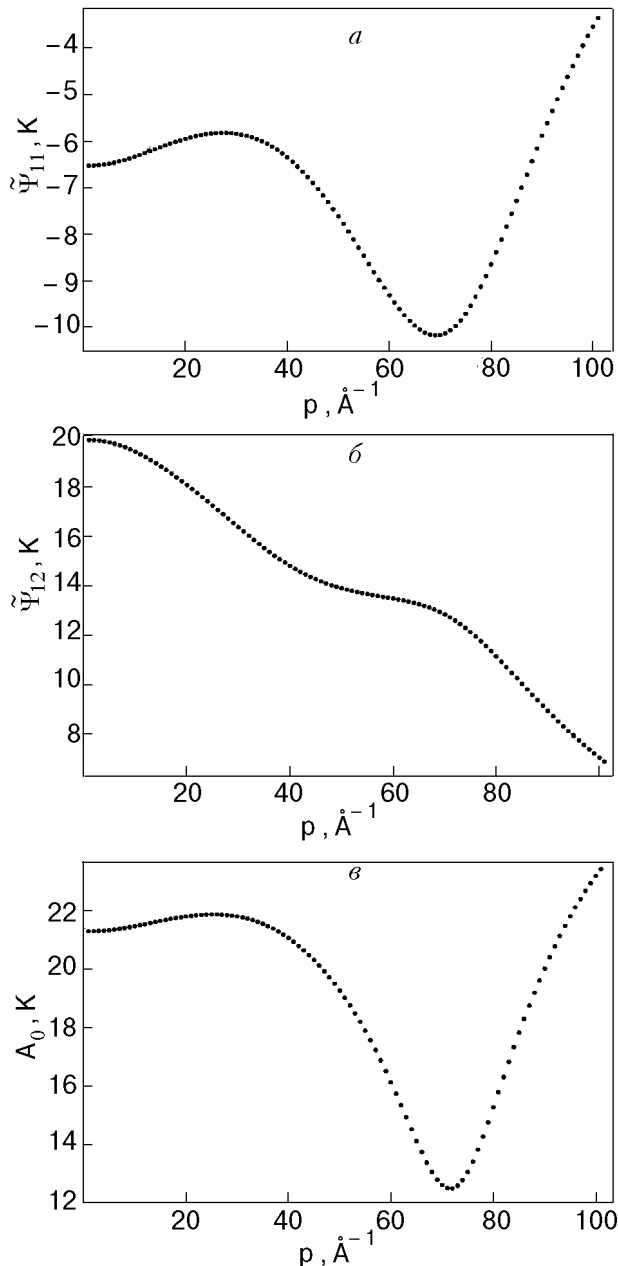


Рис. 4. Импульсные зависимости функций  $\tilde{\Psi}_{11}(p)$  (а),  $\tilde{\Psi}_{12}(p)$  (б),  $A_0(p)$  (в), полученные согласно (35), (36) и (38) для следующего набора параметров:  $n_0 = 10\% n$ ,  $V_0/a^3 = 147$  К,  $\alpha = 3,65$ ,  $m/m^* = 0,00175$ .

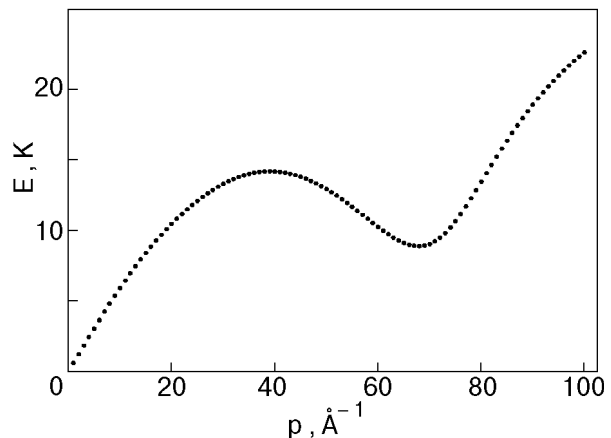


Рис. 5. Спектр элементарных возбуждений  $E(p)$ , полученный согласно (37), для того же набора параметров, что и на рис. 4. Значения  $E_{\text{max}} = 14$  К и  $E_{\text{min}} = 8,61$  К, а также найденные согласно (27) и (24) скорость гидродинамического звука  $c_1 = 2,37 \cdot 10^4$  см/с и полная концентрация квазичастиц в бозе-жидкости  $n = 2,17 \cdot 10^{22}$  см $^{-3}$  совпадают с экспериментальными.

плотности  $n$ , что согласуется с экспериментальными данными [9].

#### 4. Структура сверхтекучего состояния бозе-жидкости при $T \neq 0$

Рассмотрим СТ состояние бозе-жидкости при  $T \neq 0$ , когда наряду с  $\rho_s(T)$  появляется нормальная компонента  $\rho_n(T)$ . Как было показано в [31,32], выражения для перенормированных функций Грина  $\tilde{G}_{ij}(p)$ , построенных на комбинированных переменных (1), (2), в области малых  $p \neq 0$  при  $T \rightarrow 0$  имеют вид

$$\tilde{G}_{11}(p) = -n_s g_{\varphi\varphi}(p) - i g_{\varphi\pi}(p) - \frac{1}{4\rho_s} g_{\pi\pi}(p) - \frac{n_s}{2} \Phi_{\varphi\varphi}(p) \dots ; \quad (41)$$

$$\tilde{G}_{12}(p) = n_s g_{\varphi\varphi}(p) - \frac{1}{4n_s} g_{\pi\pi}(p) - \frac{n_s}{2} \Phi_{\varphi\varphi}(p) \dots ; \quad (42)$$

где

$$\Phi_{\varphi\varphi}(p) = \int_{|q| < q_0} \frac{d^4 q}{2\pi^4} g_{\varphi\varphi}(q) g_{\varphi\varphi}(p-q),$$

$$p = (\mathbf{k}, \varepsilon), \quad q = (\mathbf{q}, \omega), \quad (43)$$

а  $g_{\mu\nu}(\mathbf{p})$  — «гидродинамические» функции Грина, связанные с длинноволновыми флуктуациями фазы и плотности конденсата ( $\mu, \nu = \varphi, \pi$ ). Вычисленные в [11] выражения для  $g_{\varphi\varphi}(p)$ ,  $g_{\varphi\pi}(p)$  и  $g_{\pi\pi}(p)$  при  $T > 0$  содержат суммы двух полюсных членов, соответствующих первому и второму звукам со скоростями  $c_1$  и  $c_2$  в бозе-жидкости с нормальной и СТ компонентами:

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \varepsilon) = \frac{(a_{\mu\nu} - d_{\mu\nu} \rho_n / \rho)}{\varepsilon^2 - c_1^2 k^2} + \frac{b_{\mu\nu} \rho_n / \rho}{\varepsilon^2 - c_2^2 k^2},$$

$$\mu, \nu = \varphi, \pi, \quad (44)$$

где  $\rho = \rho_n + \rho_s$  — полная плотность жидкости, а коэффициенты  $a_{\mu\nu}$ ,  $d_{\mu\nu}$  и  $b_{\mu\nu}$  не зависят от  $T$  при низких температурах. Этот результат восстанавливает однозначное соответствие между микроскопической полевой теорией сверхтекучести [7,8] и макроскопической двухжидкостной гидродинамикой [36,37].

Из (41), (42) и (44) следует, что полюсные части перенормированных функций Грина  $\tilde{G}_{ij}$  могут быть представлены в виде

$$\tilde{G}_{ij}(\mathbf{k}, \varepsilon) = \frac{(A_{ij} - D_{ij} \rho_n / \rho)}{\varepsilon^2 - c_1^2 k^2} + \frac{B_{ij} \rho_n / \rho}{\varepsilon^2 - c_2^2 k^2}, \quad i, j = 1, 2. \quad (45)$$

В дальнейшем предполагается, что выражение (45) справедливо во всем интервале температур  $T < T_\lambda$ .

Как следует из (45), при  $T \rightarrow 0$ , когда  $\rho_n \rightarrow 0$ , главный вклад в интегралы по энергии  $\varepsilon$  в (16) вносит полюс  $\varepsilon = c_1 k$  функций Грина, соответствующий первому звуку. Однако в области более высоких температур,  $T > 1$  К, когда  $\rho_n \sim \rho_s$ , благодаря сильному неравенству  $c_1 \gg c_2$  основную роль начинает играть низкоэнергетический полюс  $\varepsilon = c_2 k$ , соответствующий второму звуку.

При конечных температурах ( $T \neq 0$ ) с учетом вкладов первого и второго полюсов функций Грина (45), для собственно-энергетических частей при  $\Gamma = 1$  получаем

$$\tilde{\Sigma}_{ij}(\mathbf{k}, T) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \left\{ \left[ A_{ij} - D_{ij} \frac{\rho_n(T)}{\rho} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{c_1 q} \operatorname{cth} \left( \frac{c_1 q}{2T} \right) + B_{ij} \frac{\rho_n(T)}{\rho} \frac{1}{c_2 q} \operatorname{cth} \left( \frac{c_1 q}{2T} \right) \right\}. \quad (46)$$

Следует подчеркнуть, что длинноволновое приближение для функций Грина (45) в данном случае оправданно благодаря расходимости температурного фактора  $\operatorname{cth}(c_2 q / 2T)$  при  $q \rightarrow 0$  и достаточно быстрому убыванию ядра взаимодействия при  $q \rightarrow \infty$ . Более того, здесь не требуется согласования системы уравнений (46) с выражением для перенормированного спектра квазичастиц  $E(k)$ , как это обычно делается в микроскопической полевой теории при  $T \rightarrow 0$ , поскольку подстановка в выражения для функций Грина  $\tilde{G}_{ij}(p)$  эмпирических спектров первого и второго звуков (с экспериментальными значениями скоростей  $c_1$  и  $c_2$ ) соответствует автоматическому учету всех необходимых перенормировок.

С помощью (46) можно определить СТ параметр порядка при  $T \neq 0$ :

$$\tilde{\Sigma}_{12}(0, T) = \Psi_0(T) + \Psi_s(T) \frac{\rho_s(T)}{\rho}, \quad (47)$$

где

$$\Psi_0(T) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{V}(q) \times \left[ \frac{A_{12} - D_{12}}{c_1 q} \operatorname{cth} \left( \frac{c_1 q}{2T} \right) + \frac{B_{12}}{c_2 q} \operatorname{cth} \left( \frac{c_2 q}{2T} \right) \right], \quad (48)$$

$$\Psi_s(T) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{V}(q) \times \left[ \frac{D_{12}}{c_1 q} \operatorname{cth} \left( \frac{c_1 q}{2T} \right) - \frac{B_{12}}{c_2 q} \operatorname{cth} \left( \frac{c_2 q}{2T} \right) \right]. \quad (49)$$

С другой стороны, предполагая, что при  $T \neq 0$  между  $\rho_s(T)$  и  $\tilde{\Sigma}_{12}(0, T)$  сохраняется соотношение, аналогичное (28), получаем следующее выражение для доли СТ компоненты в бозе-жидкости:

$$\frac{\rho_s(T)}{\rho} = \frac{\Psi_0(T)}{\tilde{V}(0)n} \left[ 1 - \frac{\Psi_s(T)}{\tilde{V}(0)n} \right]^{-1}. \quad (50)$$

Зависящая от  $T$  плотность БЭК  $\rho_0(T) = mn_0(T)$ , согласно (19) и (45), определяется соотношением

$$\frac{\rho_0(T)}{\rho} = 1 - \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left\{ \left[ A_{11} - D_{11} \frac{\rho_n(T)}{\rho} \right] \times \frac{1}{c_1 q} \operatorname{cth} \left( \frac{c_1 q}{2T} \right) + B_{11} \frac{\rho_n(T)}{\rho} \frac{1}{c_2 q} \operatorname{cth} \left( \frac{c_2 q}{2T} \right) \right\}. \quad (51)$$

Скорость первого (гидродинамического) звука практически не зависит от  $T$  и в данном приближении может быть определена как  $c_1 = [\tilde{V}(0)n/m^*]^{1/2}$ , тогда как скорость второго звука  $c_2$  существенно зависит от  $T$ , изменяясь от величины  $c_2(0) = c_1/\sqrt{3}$  при  $T = 0$  до значения  $c_2(T) \approx 20$  м/с в области  $T > 1$  К, а при  $T \rightarrow T_\lambda$  скорость  $c_2 \rightarrow 0$ . Таким образом, по мере приближения к  $\lambda$ -точке, благодаря сильному неравенству  $c_1 \gg c_2$ , основную роль начинают играть последние слагаемые в подынтегральных выражениях (48) и (51), пропорциональные  $B_{12}$  и  $B_{11}$  и содержащие температурный фактор

$$f(q, T) = \frac{1}{c_2(T)q} \operatorname{cth} \left( \frac{c_2(T)q}{2T} \right) \approx \frac{2T}{c_2^2(T)q^2}, \quad c_2 q < T, \quad (52)$$

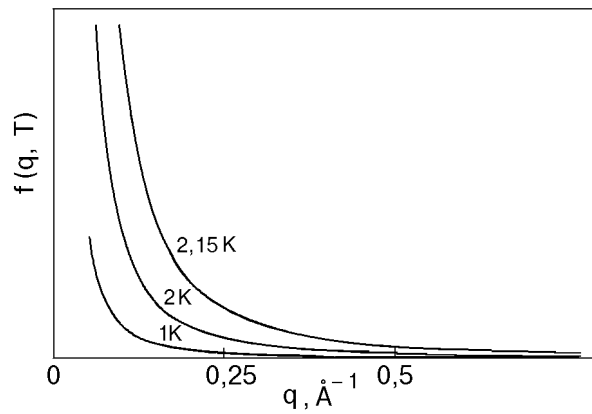


Рис. 6. Температурный фактор  $f(q, T)$ , определяемый согласно соотношению (52).

который квадратично расходится при  $q \rightarrow 0$ . При этом ширина сингулярного пика быстро растет с повышением  $T$  и уменьшением  $c_2$  (см. рис. 6).

В результате в интеграле (48) с ростом  $T$  возрастает вклад отталкивательной части потенциала  $\tilde{V}(q) > 0$  в длинноволновой области  $q < \pi/a$  и происходит уменьшение функции  $\Psi_0(T)$ , которая играет роль СТ параметра порядка и является положительной при низких  $T < c_2 q$  за счет сильного притяжения  $\tilde{V}(q) < 0$  в области  $\pi/a < q < 2\pi/a$  (см. рис. 1). При некоторой критической температуре  $T = T_c$  функция  $\Psi_0(T)$  обращается в нуль, а затем становится отрицательной (при  $T > T_c$ ), что соответствует разрушению СТ состояния ( $\rho_s = 0$ ), т.е.  $T_c$  совпадает с  $\lambda$ -точкой.

Аналогичным образом при повышении  $T$  происходит рост отрицательного интеграла в (51) и уменьшение  $\rho_0(T)$  до тех пор, пока в некоторой точке  $T = T_0$  плотность БЭК не обращается в нуль и формально становится отрицательной при  $T > T_0$ . Параметры взаимодействия  $\tilde{V}(q)$  и коэффициенты  $B_{11}$  и  $B_{12}$  подобраны таким образом, чтобы температуры  $T_c$  и  $T_0$  совпадали и равнялись  $T_\lambda$ . Результаты численных расчетов, проведенных согласно (50) для параметров  $A_{11} = 6,24$  К,  $D_{11} = 2$  К,  $B_{11} = 0,00015$  К,  $A_{12} = 6,38$  К,  $D_{12} = 3,14$  К,  $B_{12} = 0,0026$  К, приведены на рис. 7. Разумеется, данные результаты, соответствующие приближению самосогласованного поля, неприменимы непосредственно вблизи  $\lambda$ -точки, где определяющую роль играют термодинамические флуктуации [38], однако зависимости, показанные на рис. 7, качественно правильно описывают температурную зависимость плотности СТ компоненты.

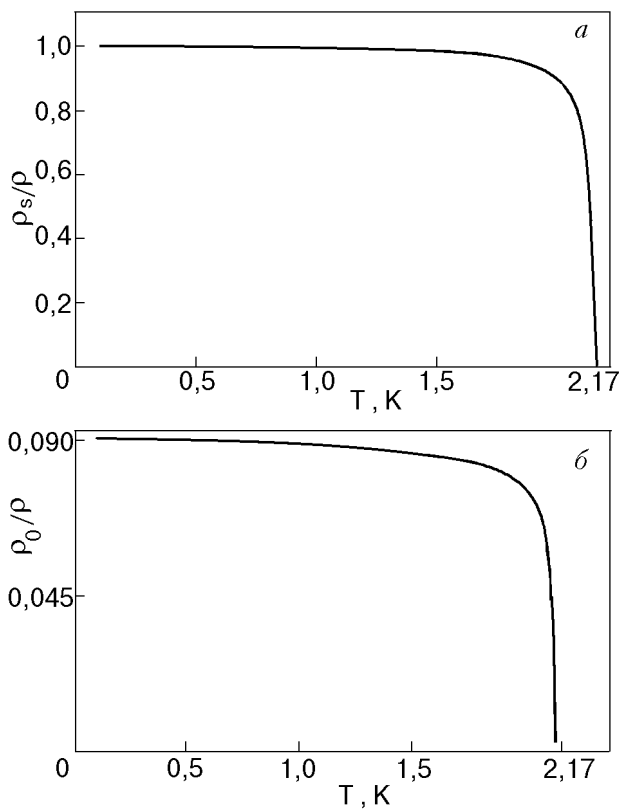


Рис. 7. Плотность сверхтекучей компоненты  $\rho_s(T)/\rho$ , вычисленная согласно (50) (а), и зависимость плотности БЭК  $\rho_0(T)/\rho$ , вычисленная согласно (51) (б), для следующего набора параметров:  $A_{11} = 6,24$  К,  $D_{11} = 2$  К,  $B_{11} = 0,00015$  К,  $A_{12} = 6,38$  К,  $D_{12} = 3,14$  К,  $B_{12} = 0,0026$  К.

### 5. Критерий сверхтекучести и предельные критические скорости

В заключение кратко обсудим вопросы о применимости критерия сверхтекучести Ландау к He II и о величине предельной критической скорости в отсутствие квантовых вихрей в бозе-жидкости при сосуществовании БЭК и ПКК.

Как отмечалось во Введении, спектр элементарных возбуждений  $E_{\text{exp}}(p)$ , наблюдаемый в экспериментах по нейтронному рассеянию [24–27], приводит к весьма завышенной величине критической скорости, определяемой ротонным минимумом, в соответствии с критерием Ландау по сравнению с экспериментально измеряемыми скоростями разрушения СТ потока. Это связано с рождением квантовых вихрей и вихревых колец в He II [23], однако в тех условиях, когда рождение и(или) движение вихрей затруднено, критические скорости резко возрастают [28,29] и при низких температурах  $T_c < 1$  К могут достигать значений, сравнимых с  $v_c = \min [\epsilon(p)/p] = 60$  м/с [30].

Следует подчеркнуть, что эта ситуация аналогична наблюдаемой в сверхпроводниках II рода, в которых критический ток  $j_c$  определяется условием рождения и закрепления (пиннинга) квантовых вихрей Абрикосова на поверхности сверхпроводника или вблизи различных дефектов кристаллической решетки, тогда как истинное максимальное значение  $j_c$  (так называемый критический ток распаривания, определяемый процессом распада куперовских пар [12]) гораздо больше и наблюдается только в достаточно тонких пленках и проводочках, толщины которых гораздо меньше лондонской глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник, что препятствует рождению вихрей.

В бозе-жидкости  $^4\text{He}$  при конечных температурах  $T \neq 0$ , наряду со спектром  $E_{\text{exp}}(p)$ , который при  $p \rightarrow 0$  соответствует первому (гидродинамическому) звуку с фазовой скоростью  $c_1$ , благодаря появлению нормальной компоненты  $\rho_n$  в He II возникает второй звук, скорость которого  $c_2 \ll c_1$  в области  $T > 1$  К. Как известно [36,37], ветвь второго звука в силу малости теплового расширения жидкого  $^4\text{He}$  представляет собой фактически только колебания температуры (энтропии) без заметного переноса суммарной массы вещества нормальной  $\rho_n$  и сверхтекучей  $\rho_s$  компонент, колебания которых происходят в противофазе. Поэтому возбуждения второго звука с энергией  $\epsilon_2(p) = c_2 p$  не могут наблюдаться в стандартных экспериментах по нейтронному рассеянию, в отличие от первого звука  $\epsilon_1(p) = c_1 p$ , который представляет собой синфазные колебания плотностей  $\rho_s$  и  $\rho_n$ . В то же время в двухкомпонентной бозе-жидкости разрешено сосуществование двух разных типов акустических голдстоуновских возбуждений, которые связаны, с одной стороны, со спонтанным нарушением калибровочной симметрии, обусловленной вырождением по фазе когерентного СТ конденсата  $\rho_s$  при  $T \rightarrow 0$ , и с нарушением непрерывной трансляционной симметрии, т.е. однородности полной плотности  $\rho = \rho_n + \rho_s$  (первый звук), а с другой стороны, с пространственно неоднородными отклонениями температуры от однородного распределения благодаря колебаниям плотности газа нормальных возбуждений  $\rho_n$  (второй звук). Тем не менее возбуждения второго звука переносят энергию и поэтому должны учитываться при определении минимальной критической скорости в соответствии с исходной концепцией критерия сверхтекучести Ландау [5], который включает все типы возбуждений квантовой жидкости.

В связи с этим можно предположить, что в той области температур, где  $c_2(T) < v_c \approx 60$  м/с, предельно допустимая критическая скорость макроскопического СТ потока в He II в отсутствие (или при сильном закреплении) квантовых вихрей не может превышать величины порядка скорости второго звука  $c_2(T)$ , которая при  $T \rightarrow T_\lambda$  стремится к нулю вместе с плотностью СТ компоненты  $\rho_s(T)$ . Именно такая ситуация характерна для сверхпроводников, в которых критический ток распаривания обращается в нуль в критической точке  $T = T_c$  вместе с энергетической щелью  $\Delta$  в спектре квазичастиц.

Наконец, следует заметить, что сосуществование слабого БЭК и интенсивного ПКК сохраняет целочисленную величину кванта циркуляции СТ скорости в вихрях  $\kappa = \hbar/m$  благодаря полной взаимной когерентности этих конденсатов в СТ компоненте  $\rho_s$ . Действительно, достаточно сильное эффективное притяжение для экранированной фурье-компоненты сингулярного потенциала «твердых сфер» обеспечивает образование конденсата связанных бозонных пар с положительным знаком парного параметра порядка  $\tilde{\Psi}_{12}(0)$ , фаза которого в этом случае совпадает с фазой БЭК.

## 6. Выводы

Таким образом, использование перенормированной полевой теории для описания СТ состояния бозе-жидкости с учетом малой плотности одночастичного БЭК позволяет сформулировать самосогласованную модель сверхтекучести, в которой СТ компонента при  $T \rightarrow 0$  представляет собой когерентную суперпозицию слабого БЭК и интенсивного ПКК, возникающего благодаря эффективному притяжению между бозонами в импульсном пространстве, и в рамках модели «твердых сфер» получить явный вид спектра квазичастиц, который совпадает с экспериментальным спектром элементарных возбуждений в  $^4\text{He}$ . Испол-

зование эмпирических данных о скоростях первого и второго звуков при  $T \neq 0$  позволяет сравнительно просто и самосогласованным образом описать СТ состояние вплоть до точки  $\lambda$ -перехода, а также получить условие на ограничение критической скорости  $v_c$  в макроскопических потоках He II в отсутствие квантовых вихрей скоростью второго звука  $c_2(T)$ .

В заключение выражаем искреннюю благодарность П. И. Фомину за многочисленные полезные дискуссии.

## Приложение

Поляризационный оператор (13) может быть вычислен без учета вершинной части  $\Gamma$  с использованием выражений (3)–(6) в виде

$$\Pi(\mathbf{p}, \omega) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} [I_{11}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) + I_{12}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega)], \quad (\text{П.1})$$

где

$$I_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) = i \oint \frac{dz}{2\pi} \tilde{G}_{ij}(\mathbf{k}, z) \tilde{G}_{ij}(\mathbf{k} - \mathbf{p}, z - \omega). \quad (\text{П.2})$$

Предположим, что функции Грина  $\tilde{G}_{ij}$  имеют только один полюс внутри контурных интегралов:

$$\tilde{G}_{11}(\mathbf{k}, \varepsilon) = \frac{\varepsilon + (k^2/2m) - \mu + \tilde{\Sigma}_{11}(-\mathbf{k}, -\varepsilon)}{\varepsilon^2 - E^2(\mathbf{k}) + i\delta}; \quad (\text{П.3})$$

$$\tilde{G}_{12}(\mathbf{k}, \varepsilon) = \frac{\tilde{\Sigma}_{12}(\mathbf{k}, \varepsilon)}{\varepsilon^2 - E^2(\mathbf{k}) + i\delta}; \quad \delta \rightarrow 0. \quad (\text{П.4})$$

В результате вычислений интегралов (П.2) с учетом полюсов в точках  $\varepsilon = E(\mathbf{k})$  и  $\varepsilon = E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + \omega$  в комплексной плоскости  $Z$  получаем:

$$I_{11}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2[E(\mathbf{k}) - E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) - \omega]} \times$$

$$d \times \left\{ \left[ E(\mathbf{k}) + \frac{k^2}{2m} - \mu + \tilde{\Sigma}_{11}(-\mathbf{k}, -E(\mathbf{k})) \right] \frac{[E(\mathbf{k}) - \omega + [(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2/2m] - \mu + \tilde{\Sigma}_{11}(-\mathbf{k} + \mathbf{p}, -E(\mathbf{k}) + \omega)]}{E(\mathbf{k}) [E(\mathbf{k}) + E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) - \omega]} - \right.$$

$$\left. - \frac{[E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + \omega + (k^2/2m) - \mu + \tilde{\Sigma}_{11}(-\mathbf{k}, -E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) - \omega)]}{E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) [E(\mathbf{k}) + E(\mathbf{k} + \mathbf{p}) + \omega]} \left[ E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2}{2m} - \mu + \tilde{\Sigma}_{11}(-\mathbf{k} + \mathbf{p}, -E(\mathbf{k} - \mathbf{p})) \right] \right\}, \quad (\text{П.5})$$

$$I_{12}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2[E(\mathbf{k}) - E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) - \omega]} \times \left\{ \frac{\tilde{\Sigma}_{12}(\mathbf{k}, E(\mathbf{k})) \tilde{\Sigma}_{12}(\mathbf{k} - \mathbf{p}, E(\mathbf{k}) - \omega)}{E(\mathbf{k}) [E(\mathbf{k}) + E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) - \omega]} - \frac{\tilde{\Sigma}_{12}(\mathbf{k}, E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + \omega) \tilde{\Sigma}_{12}(\mathbf{k} - \mathbf{p}, E(\mathbf{k} - \mathbf{p}))}{E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) [E(\mathbf{k}) + E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + \omega]} \right\}. \quad (\text{П.6})$$

В статическом пределе ( $\omega \rightarrow 0, p \rightarrow 0$ ) выражение (П.5) приводится к виду

$$I_{11}(0, \mathbf{k}, 0) = -\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{E^2(\mathbf{k})} \left[ E(\mathbf{k}) + \frac{k^2}{2m} - \mu + \tilde{\Sigma}_{11}(\mathbf{k}, E(\mathbf{k})) \right]^2 + \left[ \frac{2}{E(\mathbf{k})} \left( 1 + \frac{\partial \tilde{\Sigma}_{11}(k)}{\partial \varepsilon} \right) - \frac{k}{mE(k)} \frac{1}{\partial E(k)/\partial k} \right] \left[ E(\mathbf{k}) + \frac{k^2}{2m} - \mu + \tilde{\Sigma}_{11}(\mathbf{k}, E(\mathbf{k})) \right] \right\}. \quad (\text{П.7})$$

Отсюда следует, что в значительной области импульсного пространства функция  $I_{11}(0, \mathbf{k}, 0) < 0$ . Аналогичный результат получаем для функции (П.6) при  $\mathbf{p} = 0$  и  $\omega = 0$ , т.е.  $I_{12}(0, \mathbf{k}, 0) < 0$ , так что статический поляризационный оператор бозонов  $\Pi(0, 0)$  является отрицательной величиной, что соответствует ослаблению «экранированного» отталкивания при  $p \rightarrow 0$ .

Из (П.5) и (П.6) также видно, что на массовой поверхности  $\omega = E(\mathbf{p})$  интегралы  $I_{11}$  и  $I_{12}$  в широкой области импульсного пространства остаются отрицательными благодаря отрицательному знаку общего знаменателя  $[E(\mathbf{k}) - E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) - E(\mathbf{p})] < 0$ . Положительный знак знаменателя  $[E(\mathbf{k}) + E(\mathbf{k} - \mathbf{p}) - E(\mathbf{p})] > 0$  связан с тем, что спектр квазичастиц  $E(p)$  является нераспадным.

Таким образом, поляризационный оператор на массовой поверхности  $\varepsilon = E(\mathbf{p})$  является отрицательным во всей области  $p < 2\pi/a$ , что приводит к усилению притяжения в области  $\pi/a < p < 2\pi/a$ , где  $\sin(pa) < 0$ .

1. S. Patterman, P. H. Roberts, C. A. Jones, and A. Larraza, in: *Excitations in Two-Dimensional and Three-Dimensional Quantum Fluids*, A. F. G. Wyatt and H. J. Lauter (eds.), New York (1991).
2. V. Fak, L. P. Regnault, and J. Bossy, *J. Low Temp. Phys.* **89**, 345 (1992).
3. H. R. Glyde, *J. Low Temp. Phys.* **93**, 861 (1993).
4. Э. А. Пашицкий, *ФНТ* **25**, 115 (1999).
5. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **11**, 592 (1941); там же **17**, 91 (1947).
6. Н. Н. Боголюбов, *Изв. АН СССР, сер. физ.* **11**, 77 (1947); *Physica* **9**, 23 (1947).
7. С. Т. Беляев, *ЖЭТФ* **34**, 417, 433 (1958).
8. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
9. A. F. G. Wyatt, *Nature* **391**, N 6662, p. 56 (1998).
10. Ю. А. Непомнящий, А. А. Непомнящий, *ЖЭТФ* **75**, 976 (1978).

11. Ю. А. Непомнящий, *ЖЭТФ* **85**, 1244 (1983); там же **89**, 511 (1985).
12. Дж. Шриффер, *Теория сверхпроводимости*, Наука, Москва (1970).
13. W. A. B. Evans and Y. Imry, *Nuovo Cim.* **63**, 155 (1969).
14. A. Coniglio and F. Manchini, *Nuovo Cim.* **63**, 227 (1969).
15. R. Hasting and T. W. Halley, *Phys. Rev.* **B12**, 267 (1975).
16. П. С. Кондратенко, *ТМФ* **22**, 228 (1975).
17. Ю. А. Непомнящий, Э. А. Пашицкий, *ЖЭТФ* **98**, 178 (1990).
18. С. И. Вильчинский, Э. А. Пашицкий, П. И. Фомин, *ФНТ* **23**, 1267 (1997).
19. N. Hugenholtz and D. Pines, *Phys. Rev.* **116**, 489 (1959).
20. L. Reatto and C. V. Chester, *Phys. Rev.* **155**, 88 (1967).
21. G. W. Rayfield and F. Reif, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 305 (1963).
22. S. C. Whitmore and W. Zimmermann, *Phys. Rev.* **166**, 181 (1968).
23. С. Паттерман, *Гидродинамика сверхтекучей жидкости*, Мир, Москва (1968).
24. H. R. Glyde and E. C. Svensson, in: *Neutron Scattering*, D. L. Price and K. Skold (eds.), *Methods of Experimental Physics*, vol. 23, part B, Academic Press, New York (1987), p. 303.
25. E. F. Tabbot, H. R. Glyde, W. G. Stirling, and E. C. Svensson, *Phys. Rev.* **B38**, 11229 (1988).
26. H. R. Glyde and W. G. Stirling, *Phys. Rev.* **B42**, 4224 (1990).
27. K. H. Andersen, W. G. Stirling, R. Scherm, A. Stanault, B. Fak, H. Godfrin, and A. J. Dianoux, *J. Phys.: Condens. Matter.* **6**, 821 (1994).
28. G. B. Gess, *Low Temp. Phys. LPT-13*, New York, Plenum (1974), p. 302.
29. J. R. Hulin, D. D'Humieres, B. Perrin, and A. Lichaber, *Phys. Rev.* **A9**, 885 (1974).
30. G. Rayfield, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 1467 (1968).
31. В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике*, Наука, Москва (1973).
32. В. Н. Попов, А. В. Середняков, *ЖЭТФ* **77**, 377 (1979).
33. K. A. Bruckner and K. Sawada, *Phys. Rev.* **106**, 1117, 1128 (1957).
34. К. Бракнер, *Теория ядерной материи*, Мир, Москва (1964).
35. J. Gavoret and P. Nozieres, *Ann. Phys.* **28**, 349 (1964).
36. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).

37. Б. Н. Есельсон, В. Н. Григорьев, В. Г. Иванцов, Э. Я. Рудаковский, Д. Г. Саникидзе, И. А. Сербин, *Растворы квантовых жидкостей  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$* , Наука, Москва (1973).
38. В. Л. Покровский, А. З. Паташинский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1965).

## On the structure of the superfluid component and the spectrum of elementary excitations in the quantum Bose-liquid $^4\text{He}$

E. A. Pashitskii and S. I. Vilchynskyy

A self-consistent model of superfluid (SF) Bose-liquid with a single-particle Bose-Einstein condensate (BEC) suppressed by the strong interaction between bosons is constructed. The ratio of the BEC density to the total Bose-liquid one,  $n_0/n \ll 1$ , is used as a small parameter unlike the Bogolyubov theory for almost ideal Bose-gas; the small parameter in the latter is the ratio between the number of overcondensate excitations and the number of particles in the intense BEC,  $(n - n_0)/n_0 \ll 1$ . A closed set of nonlinear integral equations for normal,  $\tilde{\Sigma}_{11}(\mathbf{p}, \omega)$ , and abnormal,  $\tilde{\Sigma}_{12}(\mathbf{p}, \omega)$ , self-energy parts is derived in terms of the renormalized perturbation theory constructed on combined hydrodynamical (for

$p \rightarrow 0$ ) and field (for  $p \neq 0$ ) variables. The use of these variables ensures the analyticity of functions  $\tilde{\Sigma}_{ij}(\mathbf{p}, \epsilon)$  for  $p \rightarrow 0$  and  $\epsilon \rightarrow 0$  and the nonzero value of the SF order parameter  $\tilde{\Sigma}_{12}(0, 0) \neq 0$  for  $T = 0$ . It is shown that the spectral structure of quasi-particles,  $E(p)$ , and, in particular, the existence of the roton minimum are determined by the alternating oscillating behavior of the Fourier component of the pair interaction between bosons in the «solid sphere» model. In this case of great importance is the renormalization («screening») of the pair interaction due to the multiparticle (collective) effects. The renormalization is described by the polarization operator of bosons on the «mass surface» and causes the effective attraction in increase in definite regions of the momentum space. It is shown that in the model under consideration the superfluid component  $\rho_s$  at  $T \rightarrow 0$  is a superposition of the single-particle BEC and the pair coherent condensate similar to the condensate of Cooper pairs in superconductors. The SF state structure at  $T \neq 0$  is considered with due account of the development of a normal component  $\rho_n$  and a branch of the second sound, the velocity of which approaches zero at the  $\lambda$ -point. The points of applicability of the Landau superfluidity criterion and limiting critical velocity of the SF flow with no quantum vortices are discussed.