

Равновесные магнитные характеристики ВТСП с учетом пространственного распределения параметра порядка в сердцевинах вихрей.

I. Равновесная намагниченность

Л. Г. Мамсурова¹, К. С. Пигальский¹, В. В. Погосов², Н. Г. Трусевич¹,

¹ *Институт химической физики им. Н. Н. Семенова РАН, ул. Косыгина, 4, г. Москва, 117977, Россия*

² *Московский физико-технический институт
Институтский пер. 7, г. Долгопрудный, Московск. обл. 141700, Россия
E-mail: mamsurova@chph.ras.ru*

Статья поступила в редакцию 11 августа 2000 г.

Исследуется проблема точности теоретического описания полевых зависимостей равновесной намагниченности $M(H)$ сверхпроводников II рода с параметром Гинзбурга–Ландау $\kappa \gg 1$, полученных в различных приближениях для области магнитных полей H , много меньших второго критического поля H_{c2} . Установлено, что учет пространственного распределения параметра порядка существенно влияет на поведение намагниченности $M(H)$ начиная с самых малых полей, находящихся в непосредственной близости к первому критическому полю H_{c1} . В интервале полей $H_{c1} \leq H \ll H_{c2}$ изучены механизмы и степень влияния на полевую зависимость $M(H)$ таких факторов, как собственная энергия вихревой нити, точность описания пространственного распределения поля вихря, подавление параметра порядка за счет перекрытия вихрей, а также использование принципа суперпозиции полей. Для данного интервала полей получено аналитическое выражение для зависимости $M(H)$ путем прямого вычисления решеточных сумм с учетом влияния структуры вихревых сердцевин.

Досліджено проблему точності теоретичного опису полевих залежностей рівноважної намагніченості $M(H)$ надпровідників II роду з параметром Гінзбурга–Ландау $\kappa \gg 1$, одержаних в різних наближеннях для області магнітних полів, багато менших другого критичного поля H_{c2} . Встановлено, що урахування просторового розподілу параметра порядку суттєво впливає на поведінку намагніченості $M(H)$ починаючи з дуже невеликих полів, які знаходяться в безпосередній близькості до першого критичного поля H_{c1} . В інтервалі полів $H_{c1} \leq H \ll H_{c2}$ вивчено механізми і ступінь впливу на польову залежність $M(H)$ таких факторів, як власна енергія вихрової нитки, точність опису просторового розподілу поля вихору, пригнічення параметра порядку за рахунок перекривання вихорів, а також використання принципу суперпозиції полів. Для даного інтервала полів одержано аналітичний вираз для залежності $M(H)$ шляхом безпосереднього обчислення ґраткових сум з урахуванням впливу структури вихрових серцевин.

PACS: 74.25.Na, 74.20.De

Введение

Проблема учета эффекта подавления параметра порядка в сердцевинах вихрей при вычислении равновесной намагниченности сверхпроводников II рода решалась в рамках различных приближений (см., например, [1–5]). Наиболее обстоятельно эта тема, а также вопрос о «количественной некорректности» широко распространенного в теории сверхпроводимости лондоновского приближения обсуждались в [4].

Действительно, простой анализ показывает, что существует несколько причин, определяющих неточность лондоновского приближения. Первая из них обусловлена невозможностью в рамках данного приближения рассчитать собственную энергию вихревой нити, связанную, в частности, с пространственным изменением параметра порядка (данное приближение предполагает, что вне сердцевин вихрей модуль параметра порядка постоянный, а саму сердцевину описывает двумерной δ -функцией). Вторая причина — погреш-

ность в вычислении электромагнитной энергии, которая возникает вследствие достаточно грубого описания пространственного распределения поля индивидуального вихря (в лондоновской модели, в частности, собственное поле нити расходится на ее оси). Третья причина связана с невозможностью учета дополнительного подавления параметра порядка из-за перекрытия вихрей.

Ясно, что в случае больших полей, когда плотность вихрей велика и их сердцевинки занимают заметный объем по сравнению с объемом сверхпроводника, роль отмеченных выше факторов становится существенной и необходимость использования других моделей, учитывающих эти обстоятельства, не вызывает сомнений. Среди таких моделей следует выделить вариационную модель Гао, Клема и др. [3,4] (см. также [6]), которая позволила получить достаточно простое аналитическое выражение для зависимости $M(H)$, хорошо описывающее экспериментальные результаты почти для всех известных ВТСП соединений в широкой области магнитных полей вплоть до второго критического поля H_{c2} [7–14].

Однако следует отметить, что в области больших полей, не слишком превышающих первое критическое поле H_{c1} , указанная выше проблема подробно не анализировалась. В то же время применительно к этой области полей, где расстояния между вихрями еще существенно превышают размеры вихревых сердцевин, утверждение о количественной некорректности лондоновского приближения и необходимости учета энергии сердцевин вихрей при вычислении равновесной намагниченности, сделанное в [4], не кажется столь очевидным. В связи с этим представляет интерес выяснить, в какой области магнитных полей влияние структуры сердцевин вихрей начинает заметно сказываться на поведении полевых зависимостей $M(H)$.

В настоящей работе будет произведено последовательное рассмотрение и учет каждого из отмеченных выше факторов. Это позволит в явном виде выявить механизмы и степень их влияния на поведение равновесной намагниченности сверхпроводников II рода (для случая $\kappa \gg 1$) в области полей $H_{c1} \leq H \ll H_{c2}$.

Также будет показано, что аналитическое выражение для зависимости $M(H)$, полученное в [4] в рамках вариационной модели, в области небольших полей дает количественно неточный результат. Нами будет получена более точная, по сравнению с лондоновским приближением и с приведенной в [4], зависимость $M(H)$ (как численно, так и аналитически), учитывающая собственную энергию вихрей, а также влияние структуры ви-

хревых сердцевин на пространственное распределение поля вихря, т.е. влияние тех факторов, учет которых оказывается наиболее важен в рассматриваемой области умеренных полей.

Расчет и анализ полевых зависимостей намагниченности, с разной степенью точности учитывающих пространственное распределение параметра порядка

В области полей $H \ll H_{c2}$ расстояния между соседними вихрями в регулярной решетке намного превышают размеры вихревых сердцевин. По этой причине вихревое состояние здесь можно представить в виде системы отдельных взаимодействующих нитей. При этом собственная энергия каждого вихря, его поле, а также структура параметра порядка в его сердцевине полагаются такими же, как у изолированной нити (т.е. не зависят от присутствия других вихрей).

Как известно [15], в этой области полей свободную энергию Гиббса решетки вихрей (рассчитанную на единицу объема) можно записать в виде

$$G = \frac{B}{\Phi_0} \left(F_0 + \sum_i F_{0i} \right) - \frac{BH}{4\pi}, \quad (1)$$

где F_0 — собственная энергия каждой нити; F_{0i} — энергия взаимодействия данной нити с остальными; B — средняя магнитная индукция образца; Φ_0 — квант магнитного потока.

С другой стороны, в рамках теории Гинзбурга–Ландау энергию вихревой нити можно представить в виде суммы электромагнитной энергии F_{em} и энергии F_{cor} , связанной с пространственным изменением параметра порядка. Используя второе уравнение Гинзбурга–Ландау, электромагнитную энергию единицы длины вихря можно представить в виде

$$F_{em} = \frac{\Phi_0}{8\pi} b(0), \quad (2)$$

где $b(0)$ — полное локальное поле в центре вихря. Будем полагать, что это поле есть суперпозиция полей, созданных как самой нитью $b_0(0)$, так и окружающими ее вихрями $b_0(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)$, т.е.

$$b(0) = b_0(0) + \sum_i b_0(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|), \quad (3)$$

где \mathbf{r}_i — радиус-вектор i -го вихря в плоскости поперечного сечения, а поле $b_0(r)$ совпадает с полем изолированной нити.

Таким образом, полная собственная энергия вихря складывается из энергии ее сердцевинны F_{cor} и собственной электромагнитной энергии F_{em}^0 :

$$F_0 = F_{\text{cor}} + \frac{\Phi_0}{8\pi} b_0(0). \quad (4)$$

Энергия взаимодействия F_{0i} имеет электромагнитную природу:

$$F_{0i} = \frac{\Phi_0}{8\pi} b_0(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|). \quad (5)$$

В соответствии с (4) и (5) выражение (1) можно переписать в виде

$$G = \frac{B}{\Phi_0} \left(F_{\text{cor}} + \frac{\Phi_0}{8\pi} b_0(0) \right) + \frac{B}{8\pi} \sum_i b_0(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|) - \frac{BH}{4\pi}. \quad (6)$$

Из условия минимума свободной энергии Гиббса ($dG/dB = 0$) найдем магнитное поле, в котором вихревая решетка находится в термодинамически равновесном состоянии:

$$H = \frac{4\pi}{\Phi_0} F_{\text{cor}} + \frac{b_0(0)}{2} + \frac{1}{2} \frac{d}{dB} \left[B \sum_i b_0(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|) \right]. \quad (7)$$

Заметим, что то же условие минимума G при $B \rightarrow 0$ дает значение первого критического поля:

$$H_{c1} = \frac{4\pi}{\Phi_0} F_{\text{cor}} + \frac{b_0(0)}{2}. \quad (8)$$

Поэтому, если пренебречь изменением F_{cor} и $b_0(0)$ при увеличении поля в рассматриваемой области полей, то

$$H = H_{c1} + \frac{1}{2} \frac{d}{dB} \left[B \sum_i b_0(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|) \right]. \quad (9)$$

Отсюда для намагниченности $-4\pi M = H - B$ получаем

$$-4\pi M = H_{c1} + \frac{1}{2} \frac{d}{dB} \left[B \sum_i b_0(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|) \right] - B. \quad (10)$$

Из формулы (10) видно, что в исследуемом интервале полей количественная точность получаемых значений $M(H)$ во многом зависит от точности определения величины первого критическо-

го поля H_{c1} и функции, описывающей локальное поле изолированного вихря $b_0(r)$. Иными словами, формула (10) для намагниченности может давать значительно более точный количественный результат, если вместо выражений для H_{c1} и $b_0(r)$, получаемых в лондоновском приближении, использовать их более точные значения, которые возможно рассчитать в рамках других представлений, в том числе численным решением уравнений Гинзбурга—Ландау.

Как известно [15], в лондоновском приближении

$$b_0(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0 \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{\lambda} \right), \quad (11)$$

где K_0 — функция Бесселя от мнимого аргумента нулевого порядка; λ — лондоновская глубина проникновения магнитного поля. В этой модели поле H_{c1} можно найти лишь приближенно, используя известную процедуру обрезания поля вихря (11) при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \xi$, где ξ — длина когерентности:

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} K_0(1/\kappa). \quad (12)$$

Учет пространственного изменения параметра порядка в сердцевинах вихрей приводит к точному значению H_{c1} :

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} (\ln \kappa + C_1), \quad (13)$$

и дает для поля в центре изолированного вихря

$$b_0(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} (\ln \kappa - C_0), \quad (14)$$

где C_1 и C_0 — постоянные величины.

В настоящее время для $\kappa \gg 1$ значения констант C_1 и C_0 можно считать надежно установленными: $C_1 = 0,496815$ и $C_0 = 0,282276$. Эти значения получены в [16] численным решением системы дифференциальных уравнений Гинзбурга—Ландау и хорошо совпадают с результатами, полученными в работе [17].

Для $\kappa = 100$, используя приведенные значения C_1 и C_0 , получаем величину $4\pi M_{\text{cor}}$ в поле $H = H_{c1}$: $-4\pi M_{\text{cor}} = \kappa F_{\text{cor}}/4\pi = (C_1 + C_0)/2\kappa = 0,038$. Это значение в дальнейшем можно использовать для сравнения с результирующей величиной намагниченности. (Здесь и далее переходим к единицам Гинзбурга—Ландау, в которых

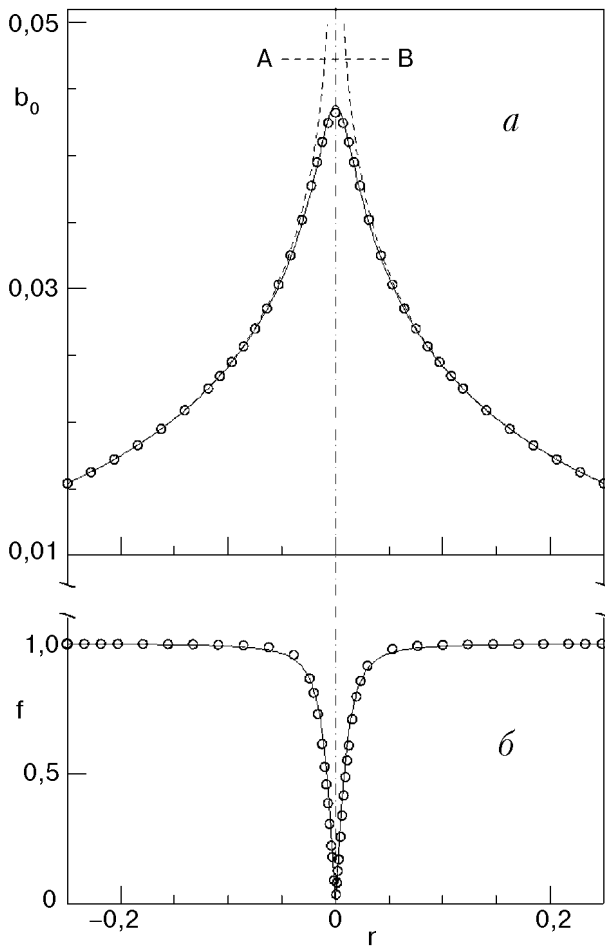


Рис. 1. Пространственное распределение поля индивидуального вихря (а) и параметра порядка (б) (в безразмерных единицах Гинзбурга—Ландау). Точки — численное решение системы уравнений Гинзбурга—Ландау. Сплошные кривые — соответствующие аналитические зависимости (15) и (16). Пунктир — поле изолированного вихря в лондоновском приближении (11). Линия АВ соответствует обрезанию функции $K_0(r)$ на расстоянии $r = \xi$.

все длины измеряются в λ , поля — в $\sqrt{2} H_c$, где H_c — термодинамическое критическое поле; при этом $\Phi_0 = 2\pi/\kappa$, $H_{c2} = \kappa$.)

Точное распределение поля индивидуального вихря $b_0(r)$ может быть найдено численным решением системы уравнений Гинзбурга—Ландау. Результаты представлены на рис. 1,а. На том же рисунке приведено для сравнения распределение поля (11), получаемое в рамках лондоновского приближения. Видно, что основное отличие приведенных кривых наблюдается вблизи центра вихря и является следствием учета распределения параметра порядка в данной области (поведение функции $f(r)$ приведено на рис. 1,б). Следует отметить, что представленные на рис. 1,а числен-

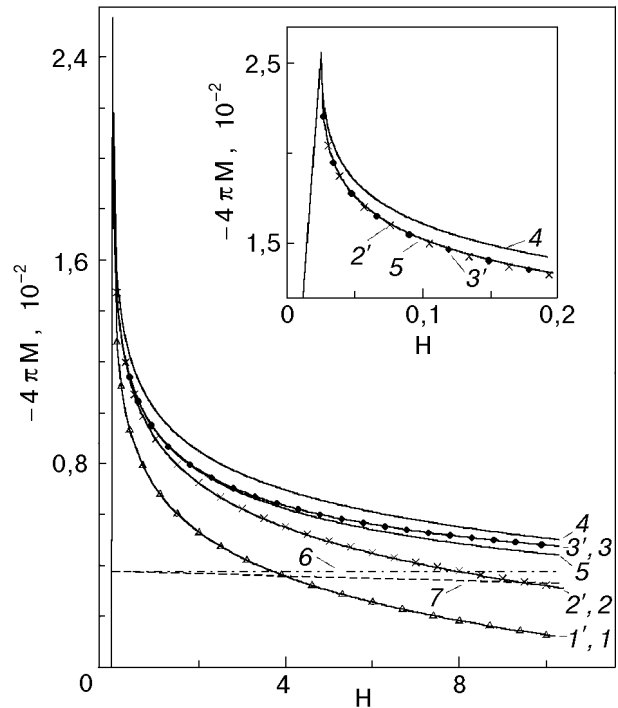


Рис. 2. Полевые зависимости намагниченности сверхпроводника II рода с $\kappa = 100$ (в безразмерных единицах Гинзбурга—Ландау). Точки — численный расчет для треугольной решетки вихрей по формуле (10), где в качестве H_{c1} и $b_0(r)$ использованы зависимости: (12) и (11) — кривая 1', (13) и (11) — кривая 2', (13) и (15) — кривая 3'. Сплошные кривые — аналитические зависимости: 1, 2 рассчитаны по формуле Феттера (17) в сочетании с (12) или (13) соответственно; 3 — по формуле, полученной в [6]; 4 — по формуле, полученной в [4]; 5 — по формуле (22). Кривые 6 (штрихпунктир) и 7 (пунктир) — зависимости $-4\pi M_{\text{cor}}(H)$ для случаев $F_{\text{cor}} = \text{const}$ и $F_{\text{cor}} = F_{\text{cor}}(H)$ (см. [4]) соответственно. Вставка: зависимость $-4\pi M(H)$ в непосредственной близости от H_{c1} .

ные значения $b_0(r)$ могут быть достаточно хорошо описаны аналитическим выражением

$$b_0(r) = \frac{f_\infty K_0(f_\infty (r^2 + \xi_v^2)^{1/2})}{\kappa \xi_v K_1(f_\infty \xi_v)}, \quad (15)$$

полученным в [4] в рамках вариационного метода из 2-го уравнения Гинзбурга—Ландау с использованием в качестве модуля параметра порядка пробной функции:

$$f = \frac{f_\infty r}{(r^2 + \xi_v^2)^{1/2}}, \quad (16)$$

где ξ_v и f_∞ — вариационные параметры, представляющие эффективный радиус кора и параметр

порядка вдали от сердцевины вихря (в рассматриваемой нами области полей для случая $\kappa \gg 1$ их можно считать константами: $\xi_v = \xi_{v0} = \sqrt{2}/\kappa$, $f_\infty = 1$). Поведение функции (16), а также поля (15) приведено на рис. 1 сплошными кривыми, видно, что они хорошо описывают точные численные значения. Поэтому в дальнейших расчетах зависимостей $M(H)$ для описания $b_0(r)$ будем использовать аналитическое выражение (15).

На рис. 2 приведены кривые намагниченности $M(H)$ для сверхпроводников с $\kappa = 100$, с разной степенью точности учитывающие пространственное распределение параметра порядка. Остановимся вначале на кривых 1', 2' и 3', приведенных на рисунке точками. Все они соответствуют численному суммированию по формуле (10) для треугольной решетки вихрей. При этом кривая 1' (треугольники) отвечает чисто лондоновскому приближению, т.е. $b_0(r)$ и H_{c1} описываются выражениями (11) и (12). Кривая 2' (кресты) получена с использованием формул (11) и (13) для данных характеристик. Для кривой 3' (кружки) использованы более точные, чем дает лондоновское приближение, выражения и для $b_0(r)$, и для H_{c1} , т.е. (15) и (13) соответственно.

Видно, что кривые 1' и 2' демонстрируют различие в поведении $M(H)$, которое обусловлено разным видом формул для H_{c1} , а кривые 2' и 3' отражают влияние вида функции $b_0(r)$ на ход той же кривой $M(H)$. В области полей $H < 0,005H_{c2}$, где намагниченность определяется в основном собственной энергией вихревой нити, кривые 2' и 3' хорошо совпадают (см. вставку к рис. 2), поскольку для них использовано одно и то же значение H_{c1} (13). Из сравнения кривых 1', 2' и 3' видно, что учет эффекта подавления параметра порядка в вихревых сердцевинах, который в данном случае производится путем простой замены формул (11) и (12) на более точные выражения (15) и (13), весьма существенно изменяет весь ход кривой $M(H)$, начиная с самых малых полей.

На рис. 2 приведены также сплошные кривые $M(H)$, которые соответствуют аналитическим зависимостям. Так, кривые 1 и 2 рассчитаны по известной формуле Феттера [18], полученной в лондоновской модели:

$$-4\pi M = H_{c1} - \frac{\Phi_0}{8\pi\lambda^2} \left(\ln \frac{\lambda^2(H - H_{c1})}{\Phi_0} + \ln 4\pi + 2 - C - A_6 \right), \quad (17)$$

где $C = 0,5772\dots$ — константа Эйлера; A_6 — числовой параметр (для треугольной решетки

$A_6 = 0,07968\dots$). Как видно на рис. 2, формула (17) хорошо описывает результаты численного расчета (кривые 1' и 2') начиная с полей $H > 0,0015H_{c2}$, если в качестве H_{c1} использовать выражения (12) или (13) соответственно. (В меньших полях формула (17) неприменима, что и обусловило необходимость приведения рассчитанных кривых 1' и 2' для дальнейшего анализа в области полей, непосредственно примыкающих к H_{c1} .)

Представляет интерес сравнить численно рассчитанную кривую 3' с аналитической зависимостью $M(H)$, приведенной в [4]. Заметим, что используемый в настоящей работе подход при расчете кривой 3' должен давать результат, мало отличающийся от результата вариационной модели [4].

Действительно, проанализируем более подробно результаты работы [4]. Из нее, в частности, следует, что выражение для собственной энергии каждой вихревой нити F_0 (рассчитанной на единицу длины вихря) при условии $f_\infty = 1$ можно записать как

$$F_0 = F_{\text{cor}} + F_{\text{em}}^0 = \frac{\pi\xi_v^2}{2 + B\kappa\xi_v^2} + \frac{2\pi(1 + B\kappa\xi_v^2)}{\kappa^2(2 + B\kappa\xi_v^2)} + \frac{2\pi K_0(\xi_v)}{\kappa^2\xi_v K_1(\xi_v)}. \quad (18)$$

Подставляя выражение (18) в формулу общего вида для энергии Гиббса (1) и учитывая, что для $\kappa > 100$ в малых полях члены типа $B\kappa\xi_v^2 \ll 1$, получаем для намагниченности

$$-4\pi M = \frac{\kappa\xi_v^2}{8} + \frac{1}{8\kappa} + \frac{K_0(\xi_v)}{2\kappa\xi_v K_1(\xi_v)} + \frac{\kappa}{8\pi} \frac{d}{dB} \left[B \sum_i b_0(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|) \right] - B - \frac{B}{2\kappa^2}. \quad (19)$$

В рамках той же вариационной модели получено

$$H_{c1} = \frac{\kappa\xi_v^2}{8} + \frac{1}{8\kappa} + \frac{K_0(\xi_v)}{2\kappa\xi_v K_1(\xi_v)}. \quad (20)$$

Отсюда следует:

$$-4\pi M = H_{c1} + \frac{\kappa}{8\pi} \frac{d}{dB} \left[B \sum_i b_0(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|) \right] - B - \frac{B}{2\kappa^2}. \quad (21)$$

Вид формулы (21) вполне идентичен (10) за исключением последнего члена (он отражает левую зависимость $F_{\text{cor}}(B)$), который, впрочем, очень мал для больших k и малых B . Величины H_{c1} , рассчитанные по формулам (13) и (20), совпадают, если в [13] положить $C_1 = 0,52$. Таким образом, учитывая, что выражение для $b_0(r)$, используемое нами и в работе [4], одно и то же, и что для расчетов F_{em} в [4] и нами использован принцип суперпозиции, следует ожидать, что полное выражение для намагниченности, полученное в [4], в области малых полей должно давать результат, совпадающий практически точно с численными данными, описываемыми кривой 3' на рис. 2. (Заметим, что зависимость $M(H)$ в [4] является нечувствительной к полевым зависимостям ξ_v и f_∞ вплоть до $H \approx 0,6H_{c2}$, что позволяет, как отмечалось выше, положить их константами.) Однако, как видно на рис. 2, кривая 4, соответ-

ствующая зависимости $M(H)$ работы [4] (будем называть ее кривой Гао — Клема), заметно отличается от кривой 3', причем практически начиная с самых малых полей $H \approx H_{c1}$ (см. вставку на рис. 2) Этот факт говорит о существовании определенной погрешности, допущенной в расчетах, проведенных в работе [4].

Анализ показал, что, действительно, такая погрешность возникла в [4] при вычислении электромагнитной энергии при переходе от суммирования по обратной решетке вихрей к интегрированию. Наши расчеты, выполненные в рамках той же вариационной модели [4], но без применения указанной выше процедуры, т.е. путем непосредственного суммирования по решетке вихрей, позволили получить аналитическое выражение для $M(H)$ для области полей $H_{c1} \leq H \ll H_{c2}$, которое несколько отличается от полученного в [4] и является более точным:

$$-4\pi M = H_{c1} + \frac{1}{2k\xi_v K_1(\xi_v)} \left\{ -\ln(1 - \exp(-2\pi\xi_v/d)) + \frac{3\pi}{2d} \exp(-\xi_v) + \right. \\ \left. + \frac{\pi \exp(-d)}{1 - \exp(-d)} \left(\frac{3}{d} - \frac{\xi_v}{2d} + \frac{1}{1 - \exp(-d)} \right) + Bk\xi_v^2 \ln d + \frac{\pi\xi_v}{d} \frac{\exp(-2\pi\xi_v/d)}{1 - \exp(-2\pi\xi_v/d)} \right\} - \frac{K_0(\xi_v)}{2k\xi_v K_1(\xi_v)} - \frac{B}{2k^2} - B, \quad (22)$$

где $d = \sqrt{2\pi/kB}$ — расстояние между вихрями. Вывод формулы (22) дан в Приложении.

На рис. 2 зависимость $M(H)$, соответствующая формуле (22), представлена в виде кривой 5. Как и следовало ожидать, в области малых полей кривая 5 хорошо согласуется с результатами численного расчета (кривая 3') (см. также вставку на рис. 2). Незначительное отличие данных кривых в области полей $H > 4$ связано с тем, что кривая 5 учитывает изменение энергии вихревых сердцевин с ростом поля в том виде, какой заложен в вариационном методе [4], а кривая 3' не учитывает. (Для наглядности вклад в намагниченность от полевой зависимости $F_{\text{cor}}(H)$ представлен на рис. 2 кривой 7 в сравнении с прямой 6, соответствующей $-4\pi M_{\text{cor}} = \text{const} = 0,038$.)

Таким образом, возвращаясь к кривой Гао — Клема и сравнивая ее с более точной кривой 5, можно видеть, что неточность в вычислении F_{em} , допущенная в [4], приводит в рассматриваемой области полей к ошибке в значениях $M(H)$, составляющей 8–14%.

В заключение кратко обсудим возможное влияние на поведение кривой $M(H)$ фактора, связан-

ного с изменением пространственного распределения параметра порядка $f(r)$ за счет перекрытия вихрей, который не учитывался при выводе формулы (22). Этот фактор должен сказаться на величине F_0 , а также изменить пространственное распределение поля вихря. Важно отметить, что в этом случае становится неправомерным использование принципа суперпозиции полей в виде (3), т.е. в виде суммы полей изолированных вихрей.

Теоретическое рассмотрение, учитывающее (в неявном виде) все отмеченные выше факторы, было проведено в [1,6] в рамках вариационного метода без применения принципа суперпозиции, т.е. более самосогласованным, чем в [4], способом. Несмотря на использование в данных работах различных пробных функций, результирующие кривые $M(H)$, полученные в [1,6], совпадают с высокой точностью. Соответствующие аналитические выражения имеют достаточно громоздкий вид, поэтому приводим результаты непосредственно в виде кривой $M(H)$ на рис. 2 (сплошная кривая 3). Заметим, что кривая 3 хорошо согласуется с результатами численного решения уравнений Гинзбурга — Ландау для ре-

гулярной решетки вихрей по методу, предложенному в [2] (в рассматриваемом интервале полей различие не превышает 0,3%).

Как видно на рис. 2, эта, наиболее точная, кривая 3 действительно незначительно отличается от кривой 5, при расчете которой использовался принцип суперпозиции. Однако при этом оказалось, что кривая 3 совпадает с численно рассчитанной кривой 3' практически точно вплоть до полей $H \approx 15$. Анализ показал, что такое совпадение является в известной мере случайным и связано с тем, что при вычислении кривой 3' пренебрежение полевой зависимостью M_{cor} компенсируется ошибкой, вносимой при использовании принципа суперпозиции.

Таким образом, сравнение кривых 3, 3' и 5 показывает, что в области рассматриваемых в настоящей работе магнитных полей, в которых расстояние между вихрями не меньше, чем $d \approx 8\xi$, изменение параметра порядка за счет перекрытия вихрей настолько мало, что им можно пренебречь при расчетах равновесной намагниченности сверхпроводников.

Выводы

Проведенный в работе сравнительный анализ полевых зависимостей равновесной намагниченности $M(H)$ сверхпроводников II рода ($\kappa = 100$), полученных как с учетом пространственного распределения параметра порядка, так и без него, выявил существенное отличие в поведении кривых начиная с полей $H = H_{c1}$, которое растет при дальнейшем увеличении поля.

Предложен подход, позволяющий исключить основной источник неточности лондоновского приближения и наиболее простым способом учесть структуру сердцевин вихрей в выражении для $M(H)$. Для этого необходимо в формуле (10) для $M(H)$ использовать для H_{c1} , а также для пространственного распределения поля вихря $b(r)$ выражения, полученные в рамках не лондоновского, а других представлений, дающих более точный результат. В частности, это могут быть результаты точного численного решения уравнений Гинзбурга — Ландау или вариационного метода, развитого в [4].

Использование выражения (13) для величины H_{c1} с константой $C_1 \approx 0,5$ позволяет корректно учесть не только энергию вихревых сердцевин, но и значение поля вихря в центре, а аналитическое выражение (15) для зависимости $b(r)$ [4] (хорошо описывающее результаты численного решения уравнений Гинзбурга — Ландау) дает возможность более адекватно, по сравнению с лондоновской

моделью, вычислить электромагнитную энергию взаимодействия вихревых нитей. Дополнительные изменения параметра порядка в сердцевинах вихрей вследствие влияния полей соседних вихрей в рассматриваемом интервале полей ($H \leq 0,1H_{c2}$) слишком малы, чтобы оказать какое-либо заметное влияние на поведение кривых $M(H)$.

Для интервала магнитных полей $H_{c1} \leq H \ll 0,1H_{c2}$ получено аналитическое выражение для $M(H)$ путем прямого суммирования по решетке индивидуальных вихрей с учетом пространственного распределения параметра порядка. Данное аналитическое выражение хорошо соответствует результатам численного расчета по методу, описанному выше.

В то же время проведенный в настоящей работе анализ показал, что аналитическая формула для зависимости $M(H)$, полученная в [4] в рамках вариационной модели Клема и решающая практически ту же задачу учета структуры сердцевин вихрей, дает количественно неверный результат при использовании ее в области не слишком больших полей. Причина этого кроется в той погрешности, которая возникает в расчетах [4] при переходе от суммирования по обратной решетке вихрей к интегрированию.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 00-03-32246 и, частично, проект № 00-02-18032).

Приложение

Как видно из (10), для вычисления намагниченности нужно найти суммарное магнитное поле $b_f(0)$, создаваемое на оси данной вихревой нити всеми остальными нитями. Для простоты рассмотрим квадратную вихревую решетку, результат для намагниченности в этом случае будет несущественно отличаться от результата, полученного для гексагональной решетки [18]. Используя (15), для $b_f(0)$ получаем

$$b_f(0) = \frac{1}{\kappa \xi_v K_1(\xi_v)} \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_0 \left(\sqrt{d^2(m^2 + n^2) + \xi_v^2} \right) - \frac{K_0(\xi_v)}{\kappa \xi_v K_1(\xi_v)}, \quad (\text{П.1})$$

где $d = \sqrt{2\pi/kB}$ — расстояние между соседними вихрями.

Найдем поле b , создаваемое отдельным вихревым рядом в произвольной точке сверхпроводника. Введем систему координат с центром на оси одного из вихрей, осью x , перпендикулярной плоскости

ти, в которой расположен ряд вихрей, осью y , лежащей в этой плоскости и ортогональной вихрям, и осью z , направленной вдоль вихревых осей. В этом случае получаем

$$b(x, y) = \frac{1}{\kappa \xi_v K_1(\xi_v)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_0 \left(\sqrt{(dm + y)^2 + x^2 + \xi_v^2} \right). \quad (\text{П.2})$$

Произведем под знаком суммы в (П.2) преобразование Фурье по координате y :

$$b(x, y) = \frac{f_\infty}{\kappa \xi_v K_1(f_\infty \xi_v)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int dq \exp(-iq(y + dm)) \int \frac{dy}{2\pi} \exp(iqy) K_0 \left(f_\infty \sqrt{x^2 + y^2 + \xi_v^2} \right). \quad (\text{П.3})$$

Произведя интегрирование в правой части последнего выражения по y и q , с помощью известных формул для определенных интегралов функций Бесселя [19] и соотношения

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-iqm) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(q - 2\pi m)$$

можно получить

$$b(x, y) = \frac{1}{\kappa \xi_v K_1(\xi_v)} \frac{\pi}{d} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{4\pi^2 m^2}{d^2} \right)^{-1/2} \exp \left(-\sqrt{x^2 + \xi_v^2} \sqrt{1 + (4\pi^2 m^2)/d^2} \right) \cos \left(\frac{2\pi m y}{d} \right). \quad (\text{П.4})$$

Используя (П.4), для $b_f(0)$ имеем

$$b_f(0) = \frac{\pi}{\kappa d \xi_v K_1(\xi_v)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left(-\sqrt{n^2 d^2 + \xi_v^2} \right) + \frac{2\pi}{\kappa d \xi_v K_1(\xi_v)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4\pi^2 m^2}{d^2} \right)^{-1/2} \times \\ \times \exp \left(-\xi_v \sqrt{1 + (4\pi^2 m^2)/d^2} \right) - \frac{K_0(\xi_v)}{2\kappa \xi_v K_1(\xi_v)}. \quad (\text{П.5})$$

Поскольку в области полей $H \ll H_{c2}$ выполняется соотношение $\xi_v \ll d$, разложим первое слагаемое в левой части (П.5) по степеням ξ_v/d , ограничившись членом, пропорциональным ξ_v^2/d^2 . Во втором слагаемом учтем, что начиная с полей, близких к H_{c1} , $d^2 \ll 4\pi^2$. Отсюда находим

$$b_f(0) = \frac{\pi}{\kappa d \xi_v K_1(\xi_v)} \left\{ -\frac{d}{\pi} \ln \left(1 - \exp \left(-\frac{2\pi \xi_v}{d} \right) \right) + \exp(-\xi_v) + \frac{2 \exp(-d)}{1 - \exp(-d)} + \frac{\xi_v^2}{d} \ln d \right\} - \frac{BK_0(\xi_v)}{\kappa \xi_v K_1(\xi_v)}. \quad (\text{П.6})$$

Из (21) и (П.6) получаем зависимость $M(B)$ (22). При этом зависимость магнитного поля от индукции определяется соотношением $H(B) = B - 4\pi M$. Таким образом, мы получили неявную зависимость $M(H)$.

1. Н. Koppe and J. Willebrand, *J. Low Temp. Phys.* **2**, 499 (1970).
2. Е. Н. Brandt, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2208 (1997).
3. Z. Hao and J. R. Clem, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2371 (1991).
4. Z. Hao, J. R. Clem, M. W. McElfresh, L. Civale, A. P. Malozemoff, and F. Holtzberg, *Phys. Rev.* **B43**, 2844 (1991).

5. Е. Н. Brandt, *Rep. Prog. Phys.* **58**, 1465 (1995).
6. В. В. Погосов, А. Л. Рахманов, К. И. Кугель, *ЖЭТФ* **118**, 676 (2000).
7. М.-S. Kim, М.-К. Bae, W. C. Lee, and S.-I. Lee, *Phys. Rev.* **B51**, 3261 (1995).
8. М. Xu, J. Sok, J. E. Ostenson, D. K. Finnemore, and B. Dabrowski, *Phys. Rev.* **B53**, 15313 (1996).

9. Y. C. Kim, J. R. Thompson, J. G. Ossandon, D. K. Christen, and M. Paranthaman, *Phys. Rev.* **B51**, 11767 (1995).
10. P. Pugnati, G. Fillion, H. Noel, M. Ingold, and B. Barbara, *Europhys. Lett.* **29**, 425 (1995).
11. D. N. Zheng, A. M. Campbell, and R. S. Liu, *Phys. Rev.* **B48**, 6519 (1993).
12. J. Sok, M. Xu, W. Chen, B. J. Suh, J. Gohng, D. K. Finnemore, M. J. Kramer, L. A. Schwarzkopf, and B. Dabrowski, *Phys. Rev.* **B51**, 6035 (1995).
13. M.-S. Kim, S.-I. Lee, S.-C. Yu, I. Kuzemskaya, E. S. Itskevich, and K. A. Lokshin, *Phys. Rev.* **B57**, 6121 (1998).
14. A. A. Nugroho, I. M. Sutjahja, A. Rusydi, M. O. Tjia, A. A. Menovsky, F. R. de Boer, and J. J. M. Franse, *Phys. Rev.* **B60**, 15384 (1999).
15. Д. Сан-Жам, Г. Сарма, Е. Томас, *Сверхпроводимость второго рода*, Мир, Москва (1970).
16. Е. А. Шаповал, *Письма в ЖЭТФ* **69**, 532 (1999).
17. C.-R. Hu, *Phys. Rev.* **B6**, 1756 (1972).
18. A. L. Fetter, *Phys. Rev.* **147**, 153 (1966).
19. М. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1963).

Equilibrium magnetic characteristics of HTSC with regard to spatial distribution of the order parameter in vortex cores.

I. Equilibrium magnetization

L. G. Mamsurova, K. S. Pigalskiy,
W. V. Pogosov, and N. G. Trusevich

The problem of accuracy of theoretical description of the field dependences of equilibrium magnetization $M(H)$ in high- κ type-II superconductors, calculated in different approximations, is studied for low magnetic fields $H \ll H_{c2}$. It is shown that account of spatial distribution of the order parameter influences essentially the behavior of magnetization $M(H)$. We investigate the mechanisms and the effect on the magnetization of such factors as the energy arising from the depression of the order parameter in the vortex core, the accuracy of the description of the spatial distribution of the vortex field, the depression of the order parameter due to the overlapping of vortices and the use of the principle of linear superposition of fields. An analytical expression for the dependence $M(H)$ is obtained by straightforward calculation of the lattice sums, taking into account the effect of the vortex core structures for the field region $H_{c1} \leq H \ll H_{c2}$.