

Локализация нелинейных волн в слоистых средах

И. В. Герасимчук

Харьковский национальный университет, Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4
E-mail: igbox@iname.com

А. С. Ковалев

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
Украина, 61164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 3 апреля 2000 г.

В рамках простой модели, описывающей нелинейную динамику слоистых сред (магнитоупорядоченных, упругих и оптических), исследована локализация нелинейных волн, распространяющихся в ангармонической среде вдоль системы из двух идентичных плоскопараллельных дефектов (волноводов). Предложен метод аналитического исследования этой проблемы и сведения ее к модели связанных ангармонических осцилляторов, все параметры которой определяются из микроскопического рассмотрения. Полученные результаты позволяют адекватно описать нелинейную динамику слоистых сред в рамках хорошо изученных дискретных моделей нелинейной механики. Показано, что при превышении суммарной энергии волны порогового значения состояние с равными потоками энергии, локализованными вблизи волноводов, становится неустойчивым и реализуется неоднородный режим, при котором волновой поток распространяется в основном вдоль одного из плоских слоев.

В межах простої моделі, яка описує нелінійну динаміку шаруватих середовищ (магнітопорядкованих, пружних і оптичних), досліджено локалізацію нелінійних хвиль, що розповсюджуються в ангармонічному середовищі вздовж системи з двох ідентичних плоскопаралельних дефектів (хвильоводів). Запропоновано метод аналітичного дослідження цієї проблеми та зведення її до моделі зв'язаних ангармонічних осциляторів, усі параметри якої визначаються з мікроскопічного розгляду. Одержані результати дозволяють адекватно описати нелінійну динаміку шаруватих середовищ в межах добре вивчених дискретних моделей нелінійної механіки. Показано, що в разі перевищення сумарною енергією хвилі порогового значення стан із рівними потоками енергії, локалізованими поблизу хвильоводів, стає нестійким і реалізується неоднорідний режим, при якому хвильовий потік розповсюджується здебільшого вздовж одного з плоских шарів.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Yv, 63.20.Pw

Введение

В настоящее время большой интерес, как теоретический, так и прикладной, вызывают исследования структуры и динамических свойств слоистых сред различного типа. Прежде всего речь идет о магнитных многослойных системах, перспективных для создания элементов записи и считывания информации, основанных на магнитооптических свойствах и явлении гигантского магнитосопротивления [1,2], и слоистых оптических средах, используемых в волоконной оптике и оптических линиях задержки [3–6]. Отметим также ВТСП соединения и их изоструктурные

аналоги, содержащие слои с существенно различными проводящими и упругими свойствами [7,8], и квазидвумерные магнетики, интеркалированные органикой [9]. В ряде случаев перечисленные слоистые системы проявляют ярко выраженные нелинейные свойства [10–13]. Одновременное влияние слоистости среды, существенно меняющей спектр ее линейных волн и их дисперсию, и нелинейности среды приводит к возможности возникновения новых физических явлений, таких как зависимость прозрачности среды от мощности проходящей волны [14,15], пространственная локализация нелинейных волн в периодических

структурах [10,11] и существование так называемых щелевых солитонов [16,17].

Целью настоящей работы является исследование структуры и характера локализации нелинейных стационарных волн, распространяющихся в ангармонической среде, содержащей тонкие плоскопараллельные слои, отличающиеся по своим линейным свойствам от характеристик самой среды (плоские дефекты). Рассматривается случай, когда различие свойств основного объема и выделенных слоев таково, что возможна локализация волны вблизи этих слоев даже в линейном пределе, при этом выделенные слои играют роль волноводов (в оптических средах — световодов). Благодаря одновременному проявлению линейной локализации на дефектных слоях и нелинейной локализации за счет ангармоничности окружающей их среды возникает возможность результирующей локализации волнового потока в области, содержащей большое число плоских слоев (образование «суперсолитона»). Это явление экспериментально наблюдалось в плоских нелинейных оптических волноводах с периодически модулированным сечением [10,11]. Теоретическое описание нелинейных свойств слоистых структур проводится, как правило, в рамках дискретных моделей для амплитуд волны в отдельных волноводах [10,11,18], описываемых феноменологическими разностными уравнениями с произвольными параметрами. При ряде упрощающих предположений последовательный вывод этих уравнений производился в простейшем случае, когда ангармонизмы учитывались лишь в тонких слоях, разделенных широкими областями линейной среды [14,15,19]. Нами рассматривается ситуация, когда вся слоистая среда является существенно нелинейной и нахождение эффективной нелинейности отдельных волноводов и их эффективного взаимодействия представляет собой нетривиальную проблему. Такая постановка задачи соответствует ряду натурных [10,11] и численных [3,4] экспериментов.

Рассматривается нелинейная среда (магнетик, упругий кристалл или оптически прозрачный диэлектрик), содержащая узкие слои, отличающиеся своими свойствами и разделенные гораздо более широкими областями. В первой части приведены примеры слоистого легкоосного ферромагнетика с различными значениями константы одноионной анизотропии (что соответствует обсуждению в [20]), ангармонического упругого кристалла, содержащего слои (плоские дефекты) с большей плотностью вещества, ангармонической оптической среды со слоями, обладающими боль-

шим значением линейного показателя преломления (как в работах [3,4]), — оптическими световодами, и, наконец, оптического волновода переменного сечения (см. [10,11]). Во всех перечисленных случаях для медленно меняющейся в пространстве и времени огибающей нелинейной монохроматической волны, распространяющейся вдоль слоистой структуры (вдоль оси x), может быть получено следующее стандартное для теории солитонов нелинейное уравнение Шредингера (НУШ):

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\sigma |u|^2 u = - \sum_n \lambda \delta(z - 2an) u, \quad (1)$$

где ось z направлена перпендикулярно дефектным слоям; знаковая функция $\sigma = \pm 1$ для «фокусирующей» и «дефокусирующей» сред соответственно; характеристика плоского дефекта $\lambda > 0$ в случае, когда узкие слои обладают свойствами волноводов («притягивают» линейные волны); $2a$ — расстояние между плоскими дефектными слоями. Таким образом, проблема эквивалентна исследованию нелинейных возмущений в одномерной системе с точечными дефектами (нелинейных локальных колебаний). Для одного изолированного дефекта такая задача подробно исследовалась в работах [21–23] при произвольных знаках σ и λ . В случае нескольких дефектов, взаимодействующих через нелинейное поле, решение задачи становится более громоздким и возникает необходимость разработки эффективных методов изучения таких систем. Основным шагом в этом направлении является исследование нелинейной динамики системы из двух параллельных дефектных слоев (двух точечных дефектов). В теории нелинейных волн хорошо известно [24], что основные черты солитонной динамики содержатся в задаче о двух связанных ангармонических осцилляторах, в частности явление нарушения симметрии возбуждения при достижении порогового значения его суммарной мощности. В нелинейной оптике на это обстоятельство указывалось в [25] для системы из двух связанных волноводов. В работах [26,27] при изучении распространения нелинейных оптических импульсов вдоль двух плоскопараллельных волноводов считалось, что волноводы и окружающая среда различаются значениями нелинейного показателя преломления. (Профиль этого показателя в направлении перпендикулярном плоскости волноводов моделировался прямоугольными функциями [26] или сглаженными колоколообразными функциями [27].) Однако во всех перечисленных работах исследование распространения нелинейных

волн проводилось методами численного моделирования.

Для предложенной простой модели (1) нами аналитически показано, что в случае двух плоских слоев (двух дефектов) наблюдается переход волнового потока при критическом значении его энергии в пространственно-неоднородное состояние с разными суммарными потоками в соседних слоях.

1. Распространение когерентных волн в нелинейных слоистых структурах

Приведем некоторые примеры нелинейных слоистых сред, динамика которых описывается уравнением (1).

1а. Легкоосный ферромагнетик («легкая ось» — ось z), состоящий из параллельных слоев, различающихся величиной константы одноионной анизотропии. Он описывается уравнением Ландау–Лифшица [28] для вектора намагниченности $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$:

$$i \frac{\hbar}{2\mu_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \alpha M_z \Delta \psi + \alpha \psi \Delta M_z + \beta(z) \psi M_z = 0, \quad (2)$$

где μ_0 — магнетон Бора; $\psi = M_x + iM_y$; α — постоянная обменного взаимодействия; β — константа одноионной анизотропии. (Чередующиеся магнитные слои расположены перпендикулярно оси z .)

Рассмотрим слоистую структуру, состоящую из узких (толщиной b) слоев магнетика с магнитной анизотропией ($\beta_0 - \beta_1$), разделенных широкими слоями (толщиной $2a - b$) другого магнетика с анизотропией β_0 . Удобно ввести частоту однородного ферромагнитного резонанса $\omega_0 = 2\mu_0 M_0 \beta_0 / \hbar$ и магнитную длину $l_0 = \sqrt{\alpha / \beta_0}$, относящиеся к широким слоям второго магнетика (M_0 — номинальная намагниченность элементарной ячейки). Для слабой модуляции магнитных свойств ($\beta_1 b \ll \beta_0 a$) в длинноволновом приближении ($l_0 \nabla \ll 1$) для спиновых волн малой амплитуды ($|\psi|^2 \ll M_0^2$) уравнение (2) упрощается:

$$\frac{i}{\omega_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} - l_0^2 \Delta \psi + \psi - \frac{\beta_1(z)}{\beta_0} \psi - \frac{1}{2M_0^2} |\psi|^2 \psi = 0. \quad (3)$$

Здесь слабая модуляция магнитной анизотропии учитывается лишь в линейном слагаемом. В случае когерентной спиновой волны с фиксированным волновым числом k , распространяющейся вдоль магнитной слоистой структуры (вдоль оси

x) и однородной в этом направлении, решение удобно представить в виде $\psi = 2M_0 u(z, t) \times \exp[-i(kx - \omega t)]$, где $\omega = \omega_0(1 + k^2 l_0^2)$ — частота линейной спиновой волны в однородном магнетике с анизотропией $\beta \equiv \beta_0$, а $u(z, t)$ — медленно меняющаяся функция координаты z и времени. Зависимость $u(t)$ в стационарном случае учитывает сдвиг частоты вследствие нелинейности волны, ее возможной локализации в z -направлении и отличия усредненной анизотропии в слоистой среде от значения β_0 , а также может учитывать медленные нестационарные эффекты. Если измерять время в единицах $1/\omega_0$, а координату — в единицах l_0 , то уравнение (3) для $u(z, t)$ переписется в виде

$$-i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2|u|^2 u = - \frac{\beta_1(z)}{\beta_0} u. \quad (4)$$

Наконец, при большом различии толщин магнитных слоев ($a \gg b$) правую часть уравнения (4) можно заменить системой δ -функций для плоских магнитных дефектов:

$$- \frac{\beta_1(z)}{\beta_0} u \approx - \sum_n \lambda \delta(z - 2an) u \quad (5)$$

с $\lambda = b\beta_1/\beta_0$.

1б. Нелинейная упругая среда, содержащая плоскопараллельные дефекты, перпендикулярные оси z . (Для простоты ниже считаем, что дефектные слои отличаются от основной матрицы лишь массой атомов.) Для чисто сдвиговых волн, распространяющихся в кубическом кристалле вдоль слоев (вдоль оси x) и однородных в направлении оси y , при соответствующем выборе масштабов времени, координаты и амплитуды волны уравнение динамики для смещений $u(x, z, t)$ можно свести к безразмерному виду [29]:

$$\rho(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sigma \left\{ 3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + v \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial z} \right] + v \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right\} - \\ - \kappa \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] = 0, \quad (6)$$

где σ — знаковая функция, равная 1 для «фокусирующей» и -1 для «дефокусирующей» среды; v и κ — безразмерные параметры порядка единицы, зависящие соответственно от отношений не-

линейных и линейных упругих модулей; функция $\rho(z) = 1$ для основной матрицы и $\rho(z) = M/m$ в дефектных слоях (M и m — массы дефектных и матричных атомов соответственно).

В фокусирующей среде ($\sigma = 1$) с нормальной дисперсией ($\kappa > 0$) нелинейные волны модуляционно устойчивы в направлении своего распространения [29], поэтому естественно рассмотрение стационарных волн, распространяющихся вдоль слоев, амплитуда которых слабо зависит от времени и координаты в направлении перпендикулярном слоям. В резонансном приближении такое решение с фиксированным волновым вектором \mathbf{k} несущей волны может быть представлено в виде

$$u \approx A(z, t) \cos(kx - \omega t) - B(z, t) \sin(kx - \omega t), \quad (7)$$

где A и B — медленно меняющиеся функции своих аргументов; $\omega^2 = k^2 - \kappa k^4$, что отвечает закону дисперсии линейных волн в идеальной решетке (в выбранных переменных скорость звука равна единице). Подставляя выражение (7) в уравнение (6), оставляя в нем лишь первые производные $\partial A/\partial t, \partial B/\partial t$ от «медленного» времени и вторые производные от «медленной» координаты z и вводя комплексную функцию $U = A + iB$, уравнение (6) легко записать в следующем приближенном виде:

$$2i\omega \frac{\partial U}{\partial t} + (1 - \kappa\mu k^2) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{3}{4} \sigma k^4 |U|^2 U = - \left(\frac{M}{m} - 1 \right) \omega^2 b \sum_n \delta(z - 2an) U, \quad (8)$$

где b — толщина дефектных слоев; $2a$ — расстояние между ними. При выводе уравнения (8) мы учли соотношение $\partial U/\partial t \ll \omega U$ и отбросили слагаемые $2i\omega (M/m - 1)(\partial U/\partial t)\delta(z)$. Измеряя время в единицах $2/\omega$, координату z в единицах $\sqrt{1 - \kappa\mu k^2}/k$ и вводя новые смещения $W = kU\sqrt{3}/(2\sqrt{2})$, перепишем уравнение (8) аналогично (4), (5):

$$i \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + 2\sigma |W|^2 W = - \sum_n \lambda \delta(z - 2an) W, \quad (9)$$

где $\lambda = [(M/m) - 1]b$.

1в. *Нелинейная оптическая среда, содержащая плоскопараллельные световоды, т.е. слои, характеризующиеся большим показателем преломления, чем оптическая среда между ними.*

(Как и выше, предполагаем, что слои расположены перпендикулярно оси z .) В случае плоскополяризованной волны, распространяющейся в немагнитной среде ($\mu = 1$) вдоль слоев (в направлении оси x), не зависящей от координаты y и имеющей вектор электрического поля \mathbf{E} , направленный вдоль оси y ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{i}_y$), уравнения Максвелла приобретают вид

$$n^2(z, \mathbf{E}) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{E} = 0, \quad (10)$$

где показатель преломления n зависит от координаты z и напряженности поля: $n = n_0 + n_1(z) + n_2(\mathbf{E})$, $n_1(z) = n_1$ в световодах и $n_1 = 0$ вне их. Будем считать, что модуляция параметров среды и плотность энергии в волне малы, т.е. $n_1, n_2 \ll n_0$ и зависимость $n(z)$ можно учитывать лишь в линейном показателе. Ограничимся близкими к монохроматической волне решениями с фиксированным волновым вектором $\mathbf{k} = \mathbf{i}_x k$, которые удобно представить как

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}_y [E_1(z, t) \cos(kx - \omega_0 t) - E_2(z, t) \sin(kx - \omega_0 t)], \quad (11)$$

где E_i медленно зависят от z и t и выбрана связь $\omega_0 = ck/n_0$, соответствующая закону дисперсии линейных волн в среде, разделяющей световоды. (Напомним, что при этом медленная зависимость $E_i(t)$ учитывает отличие истинной частоты $\omega(k)$ при данном k от $\omega_0(k)$ из-за нелинейных эффектов и модуляции параметров среды.)

Введем комплексную функцию $E = E_1 + iE_2$, в терминах которой нелинейная добавка к показателю преломления приобретает вид [30] $n_2(E) = \sigma \alpha(\omega) |E|^2$, где мы ввели $\sigma = +1$ и -1 соответственно для фокусирующей и дефокусирующей среды. Подставляя выражение (11) в исходное уравнение (10) и оставляя лишь первые производные от функции E по медленному времени, получим

$$2in_0^2 \omega_0 \frac{dE}{dt} + c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + 2n_0 n_1(z) \omega_0^2 E + 2n_0 \alpha \omega_0^2 \sigma |E|^2 E = 0, \quad (12)$$

где в первом слагаемом n^2 заменили на n_0^2 , учитывая неравенства $n_1, n_2 \ll n_0$, $\partial E/\partial t \ll \omega_0 E$. Если ширина световодов b много меньше расстояния между ними $2a$, то, измеряя время в единицах $2n_0/\alpha\omega_0$, а координату z в единицах $(n_0/\alpha)^{1/2} k^{-1}$, уравнение (12) можно свести к уравнению (9) с $\lambda = 2b(n_1/n_0)$:

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + 2\sigma|E|^2 E = - \sum_n \lambda \delta(z - 2an) E . \quad (13)$$

В реальных оптических экспериментах постановка задачи может быть несколько иной [10,11]: нелинейная электромагнитная волна распространяется в плоском световоде переменного сечения. Нелинейная оптическая среда с показателем $n = n_0 + n_2(\mathbf{E})$ занимает область $0 < y < h(z) = h_0 + \Delta(z)$, где $\Delta > 0$, и плоскополяризованная волна распространяется вдоль оси x . Если световод ограничен оптически непрозрачной средой, то решения, близкие к монохроматической волне, при слабой модуляции толщины слоя приближенно могут быть представлены в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}_y [E_1(z,t) \cos(kx - \omega_0 t) - E_2(z,t) \sin(kx - \omega_0 t)] \sin \frac{\pi y}{h(z)}, \quad (14)$$

где удобно выбрать $\omega_0 \approx \sqrt{c^2 k^2 / n_0^2 + \pi^2 / h_0^2}$. При этом после интегрирования уравнения (10) по толщине световода уравнение (12) модифицируется следующим образом:

$$2in_0^2 \omega_0 \frac{\partial E}{\partial t} + c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{c^2(h^2 - h_0^2)}{h^2 h_0^2} E + \frac{4}{3} n_0 \alpha \omega_0^2 \sigma |E|^2 E = 0 . \quad (15)$$

Если измерять время в единицах $3n_0/\alpha\omega_0$, координату — в единицах $(3n_0/2\alpha)^{1/2} k^{-1}$, то уравнение (15) сводится к стандартному уравнению

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + 2\sigma|E|^2 E = -\lambda(z)E , \quad (16)$$

где $\lambda(z) \approx 3n_0\Delta(z)/(2\alpha k^2 h_0^3)$. Таким образом, более широкие области оптически прозрачной пластины играют роль новых эффективных волноводов в рассматриваемой двумерной нелинейной оптической системе.

2. Локализация нелинейных волн в ангармонической среде с двумя плоскопараллельными «притягивающими» дефектами

В качестве первого шага при исследовании локализации нелинейных волн в слоистой среде рассмотрим простой случай ангармонической среды с

двумя плоскопараллельными слоями, отличающимися по своим линейным свойствам от окружающей их матрицы и находящихся на расстоянии, существенно превосходящем их толщину. В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\sigma|u|^2 u = -\lambda[\delta(z+a) + \delta(z-a)]u , \quad (17)$$

где предполагаем, что $\lambda > 0$, т.е. дефектные слои «притягивают» линейные волны и играют роль «волноводов».

Проблема сводится к решению нелинейного уравнения Шредингера в области вне выделенных слоев с граничными условиями возле них (при $z = \mp a$)

$$u|_{\mp a-0} = u|_{\mp a+0} \quad (18a)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\mp a+0} - \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\mp a-0} = -\lambda u|_{\mp a} , \quad (18b)$$

и нулевыми асимптотиками на бесконечности ($z \rightarrow \mp\infty$) для стационарных локализованных состояний вида $u(z,t) = u(z) \exp(-i\omega t)$. (Эта задача для одного дефектного слоя подробно рассмотрена в работе [23].)

Легко показать, что функция $u(z)$ для пространственно-локализованных состояний должна быть выбрана вещественной. Действительно, для комплексной функции $u(z) = a(z) \exp(i\phi(z))$ из уравнения (17) и граничных условий (18) следует, что $d\phi/dz = c/a^2$ и фаза ϕ и ее производная $d\phi/dz$ непрерывны при $z = \mp a$. Из уравнения для функции $a(z)$ и условия ее убывания при $z \rightarrow \mp\infty$ следует, что $c = 0$ вне волноводов, а значит (из условия непрерывности $d\phi/dz$ при $z = \mp a$), и между ними.

Рассмотрим отдельно случаи фокусирующей ($\sigma = +1$) и дефокусирующей ($\sigma = -1$) сред.

2а. Фокусирующая среда. Положим в уравнении (17) $\sigma = +1$ и учтем вещественность функции $u(z)$. При этом возможны четыре типа локализованных стационарных состояний. При малой мощности полного потока в нелинейной волне существуют два решения с одинаковыми и противоположными фазами волн ($\phi_1 = \phi_2$ и $\phi_1 = \phi_2 + \pi$) и равными их амплитудами вблизи двух выделенных слоев (плоских дефектов). Эти состояния аналогичны главным нелинейным модам в нелинейной механике конечномерных систем. При превышении порогового значения мощности волны возникают два дополнительных решения с

одинаковыми фазами, но разными амплитудами волн, локализованных у двух плоскостей.

Если фазы волн вблизи двух плоскостей совпадают (аналог синфазных колебаний двух дефектов в одномерном случае), то решения уравнения (17) в областях $z < -a$ (1), $z > a$ (2) и $-a < z < a$ (3) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{1,2}(z) &= \varepsilon \operatorname{sech} [\varepsilon (z - z_{1,2})], \\ u_3(z) &= \frac{q'\xi}{\operatorname{dn} [\xi (z - z_3), q]}, \end{aligned} \quad (19)$$

где параметр ε характеризует амплитуду волны и связан с величиной ω (т.е. с отклонением частоты нелинейной волны в слоистой среде от таковой в однородной линейной среде с тем же волновым вектором): $\varepsilon = \sqrt{-\omega}$, $\operatorname{dn}(p, k)$ — эллиптическая функция Якоби с модулем q ($q' = \sqrt{1 - q^2}$) и $\xi = \varepsilon/\sqrt{2 - q^2}$. Решение (19) является однопараметрическим и полностью характеризуется значением параметра ε . Остальные четыре параметра q и z_i выражаются через ε из граничных условий при $z = \mp a$.

Поскольку волновой поток в основном локализован вблизи двух «притягивающих» плоскостей, то удобной характеристикой локализованной волны являются амплитуды поля в этих плоскостях $U_1 = u(z = -a)$ и $U_2 = u(z = a)$. Из граничных условий получаем шесть соотношений между параметрами ε , q , z_i и U_n (где $i = 1, 2, 3$ и $n = 1, 2$):

$$U_{1,2} = \varepsilon \operatorname{sech} [\varepsilon (a \pm z_{1,2})] = \frac{q'\xi}{\operatorname{dn} [\xi (a \pm z_3), q]}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} U_n(2\sqrt{\varepsilon^2 - U_n^2} - \lambda) + \left[\sqrt{U_n^2 - q'^2\xi^2} \sqrt{\xi^2 - U_n^2} - \right. \\ \left. - U_n \sqrt{\varepsilon^2 - U_n^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

С помощью соотношений (20) можно исключить параметры z_i и q' и представить граничные условия (21) в виде замкнутой системы из двух алгебраических уравнений для амплитуд U_n , содержащей в качестве параметров лишь характеристику сдвига частоты ε и расстояние между плоскостями $2a$. Эту процедуру легко выполнить в пределе слабой динамической связи между плоскостями.

В пределе линейной среды сдвиг частоты волны, локализованной у изолированной дефектной плоскости, равен $\omega_l = -\lambda^2/4$ ($\varepsilon = \lambda/2$), а

сдвиг частот синфазных и противифазных локализованных волн при наличии двух плоскостей и слабой их связи можно представить как

$$\omega_{1,2} = \omega_l \mp v_0, \quad v_0 = \frac{\lambda^2}{2} \exp(-\lambda a), \quad (22)$$

где параметр v_0 характеризует эффективное взаимодействие волн на дефектных плоскостях, которое мало при $\lambda a \gg 1$ (большое расстояние между волноводами или сильная локализация волн на этих плоскостях).

В фокусирующей среде, в которой частота волны понижается с ростом ее амплитуды, при условии $\lambda a \gg 1$ справедливо неравенство $\varepsilon a \gg 1$ (с ростом амплитуды динамическая связь волноводов уменьшается). Период эллиптической функции в (19) превышает расстояние между плоскостями $2K(q) > 2a$, и при большом расстоянии между плоскостями ($a \gg 1$) имеем $q' \ll 1$. Если воспользоваться неравенствами $q' \ll 1$, $\exp(-\lambda a) \ll 1$ (т.е. $\lambda a \gg 1$) и условием малости амплитуды волны $U_n \ll \varepsilon$, то из (20) следует искомая зависимость $q' = q'(\varepsilon, U)$:

$$q' \approx \frac{2}{\varepsilon} \sqrt{U_1 U_2} \exp(-\varepsilon a). \quad (23)$$

Заметим, что при $\lambda \propto 1$ в пределе слабой связи волноводов $\lambda a \gg 1$ имеется широкая область частот

$$\omega_l - \omega \ll \omega_l^2 \propto 1, \quad (24)$$

в которой выполняются все перечисленные выше неравенства. При этом в интервале $\exp(-2\lambda a) \ll 1 - \omega/\omega_l \ll \omega_l$ существенно преобразуются зависимости $U_n = U_n(\omega)$ и проявляются нелинейные свойства системы.

С помощью соотношения (23) получаем из (21) основную систему уравнений для определения зависимости амплитуд U_n синфазных волн, локализованных у дефектных плоскостей, от их частоты ω :

$$\begin{aligned} (\omega_l - v - \omega)U_n - U_n^3 + v(U_n - U_m) = 0, \\ n, m = 1, 2, \quad n \neq m, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$v = 2\varepsilon^2 e^{-2\varepsilon a} \quad (26)$$

— параметр, характеризующий взаимодействие локализованных волн через нелинейное поле и совпадающий с v_0 в линейном пределе. Поскольку мы исследуем лишь стационарные состояния с

временной зависимостью $\propto \exp(-i\omega t)$, система (25) соответствует уравнениям динамики

$$-i \frac{\partial U_n}{\partial t} + (\omega_l - \nu) U_n - U_n^3 + \nu(U_n - U_m) = 0, \quad (27)$$

$$n, m = 1, 2, n \neq m$$

двух линейно связанных ангармонических осцилляторов (ротаторов) с потенциальной энергией

$$W = \sum_{n=1,2} \left[\frac{1}{2} (\omega_l - \nu) U_n^2 - \frac{1}{4} U_n^4 \right] + \frac{\nu}{2} (U_1 - U_2)^2, \quad (28)$$

где U_n — амплитуды колебаний осцилляторов. Необычность ситуации заключается в том, что параметр ν , входящий в энергию (28), слабо зависит от частоты волны. Однако учет этой зависимости приводит к появлению в уравнениях ангармонических слагаемых порядка величины $\lambda a \exp(-\lambda a) U^3 \ll U^3$, существенно меньших основных нелинейных слагаемых. Поэтому в дальнейшем можно полагать $\nu \approx \nu_0$.

Как указывалось выше, кроме решения (19) с фиксированным значением фазы ϕ , возможны локализованные стационарные состояния, в которых ϕ имеет вид ступенчатой функции и меняет свое значение на π в точке между плоскими дефектами, в которой амплитуда поля обращается в нуль. Для такого противофазного волнового потока решение имеет вид

$$u_{1,2}(z) = \pm \varepsilon \operatorname{sech} [\varepsilon(z - z_{1,2})], \quad (29)$$

$$u_3(z) = -qq'\eta \frac{\operatorname{sn}(\eta z, q)}{\operatorname{dn}(\eta z, q)},$$

где $\eta = \varepsilon/\sqrt{2q^2 - 1}$ и $z_1 = -z_2$. Для этого случая соотношения (20) и (21) переписываются следующим образом:

$$U_{1,2} = \pm \varepsilon \operatorname{sech} [\varepsilon(a \pm z_{1,2})] = \pm qq'\eta \frac{\operatorname{sn}(\eta a, q)}{\operatorname{dn}(\eta a, q)}, \quad (30)$$

$$U_n (2\sqrt{\varepsilon^2 - U_n^2} - \lambda) + \left[\sqrt{(U_n^2 - q^2 \eta^2)(q^2 \eta^2 - U_n^2)} - U_n \sqrt{\varepsilon^2 - U_n^2} \right] = 0, \quad (31)$$

однако (23) остается справедливым (при замене $U_2 \rightarrow |U_2|$), и при выполнении обсуждавшихся выше неравенств выражения (25)–(28) сохраняют свой вид. Таким образом, уравнения (25) и (27) описывают все типы локализованных ста-

онарных состояний в системе двух плоских дефектов.

Исключая сдвиг частоты ω из (25), находим соотношение между амплитудами волн U_1 и U_2 :

$$(U_1 - U_2)(U_1 + U_2)(U_1 U_2 - \nu_0) = 0. \quad (32)$$

Это — стандартное уравнение, возникающее при анализе динамики связанных ангармонических осцилляторов [24]. Его решения $U_1 = U_2$, $U_1 = -U_2$ и $U_1 = \nu_0/U_2$ соответствуют трем типам стационарных локализованных волн — с синфазными одинаковыми потоками в двух плоскостях (*SS*), с антифазными потоками одинаковой мощности (*A*) и синфазными потоками разной интенсивности (*SN*).

В антифазном решении зависимость амплитуды волны U_n от частоты имеет вид

$$U_1 = -U_2 = \sqrt{\omega_l + \nu_0 - \omega}, \quad (33)$$

и это решение, как показано в [24], устойчиво при всех значениях интенсивности полного потока.

В синфазной симметричной моде

$$U_1 = U_2 = \sqrt{\omega_l - \nu_0 - \omega}, \quad (34)$$

но это решение устойчиво лишь до значения частоты волны $\omega = \omega_b = \omega_l - 2\nu_0$, при котором происходит бифуркация решения и возникновение устойчивого синфазного неоднородного *SN*-состояния с разными амплитудами

$$U_{1,2}^2 = \left[(\omega_l - \omega) \pm \sqrt{(\omega_l - \omega)^2 - 4\nu_0^2} \right]. \quad (35)$$

Аналогичная бифуркация решений и возникновение неоднородных состояний были рассмотрены ранее численно для прямоугольного и колоколообразного профилей показателя преломления в системе световодов в [26,27].

Отметим, что в фокусирующей среде существует также состояние с волновым потоком, локализованным между плоскими дефектами, описываемое функцией $\operatorname{dn}(\xi z, q)$. Однако очевидно, что данное решение неустойчиво относительно «перекачки» волны в один из притягивающих слоев.

Уровень возбуждения системы (суммарный волновой поток) удобно характеризовать параметром $I = \sum U_n^2$, связанным с полным числом элементарных возбуждений в системе. Для рассмотренных типов локализованных волн справедливы следующие зависимости этого параметра от частоты:

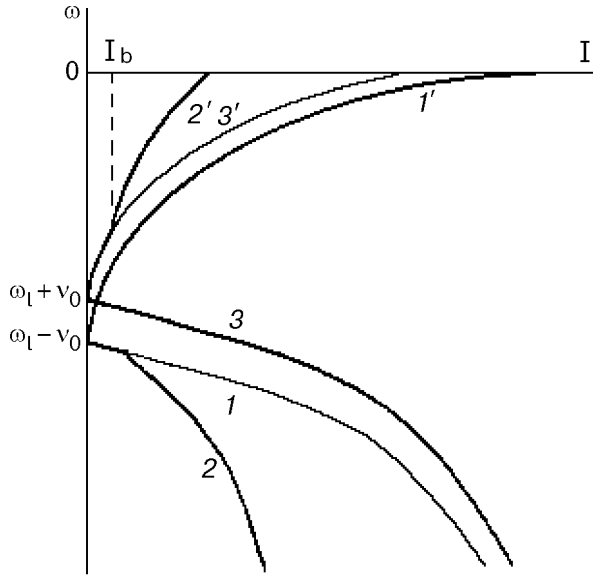


Рис. 1. Зависимость $\omega(I)$ для синфазной симметричной (SS) моды (1), синфазной несимметричной (SN) моды (2) и антифазной (A) моды (3) в случае фокусирующей среды; для синфазной (SS) моды (1'), антифазной (A) моды (3') и неоднородного (AN) состояния (2') в случае дефокусирующей среды.

$$I_A = 2(\omega_l + \nu_0 - \omega), \quad I_{SS} = 2(\omega_l - \nu_0 - \omega),$$

$$I_{SN} = \omega_l - \omega. \quad (36)$$

Видно, что в точке бифуркации $\omega_b = \omega_l - 2\nu_0$, $I_b = 2\nu_0$ происходит резкое изменение зависимости амплитуд волн от частоты и существенно проявляется нелинейность среды. Согласно формулам (23), (33)–(35), все используемые выше неравенства ($q' \ll 1$, $U_n \ll \epsilon$) выполняются в точке бифуркации и в существенно нелинейной области ($I > I_b$) при соблюдении условия (24), при котором $\omega_l - \omega \gg \omega_l - \omega_b$. Зависимости (36) показаны на рис. 1 кривыми 1–3.

Чтобы связать введенную интегральную характеристику I для рассмотренной эффективной системы осцилляторов (27) с полным числом элементарных возбуждений N в исходной системе (17), рассмотрим плотность лагранжиана, соответствующего уравнению (17):

$$L = \frac{i}{2} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) - \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 + \sigma |u|^4 + \lambda [\delta(z+a) + \delta(z-a)] u^2. \quad (37)$$

Построив с помощью лагранжиана (37) адиабатический инвариант для рассматриваемых одночастотных решений, легко убедиться, что он имеет вид

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dz \quad (38)$$

и задает при квазиклассическом квантовании полное число квантов поля (мы полагаем $\hbar = 1$). Полная энергия системы, как это следует из (37), равна

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 - \sigma |u|^4 - \lambda [\delta(z+a) + \delta(z-a)] |u|^2 \right] dz. \quad (39)$$

Подставляя решения (19) и (29) в выражение (38), легко вычислить точно число квантов поля в областях 1 и 2:

$$N_{1,2} = \epsilon \left(1 - \sqrt{1 - U_{1,2}^2 / \epsilon^2} \right). \quad (40)$$

При слабой связи волноводов ($\lambda a \gg 1$) число элементарных возбуждений в них равно соответственно $2N_1$ и $2N_2$, а полное число квантов поля приблизительно равно $N \approx 2(N_1 + N_2)$. При такой слабой связи в интересующей нас области частот (24), включающей точку бифуркации, выражение (40) упрощается и соотношение между N и I оказывается весьма простым:

$$N \approx I / \epsilon \quad (41)$$

или $N = 2I / \lambda$ в малоамплитудном пределе, когда $\epsilon \approx \lambda / 2$.

Подставляя решения для нелинейных локальных мод в выражение (39) для энергии, в том же основном приближении легко получаем тривиальный результат $E = \omega_l N$. Но мы можем найти зависимость $E = E(N)$ с большей точностью, воспользовавшись формулами (36), (41) и известным соотношением для нелинейных одночастотных возбуждений $\omega = \partial E / \partial N$ (см. [24]). При этом для всех типов локальных мод легко получить следующие зависимости для интегралов движения:

$$E_A = (\omega_l + \nu_0) N - \lambda N^2 / 8,$$

$$E_{SS} = (\omega_l - \nu_0) N - \lambda N^2 / 8, \quad (42)$$

$$E_{SN} = \omega_l N - \lambda N^2 / 4.$$

Таким образом, при превышении плотностью энергии порогового значения E_b при фиксированном значении N минимальной энергией обладает

SN-состояние, тогда волна распространяется преимущественно вдоль одной из плоскостей.

26. Дефокусирующая среда. Перейдем к исследованию локализации волнового потока в системе двух «притягивающих» плоскостей в дефокусирующей нелинейной среде, которой соответствует $\sigma = -1$ в уравнении (17). В этом случае в пределе $\lambda a \gg 1$ задача также может быть сведена к динамике эффективной системы двух связанных ангармонических осцилляторов, но с «жесткой» нелинейностью, частота которых растет с амплитудой. Как показано в [23], в случае одной дефектной плоскости в дефокусирующей среде частота волны, распространяющейся вдоль нее, растет с увеличением ее амплитуды, и при минимальном сдвиге частоты $\omega = \varepsilon = 0$, соответствующем краю зоны линейных объемных волн, полная величина волнового потока достигает максимального значения $N = \int dz |u|^2 = N_0 = \lambda$. При этом профиль волны вблизи волновода имеет вид алгебраического солитона со степенными асимптотиками на больших расстояниях. Поток с мощностью больше N_0 не может быть локализован в дефокусирующей среде.

Как и в предыдущем случае, в системе с двумя плоскопараллельными слоями возможно существование стационарных состояний трех типов: с одинаковыми фазами и амплитудами волны в двух плоскостях (*SS*), с одинаковыми амплитудами и противоположными фазами (*A*) и с разными амплитудами локализованных волн. Но теперь такое неоднородное состояние (*AN*) отщепляется от антисимметричного решения и фазы потоков в плоскостях отличаются на π .

Решение для синфазной моды (*SS*) в областях 1, 2 и 3 имеет вид

$$u_{1,2}(z) = \mp \varepsilon \operatorname{cosech} [\varepsilon(z - z_{1,2})], \quad u_3(z) = \frac{q'\eta}{\operatorname{cn}(\eta z, q)} \quad (43)$$

с $z_1 > -a$ и $z_2 = -z_1$, а решение для противофазных мод (*A*) и (*AN*) записывается следующим образом:

$$u_{1,2}(z) = -\varepsilon \operatorname{cosech}(\varepsilon [z - z_{1,2}]), \quad u_3(z) = -q'\xi \frac{\operatorname{sn}[\xi(z - z_3), q]}{\operatorname{cn}[\xi(z - z_3), q]}, \quad (44)$$

где $z_3 = 0$ для *A*-моды и $z_3 \neq 0$ для *AN*-моды.

В случае слабосвязанных волноводов выполняются все обсуждавшиеся выше неравенства. (Заметим, что теперь эффективная связь между вол-

новодами слабо растет с ростом амплитуды распространяющейся волны.) Проводя для решений (43), (44) исследования, аналогичные предыдущим, легко получить эффективные уравнения вида (25) и (27), но с противоположным знаком при нелинейном слагаемом (связанные «жесткие» ангармонические осцилляторы). При этом уравнение (32) изменяется:

$$(U_1 - U_2)(U_1 + U_2)(U_1 U_2 + v_0) = 0. \quad (45)$$

Состояние с несимметричным распределением волны вблизи двух плоскостей ($U_2 = -v_0/U_1$) отщепляется в точке бифуркации $\omega_b = \omega_l + 2v_0$ от антисимметричной моды с $U_1 = -U_2$. Запишем выражения для зависимостей амплитуд волновых потоков от частотного сдвига для разных мод:

$$U_1 = U_2 = \sqrt{\omega - \omega_l + v_0} \quad (SS), \\ U_1 = -U_2 = \sqrt{\omega - \omega_l - v_0} \quad (A), \quad (46)$$

$$U_{1,2}^2 = \frac{1}{2} [(\omega - \omega_l) \pm \sqrt{(\omega - \omega_l)^2 - 4v_0^2}] \quad (AN).$$

Связь частоты с интегральной мощностью потока представим как

$$I_{SS} = 2(\omega - \omega_l + v_0), \quad I_A = 2(\omega - \omega_l - v_0), \\ I_{AN} = \omega - \omega_l. \quad (47)$$

Эти зависимости изображены на рис.1 кривыми 1', 2' и 3'. Видно, что имеется определенная симметричность зависимостей $I(\omega)$ для фокусирующей и дефокусирующей сред. После точки бифуркации ($I > I_b = 2v_0$) *A*-мода становится неустойчивой, а *AN*- и *SS*-моды устойчивы при всех допустимых значениях энергии волны. Связь величины I с полным числом квантов поля N сохраняет вид (41).

При удалении от точки бифуркации ($I \gg I_b$, $\varepsilon \rightarrow 0$) рассмотрение в рамках упрощенной модели связанных ангармонических осцилляторов перестает выполняться. Однако можно показать, что при значениях волнового потока $I \approx \lambda^2/4$ и $I \approx \lambda^2/2$ зависимости $\omega = \omega(I)$ неоднородной *AN*-моды и соответственно однородных *SS*- и *A*-мод «оканчиваются» на границе спектра линейных объемных волн (см. рис.1). При этом профили распределения поля во всех модах приобретают вид алгебраических солитонов.

3. Локализация когерентной волны в нелинейной слоистой среде

Вернемся к рассмотрению нелинейной слоистой среды, содержащей периодическую структуру далеко отстоящих друг от друга параллельных плоскостей со свойствами, отличными от свойств окружающей среды, т.е. к уравнению (1) с бесконечным числом δ -функций в правой части. Результаты в разд. 2 позволяют при слабой динамической связи между дефектными плоскостями свести проблему к эффективной системе для бесконечной цепочки связанных ангармонических осцилляторов, которые в случае когерентной стационарной волны описываются следующей системой разностных уравнений:

$$-i \frac{dU_n}{dt} + (\omega_l - 2\nu_0)U_n - U_n^3 + \nu_0(2U_n - U_{n+1} - U_{n-1}) = 0. \quad (48)$$

Подобные уравнения обычно используются при интерпретации результатов экспериментов по локализации оптических потоков в слоистых нелинейных средах [10,11,18], но при этом не конкретизируются параметры такой эффективной цепочки осцилляторов. Математической проблеме локализации возбуждений в дискретных нелинейных системах типа (48) и существования в них дискретных солитонов огибающей посвящено в последнее время большое число работ [31,32]. Мы ограничимся простейшим случаем, когда область локализации нелинейной волны в слоистой среде существенно превосходит период этой структуры. Это условие накладывает дополнительное ограничение на амплитуду волны: вместо прежнего неравенства $U_n \ll \lambda^2$ ($U_n \ll \epsilon$) теперь справедливо $U_n \ll \exp(-\lambda a/2)$. При этом сужается область допустимых частот волны и неравенство (24) переходит в $\omega_l - \omega \ll \lambda^2 \exp(-\lambda a)$. С указанными оговорками уравнение (48) может быть заменено дифференциальным нелинейным уравнением Шредингера для функции $U = U(Z, t)$

$$-i \frac{\partial U}{\partial t} - 4a^2\nu_0 \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + (\omega_l - 2\nu_0)U - U^3 = 0 \quad (49)$$

с хорошо известным солитонным решением

$$U_n \approx \frac{\sqrt{2}\sqrt{\omega_l - 2\nu_0 - \omega}}{\text{ch}[\sqrt{(\omega_l - 2\nu_0 - \omega)/\nu_0} n]} e^{-i\omega t}. \quad (50)$$

Это решение аналитически описывает локализованную в поперечном направлении нелинейную волну, распространяющуюся вдоль слоистой

структуры, наблюдавшуюся, в частности, в экспериментах в [10,11,18].

Данная работа выполнена при поддержке проекта INTAS-99 (грант № 167) и программы МНОП (грант USU082087).

1. *Colloq. Digest of 14th Int. Coll. on Magnetic Films and Surfaces, ϵ -MRS Symp. on Magnetic Ultrathin Films, Multilayers and Surfaces (ICMFS/ ϵ -MRS'94)*, Düsseldorf, Germany (1994).
2. *Abstr. Book of 2nd Int. Symp. on Metallic Multilayers (MML'95)*, Cambridge, UK (1995).
3. Yaron Silberberg and George I. Stegeman, *Appl. Phys. Lett.* **50**, 801 (1987).
4. D. R. Heatley, E. M. Wright, and G. I. Stegeman, *Appl. Phys. Lett.* **53**, 172 (1988).
5. *Photonic Band Gaps and Localization*, C. M. Soukoulis (ed.) Plenum, New York (1993).
6. *Photonic Band Gap Materials*, C. M. Soukoulis (ed.) Kluwer Academic, London (1996).
7. J. J. Phyne, D. A. Neumann, V. A. Gotaas, and F. Beech, *Phys. Rev.* **B36**, 2294 (1987).
8. L. Pintschovius, N. Pyka, and W. Reichardt, *Physica* **B174**, 823 (1991).
9. А. А. Степанов, В. А. Пашенко, М. И. Кобец, *ФНТ* **14**, 550 (1988); там же **14**, 1212 (1988).
10. H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, and J. S. Aitchison, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3383 (1998).
11. U. Peschel, R. Morandotti, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg, and Y. Silberberg, *Appl. Phys. Lett.* **75**, 1348 (1999).
12. А. А. Степанов, Д. А. Яблонский, *ФНТ* **15**, 215 (1989).
13. М. М. Богдан, М. И. Кобец, Е. Н. Хацько, *ФНТ* **25**, 263 (1999).
14. D. Hennig, H. Gabriel, G. P. Tsironis, and M. Molina, *Appl. Phys. Lett.* **64**, 2934 (1994).
15. Qiming Li, C. T. Chan, K. M. Ho, and C. M. Soukoulis, *Phys. Rev.* **B53**, 15577 (1996).
16. D. Mills and J. Trullinger, *Phys. Rev.* **B36**, 947 (1987).
17. O. A. Chubykalo, A. S. Kovalev, and O. V. Usatenko, *Phys. Rev.* **B47**, 3153 (1993).
18. A. B. Aceves, C. De Angelis, T. Peschel, R. Mutschall, F. Lederer, S. Trillo, and S. Wabnitz, *Phys. Rev.* **E53**, 1172 (1996).
19. Yu. B. Gaididei, P. L. Christiansen, K. O. Rasmussen, and M. Johansson, *Phys. Rev.* **B55**, R13365 (1997).
20. R. L. Stamps, R. E. Camley, R. J. Hicken, *Phys. Rev.* **B54**, 4159 (1996).
21. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *ФНТ* **1**, 1544 (1975).
22. Yu. S. Kivshar and B. Malomed, *J. Phys.* **A21**, 1553 (1988).
23. М. М. Богдан, И. В. Герасимчук, А. С. Ковалев, *ФНТ* **23**, 197 (1997) [М. М. Bogdan, I. V. Gerasimchuk, and A. S. Kovalev, *Low Temp. Phys.* **23**, 145 (1997)].
24. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989).
25. S. M. Jensen, *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-18**, 1580 (1982).
26. L. Thylen, E. M. Wright, G. I. Stegeman, C. T. Seaton, and J. V. Moloney, *Opt. Lett.* **11**, 739 (1986).
27. S. Wabnitz, E. M. Wright, C. T. Seaton, and G. I. Stegeman, *Appl. Phys. Lett.* **49**, 838 (1986).
28. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).

-
29. А. С. Ковалев, Е. С. Сыркин, *ЖЭТФ* **102**, 522 (1992).
 30. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
 31. S. Flach and C. R. Willis, *Phys. Rep.* **295**, 181 (1998).
 32. S. Flach, *Discrete Breathers, Habilitationsschrift*, Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme, Dresden, Germany (1997).

Localization of nonlinear waves in layered media

I. V. Gerasimchuk and A. S. Kovalev

The localization of nonlinear waves propagating in an anharmonic medium along a system of two identical parallel plane defects (waveguides) is in-

vestigated in the framework of a simple model describing the nonlinear dynamics of layered media (magnetically ordered, elastic and optical). The effective analytical method for investigating this problem and reducing it to a model of coupled anharmonic oscillators is proposed. All the parameters of such oscillator model are found from the microscopic description of the problem. The obtained results allows us to describe adequately the nonlinear dynamics of layered media in terms of well studied discrete models of nonlinear mechanics. It is shown that for the total energy of a wave larger than some threshold value the state with the equal energy fluxes localized near the waveguides becomes unstable and the inhomogeneous regime is realized in which the wave beam propagates mainly along one of the plane layers.