

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.12.008>

УДК 517.927

В.А. Михайлец¹, О.Б. Пелехата², Н.В. Рева²

¹ Институт математики НАН Украины, Киев

² НТУ Украины “Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского”

E-mail: mikhailets@imath.kiev.ua, o.pelehata-2017@kpi.ua, reva_nadiia@ukr.net

О теореме Кигурадзе для линейных краевых задач

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А.Н. Кочубеем

В работе исследуется предельное поведение решений неоднородных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на конечном интервале. Получено обобщение теоремы И.Т. Кигурадзе (1987) о предельном переходе.

Ключевые слова: *система обыкновенных дифференциальных уравнений, линейная краевая задача, предельный переход.*

Вопросы предельного перехода в системах дифференциальных уравнений встречаются во многих задачах теоретического и прикладного характера. Наиболее полно они исследованы применительно к решениям задачи Коши для систем дифференциальных уравнений первого порядка [1–5]. Более сложный случай линейных краевых задач изучался в работах И.Т. Кигурадзе [6, 7] и его последователей [8–10].

Рассмотрим на конечном интервале (a, b) систему $m \in \mathbb{N}$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t) + A(t)y(t) = f(t) \tag{1}$$

с общими неоднородными краевыми условиями

$$By = c, \tag{2}$$

где линейный непрерывный оператор

$$B: C([a, b]; \mathbb{C}^m) \rightarrow \mathbb{C}^m$$

Предполагается, что матрица-функция $A(\cdot) \in L([a, b]; \mathbb{C}^{m \times m})$ вектор-функция $f(\cdot) \in L([a, b]; \mathbb{C}^{m \times m})$ а вектор $c \in \mathbb{C}^m$.

Под решением системы дифференциальных уравнений (1) понимается абсолютно непрерывная на отрезке $[a, b]$ вектор-функция $y(\cdot)$, которая удовлетворяет равенству (1) почти всюду. Неоднородное краевое условие (2) корректно определено на решениях систе-

мы дифференциальных уравнений (1) и охватывает все классические виды краевых условий. Как известно (см., например, [6]), краевая задача (1)–(2) является фредгольмовой. Поэтому для однозначной всюду разрешимости этой задачи необходимо и достаточно чтобы однородная краевая задача имела только тривиальное решение.

Пусть теперь наряду с задачей (1)–(2) задана последовательность неоднородных краевых задач

$$y'_n(t) + A_n(t)y_n(t) = f_n(t) \quad (3)$$

с краевыми условиями вида

$$B_n y_n = c_n, \quad (4)$$

где матрицы-функции $A_n(\cdot)$, операторы B_n , вектор-функции $f_n(\cdot)$ и векторы c_n удовлетворяют приведенным выше для задачи (1)–(2) условиям. Пусть решения $y(\cdot)$ задачи (1)–(2) и решения $y_n(\cdot)$ задач (3)–(4) существуют и однозначно определены. Тогда представляет интерес вопрос о том, когда $n \rightarrow \infty$

$$\|y(\cdot) - y_n(\cdot)\|_\infty \rightarrow 0, \quad (5)$$

где $\|\cdot\|_\infty$ – суп-норма на отрезке $[a, b]$.

По-видимому, впервые этот вопрос был поставлен и исследован И.Т. Кигурадзе [7]. При этом предполагалось, что все функции в задаче являются вещественными.

Введем некоторые обозначения, необходимые для формулировок утверждений в удобной для нас форме. Положим

$$R_{A_n}(\cdot) := A_n(\cdot) - A(\cdot) \in L([a, b]; \mathbb{C}^{m \times m}),$$

$$F(\cdot) := \begin{pmatrix} f_1(\cdot) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(\cdot) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(\cdot) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in L([a, b]; \mathbb{C}^{m \times m}),$$

$$F_n(\cdot) := \begin{pmatrix} f_{1n}(\cdot) & 0 & \dots & 0 \\ f_{2n}(\cdot) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{mn}(\cdot) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in L([a, b]; \mathbb{C}^{m \times m}),$$

$$R_{F_n}(\cdot) = F_n(\cdot) - F(\cdot),$$

$$R_{F_n}^\vee(t) := \int_a^b R_{F_n}(s) ds,$$

$$R_{A_n}^\vee(t) := \int_a^b R_{A_n}(s) ds.$$

Теорема Кигурадзе. Пусть выполнены условия:

(0) Однородная краевая задача (1)–(2) имеет только тривиальное решение

$$(I) \|R_{A_n}^\vee(\cdot)\|_\infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$(II) \|A_n(\cdot)\|_1 = O(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$(III) B_n y \rightarrow B y, \quad y \in C([a, b]; \mathbb{C}^m), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда для достаточно больших n задача (3)–(4) однозначно разрешима. Если, кроме того, выполнены условия на правые части задач

$$(IV) c_n \rightarrow c, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$(V) \|R_{F_n}^\vee(\cdot)\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то единственные решения задач (3)–(4) удовлетворяют предельному равенству (5).

Здесь и всюду дальше $\|\cdot\|_1$ – норма в пространстве Лебега L_1 на отрезке $[a, b]$. Примеры показывают, что в теореме Кигурадзе все условия существенные и не одно из них нельзя отбросить. Однако, как выяснилось, некоторые из них можно значительно ослабить.

Обозначим через $\mathcal{M}^m := \mathcal{M}(a, b, m)$, $m \in \mathbb{N}$ класс последовательностей матриц-функций $R_A(\cdot): \mathbb{C} \rightarrow L([a, b]; \mathbb{C}^{m \times m})$, для которых решение $Z_n(\cdot)$ задачи Коши

$$Z_n' + R_n(\cdot)Z_n(\cdot) = 0, \quad Z_n(a) = I_m$$

удовлетворяет предельному соотношению

$$\|Z_n(\cdot) - I_m\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где I_m – единичная $(m \times m)$ -матрица.

Положим теперь

$$A_{F_n}(\cdot) := \begin{pmatrix} A_n(\cdot) & F_n(\cdot) \\ O_m & O_m \end{pmatrix} \in L([a, b]; \mathbb{C}^{2m \times 2m}),$$

$$R_{A_n F_n}(\cdot) := A_{F_n}(\cdot) - A_F(\cdot) \in L([a, b]; \mathbb{C}^{2m \times 2m}),$$

где O_m – нулевая $(m \times m)$ -матрица.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. В формулировке теоремы Кигурадзе можно заменить условия (I), (II) на одно более общее условие

$$R_{A_n}(\cdot) \in \mathcal{M}^m \tag{6}$$

а условие (V) заменить на

$$R_{A_n F_n}(\cdot) \in \mathcal{M}^{2m}, \tag{7}$$

Условия (6), (7) не являются конструктивными, поскольку отсутствуют описания классов \mathcal{M}^m и \mathcal{M}^{2m} . Однако из результатов работ [3–5, 8] вытекают удобные для применений достаточные условия принадлежности последовательности матриц-функций к этому классу. Поэтому из теоремы 1 вытекает ряд утверждений, которые обобщают или дополняют теорему Кигурадзе и выражаются в явном виде.

Теорема 2. В формулировке теоремы Кигурадзе можно заменить условие (II) на более общее условие

$$(II) \|R_{A_n}(\cdot)R_{A_n}^\vee\|_1 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и добавить условие

$$(VI^*) \|R_{A_n}(\cdot)R_{F_n}^\vee\|_1 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Преимущества теоремы 2 перед теоремой Кигурадзе становятся более заметными, если рассмотреть их приложения к системам линейных дифференциальных уравнений порядка $r \geq 2$ вида

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t) + \dots + A_0(t)y(t) = f(t) \quad (8)$$

с общими неоднородными краевыми условиями вида

$$B_j y = c_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, r\} =: [r]. \quad (9)$$

Каждую из этих задач очевидным образом можно свести к общей неоднородной краевой задаче для системы уравнений первого порядка. Применительно к этим задачам теорема Кигурадзе приобретает следующий вид.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (0) и при $j \in [r]$, $n \rightarrow \infty$

$$(I') \|R_{A_{j-1,n}}^\vee(\cdot)\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$(II') \|R_{A_{j-1,n}}^\vee(\cdot)\|_1 = 0(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$(III') B_{jn} y \rightarrow B_j y, \quad y \in C^{(r-1)}([a, b]; \mathbb{C}^m), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда для достаточно больших n задача (10)–(11) однозначно всюду разрешима. Если, кроме того,

$$(IV') c_{jn} \rightarrow c_j, \quad j \in [r], \quad n \rightarrow \infty,$$

$$(V') \|R_{F_n}^\vee(\cdot)\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

то единственные решения краевой задачи (10)–(11) удовлетворяют соотношениям

$$\|y^{(j-1)}(\cdot) - y_n^{(j-1)}(\cdot)\|_\infty \rightarrow 0, \quad j \in [r], \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Из теоремы 2 в этом случае вытекает, что справедлива

Теорема 4. В формулировке теоремы Кигурадзе можно заменить условие (II') на

$$(II^{**}) \|R_{A_{r-1,n}}(\cdot)R_{A_{j-1,n}}^\vee(\cdot)\|_1 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad j \in [r],$$

Если добавить условие

$$(VI^{**}) \|R_{A_{r-1,n}}(\cdot)R_{F_n}^\vee(\cdot)\|_1 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

которое заведомо выполнено, коль выполнены условия (II') и (V').

Отметим, что условия (II^{**}) и (VI^{**}) заведомо выполнены если $\|R_{A_{r-1,n}}(\cdot)\|_1 = 0(1)$. При этом нет никаких ограничений на последовательность $\{\|R_{A_{r-1,n}}(\cdot)\|_1; n \geq 1\}$ при $j \in [r-1]$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Reid W. T. Some limit theorems for ordinary differential systems. *J. Diff. Equat.* 1967. **3**, № 3. P. 423–439.
2. Opial Z. Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations. *J. Diff. Equat.* 1967. **3**. P. 571–579.

3. Левин А.Ю. Пределный переход для несингулярных систем $X' = An(t)X$. Докл. АН СССР. 1967. **176**, № 4. С. 774–777.
4. Левин А.Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I. Вестн. Ярослав. ун-та. 1973. Вып. 5. С. 105–132.
5. Нгуен Тхе Хоан. О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений. Диф. уравнения. 1993. **29**, № 6. С. 970–975.
6. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. 352 с.
7. Кигурадзе И.Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новейшие достижения. ВИНТИ. 1987. **30**. С. 3–103.
8. Kodliuk T.I., Mikhailets V.A., Reva N.V. Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems. Ukr. Math. J. 2013. **65**. № 1. P. 77–90. doi: <https://doi.org/10.1007/s11253-013-0766-x>
9. Gnyr E.V., Kodliuk T.I., Mikhailets V.A. Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces. Ukr. Math. J. 2015. **67**, № 5 P. 658–667. doi: <https://doi.org/10.1007/s11253-015-1105-1>
10. Mikhailets V.A., Murach A.A., Soldatov V.A. Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat. 2016. № 87. P. 1–16.

Поступило в редакцию 01.08.2017

REFERENCES

1. Reid, W. T. (1967). Some limit theorems for ordinary differential systems. J. Diff. Equat. 3, No. 3, pp. 423-439. doi: [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(67\)90042-3](https://doi.org/10.1016/0022-0396(67)90042-3)
2. Opial, Z. (1967). Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations. J. Diff. Equat. 3, pp. 571-579. doi: [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(67\)90017-4](https://doi.org/10.1016/0022-0396(67)90017-4)
3. Levin, A. Yu. (1967). Passage to the limit for nonsingular systems $X' = An(t)X$. Sov. Math. Dokl. 176, No. 4, pp. 774-777.
4. Levin, A. Yu. (1973). Problems of the theory of ordinary differential equations. I. Vestn. Yaroslav. Univ. Iss. 5, pp. 105-132 (Russian).
5. Nguyen, Tkhe Hoan. (1993). Dependence of the solutions of a linear system of differential equations on a parameter. Differential Equations. 29, No. 6, pp. 830-835.
6. Kiguradze, I. T. (1975). Some singular boundary value problems for ordinary differential equations. Tbilisi: Izdat. Tbilis. Univ. (Russian).
7. Kiguradze, I. T. (1988). Boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. J. Soviet Math. 43, No. 2, pp. 2259-2339.
8. Kodliuk, T. I., Mikhailets, V. A. & Reva, N. V. (2013). Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems. Ukr. Math. J. 65, No. 1, pp. 77-90. doi: <https://doi.org/10.1007/s11253-013-0766-x>
9. Gnyr, E. V., Kodliuk, T. I. & Mikhailets, V. A. (2015). Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces. Ukr. Math. J. 67, No. 5, pp. 658-667. doi: <https://doi.org/10.1007/s11253-015-1105-1>
10. Mikhailets, V. A., Murach, A. A. & Soldatov, V. A. (2016). Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat. No. 87, pp. 1-16. doi: <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2016.1.87>

Received 01.08.2017

В.А. Михайлець¹, О.Б. Пелехата², Н.В. Рева²

¹ Інститут математики НАН України, Київ

² НТУ України "Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського"

E-mail: mikhailets@imath.kiev.ua, o.pelehata-2017@kpi.ua, reva_nadiia@ukr.net

ПРО ТЕОРЕМУ КІГУРАДЗЕ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

В роботі досліджується гранична поведінка розв'язків неоднорідних крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь. Отримано узагальнення теореми І.Т. Кігурадзе (1987) про граничний перехід.

Ключові слова: система звичайних диференціальних рівнянь, лінійна крайова задача, граничний перехід.

V.A. Mikhailets¹, O.B. Pelehata², N.V. Reva²

¹ Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

² NTU of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”

E-mail: mikhailets@imath.kiev.ua, o.pelehata-2017@kpi.ua, reva_nadiia@ukr.net

ON THE KIGURADZE THEOREM
FOR LINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

We investigate the limiting behavior of solutions of inhomogeneous boundary-value problems for the systems of linear ordinary differential equations on a finite interval. A generalization of the Kiguradze theorem (1987) on the passage to the limit is obtained.

Keywords: *system of ordinary differential equations, linear boundary-value problem, passage to the limit.*