Физика низких температур, 2000, т. 26, № 6, с. 557–566

Температура сверхпроводящего перехода и коэффициент изотопического эффекта в сверхпроводниках с малыми значениями энергии Ферми

М. Е. Палистрант

Институт прикладной физики, Молдова, 2028, г. Кишинев, ул. Академическая, 5
E-mail: statphys@asm.md

Статья поступила в редакцию 19 ноября 1999 г., после переработки 1 февраля 2000 г.

Исследована сверхпроводимость в системах с переменной плотностью носителей заряда, сильными электронными корреляциями (путем учета влияния этих корреляций на электрон-фононное взаимодействие) и малыми энергиями Ферми. Последнее обстоятельство приводит к нарушению теоремы Мигдала и к необходимости учета вершинных и пересекающихся диаграмм по электрон-фононному взаимодействию (P_v, P_c). Рассмотрена двумерная и трехмерная системы. Найдены величины P_v и P_c и уравнение для импульса обрезания электрон-фононного взаимодействия Q_c. Показана зависимость этой величины от концентрации носителей заряда. Получены выражения для температуры сверхпроводящего перехода T_c и коэффициента изотопического эффекта α и проанализировано их поведение как функций концентрации носителей заряда. Определены значения плотностей носителей заряда, при которых возможна сверхпроводимость в двумерной и трехмерной системах.

Досліджено надпровідність в системах із змінною густиною носіїв заряду, сильними електронними кореляціями (через урахування впливу цих кореляцій на електрон-фононну взаємодію) та малими енергіями Фермі. Остання обставина призводить до порушення теореми Мігдала та до необхідності урахування вершинних і пересічних діаграм по електрон-фононній взаємодії (P_v, P_c). Розглянуто двовимірну та тривимірну системи. Знайдено величини P_v і P_c та рівняння для імпульсу обрізування електрон-фононної взаємодії Q_c. Показано залежність цієї величини від концентрації носіїв заряда. Одержано вирази для температури надпровідного переходу T_c та коефіцієнта ізотопічного ефекту α і проаналізовано їх поведінку як функцій концентрації носіїв заряду. Визначено значення густин носіїв заряду, при котрих імовірна надпровідність у двовимірній та тривимірній системах.

pACS: **74.20.–z**, **74.10.+v**

1. Введение

С момента открытия высокотемпературной сверхпроводимости накоплен богатый материал по исследованию оксидных керамик как экспериментально, так и теоретически. Однако описание физических свойств этих материалов по-прежнему остается одной из наиболее трудных проблем современной физики низких температур. Это связано со сложностью объектов исследования: сложная кристаллическая структура, сильная анизотропия, наличие особенностей в электронном энергетическом спектре, переменная концентрация носителей заряда, сильные электронные корреляции и др. Рассмотрение таких систем, по-видимому, должно основываться на моделях типа хаббардовской, учитывающей сильные электронные корреляции, обусловленные кулоновским взаимодействием электронов, с учетом сильного электрон-фононного взаимодействия. Обзор различных подходов к решению проблемы и примененные при этом приближения приведены, например, в работе [1].

Для таких систем развита специальная диаграммная техника, которая позволяет учитывать сильные электронные корреляции и сильное электрон-фононное взаимодействие [1–4]. В этой теории содержатся диэлектрические и магнитные фазовые переходы, а также возможность возникновения сверхпроводимости. Однако из-за больших математических трудностей без существенных упрощений трудно получить какие-либо значимые физические результаты. Вместе с тем при определенной плотности носителей заряда в системе возникает металлическое состояние, в котором электронные состояния модифицированы, но не разрушены корреляциями. Следовательно, возможен переход в сверхпроводящее состояние с образованием куперовских (сценарий БКШ) либо локальных пар (сценарий Шаффрота). В этом плане представляет несомненный интерес, опираясь на представление о ферми-жидкости, исследовать сверхпроводящие свойства ВТСП с учетом таких особенностей этих материалов, как перекрытие энергетических полос на поверхности Ферми и наличие различного вида особенностей ван Хова—Лифшица, сильной анизотропии, переменной плотности носителей заряда (в том числе и малой) и др. при рассмотрении как фононного, так и нефононного механизма сверхпроводимости [5–15].

Наряду с этим интересен вопрос о влиянии эффектов неадиабатичности на температуру сверхпроводящего перехода T_c . Дело в том, что в материалах ВТСП, а также в фуллеренах и органических сверхпроводниках значения энергии Ферми E_F и энергии Дебая ω_0 являются величинами одного порядка. В результате нарушается теорема Мигдала [16], которая применима в теории БКШ—Боголюбова, и возникает необходимость учитывать вершинные и «пересекающиеся» диаграммы в массовых операторах для функций Грина, соответствующих дополнительным многочастичным эффектам. Оценке вклада вершинных функций и их влияния на T_c и коэффициент изотопического эффекта α посвящена серия работ [17–21]. Наряду с параметром Мигдала $m = \omega_0/E_F$ вводится импульс обрезания электрон-фононного взаимодействия Q_c , малость которого определяется наличием сильных электронных корреляций в системе. Такой подход основан на результатах исследований влияния сильных электронных корреляций на электрон-фононное взаимодействие [22,23].

В [18,19] рассматривается трехмерная система с симметричным заполнением энергетической зоны. Такая модель может описывать различные неадиабатические системы при фиксированных значениях параметров m и Q_c . При этом авторы пренебрегают мнимыми частями вершинных функций на том основании, что они малы, поскольку пропорциональны параметру Q_c , который полагается малым. Не было сделано попытки получить уравнение для определения величины Q_c . Установлено, что учет эффектов неадиабатичности в таких системах в области малых Q_c может привести к значительному увеличению температуры сверхпроводящего перехода и даже при промежуточных значениях параметра связи $\lambda \sim$ ~ 0,5–1 легко получить значения T_c , соответствующие материалам ВТСП.

В случае адиабатических систем из уравнения Элиашберга следует, что таких значений T_c можно достичь при очень больших константах связи $\lambda \approx 3$ [24].

Как показано в работе [25], в случае очень малых концентраций носителей ($\omega_0 >> E_F$) теорема Мигдала оказывается верной и, следовательно, эффекты неадиабатичности несущественны.

В ВТСП плотность носителей заряда является переменной величиной из-за введения кислорода или примеси. Поэтому возникает необходимость построить теорию сверхпроводимости для неадиабатических систем с несимметричным (произвольным) заполнением энергетической зоны. Кроме того, следует учитывать сильную анизотропию системы.

В данной работе исследована зависимость температуры сверхпроводящего перехода T_c и коэффициента изотопического эффекта α от плотности носителей заряда n для двумерной (квазидвумерной) и трехмерной систем. Мы не будем пренебрегать мнимыми частями вершинных функций P_v и P_c (как это делалось в работах [17–21]) и покажем, что благодаря их учету возникает ограничение на область значений плотности носителей заряда, при которых в системе возможна сверхпроводимость. При этом импульс обрезания электрон-фононного взаимодействия Q_c не является параметром теории, а подчиняется определенному уравнению и зависит от n. Характер этой зависимости определяется размерностью системы. При симметричном заполнении энергетической зоны в трехмерном случае [18,19] сверхпроводимость в системе возможна только при $Q_c = 0$. Следовательно, рассмотрение величины Q_c как параметра теории, принимающего различные значения, для системы с симметричным заполнением энергетической зоны неоправданно.

Работа построена следующим образом. Во втором разделе приведены выражения для массовых операторов $M(\mathbf{p}, \Omega)$ и $\Sigma(\mathbf{p}, \Omega)$ и вершинных функций $P_v(\mathbf{pp}_1, \Omega\Omega_1)$, $P_c(\mathbf{pp}_1, \Omega\Omega_1)$. В разд. 3 вычислены вершинные функции для двумерной системы. Четвертый раздел посвящен определению температуры сверхпроводящего перехода, уравнения для величины Q_c и коэффициента изотопического эффекта α в двумерной системе. В разд. 5

рассматриваются вершинные функции и уравнения для Q_c в трехмерной системе. Раздел 6 посвящен анализу результатов и выводам.

2. Функции Грина и массовые операторы

Согласно [18,19], исходим из гамильтониана типа фрелиховского, включающего в себя электрон-фононное взаимодействие с константой, определяемой соотношением

$$g^2_{\mathbf{pp}'} = g^2 \gamma\, \theta(q_c - |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|) \ . \tag{1}$$

Величина γ находится из условия

$$\langle\langle g^2_{\mathbf{pp}'} \rangle\rangle_{FS} = g^2 \ , \tag{2}$$

где $\langle\langle\ldots\rangle\rangle_{FS}$ означает усреднение по поверхности Ферми. В двумерном случае $\gamma = \pi/Q_c$, а в трехмерном $\gamma = 1/Q_c^2$, $Q_c = q_c/2p_F$.

Этот модельный выбор константы взаимодействия основывается на результатах исследований [22,23], согласно которым наличие сильных электронных корреляций в системе вводит структуру в константу электрон-фононного взаимодействия $g(q)$ с обрезанием по импульсу $q_c << 2p_F$.

На основании теории возмущений [26] для массовых операторов вблизи температуры сверхпроводящего перехода ($T \sim T_c$) имеем

$$M(p) = \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{p}_1\Omega_1} V_N(pp_1) G(\mathbf{p}_1\Omega_1) \ , \tag{3}$$

$$\Sigma(p) = -\frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{p}_1\Omega_1} V_S(pp_1) G(\mathbf{p}_1\Omega_1) G(-\mathbf{p}_1 - \Omega_1) \ , \tag{4}$$

где

$$V_N(pp_1) = -D(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 , \Omega - \Omega_1) \times$$
$$\times \left[1 - \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{p}_2\Omega_2} D(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2 , \Omega - \Omega_2) G(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}, \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega) G(\mathbf{p}_2 , \Omega_2) \right], \tag{5}$$

$$V_S(pp_1) = -D(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 , \Omega - \Omega_1) \times$$
$$\times \left\{ 1 - \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{p}_2\Omega_2} [D(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2 , \Omega - \Omega_2) G(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}, \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega) G(\mathbf{p}_2 , \Omega_2) + \right.$$
$$\left. + D(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2 , \Omega - \Omega_2) G(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 , \Omega - \Omega_1 - \Omega_2) G(-\mathbf{p}_2 , -\Omega_2)] \right\} +$$
$$+ \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{p}_2\Omega_2} D(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 , \Omega_2 - \Omega_1) D(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2 , \Omega - \Omega_2) G(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p} - \mathbf{p}_1 , \Omega_2 - \Omega - \Omega_1) G(\mathbf{p}_2 , \Omega_2) \ . \tag{6}$$

Первый член эффективных взаимодействий (5) и (6) соответствует адиабатическим вкладам, остальные члены — учету диаграмм с пересекающимися линиями электрон-фононного взаимодействия.

Выражение для мацубаровской электронной функции Грина имеет вид

$$G(\mathbf{p}, \Omega) = \frac{1}{i\Omega - M(\mathbf{p}, \Omega) - \varepsilon_{\mathbf{p}}} \ . \tag{7}$$

Для фононной функции Грина выбран эйнштейновский спектр с частотой ω_0 :

$$D(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 , \Omega - \Omega_1) = -g^2_{\mathbf{pp}_1} \frac{\omega_0^2}{(\Omega - \Omega_1)^2 + \omega_0^2} \ . \tag{8}$$

Введем обозначения:

$$P_v(\mathbf{pp}_1 , \Omega\Omega_1) = \frac{1}{\beta V} \frac{\gamma}{N_0} \sum_{\mathbf{p}_2\Omega_2} \theta(q_c - |\mathbf{p} - \mathbf{p}_2|) \frac{\omega_0^2}{(\Omega - \Omega_2)^2 + \omega_0^2} G(\mathbf{p}_2 , \Omega_2) G(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}, \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega) \ , \tag{9}$$

$$P_c(\mathbf{pp}_1\,,\,\Omega\Omega_1) = \frac{1}{\beta V}\,\frac{\gamma}{N_0}\sum_{\mathbf{p}_2\Omega_2}\theta(q_c - |\mathbf{p}-\mathbf{p}_2|)\,\frac{\omega_0^2}{(\Omega-\Omega_2)^2+\omega_0^2}\,G(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}-\mathbf{p}_1\,,\,\Omega_2-\Omega-\Omega_1)G(\mathbf{p}_2\,,\,\Omega_2)\,.$$

В этих обозначениях выражения (5) и (6) перепишем в виде

$$V_N(pp_1) = -D(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1\,,\,\Omega-\Omega_1)[1+\lambda P_v(\mathbf{pp}_1\,,\,\Omega\Omega_1)]\,, \tag{10}$$

$$V_S(pp_1) = -D(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1\,,\,\Omega-\Omega_1)[1+\lambda P_v(\mathbf{pp}_1\,,\,\Omega\Omega_1)+\lambda P_v(\mathbf{pp}_1\,,\,-\Omega-\Omega_1)+\lambda P_c(\mathbf{pp}_1\,,\,\Omega\Omega_1)]\,. \tag{11}$$

Рассмотрим двумерную систему и введем квадратичный закон дисперсии энергии электронов

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} - \mu\,. \tag{12}$$

3. Вершинные функции

Подставим в выражения (9) нулевое приближение для функции Грина (7) и перейдем от суммирования по $\mathbf{p}_2\,,\,\Omega_2$ к интегрированию. В случае двумерной системы этот переход выполняется согласно формуле

$$\frac{1}{\beta V}\sum_{\mathbf{p}_2\Omega_2}F(\mathbf{p}_2\,,\,\Omega_2) =$$

$$= N_0\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\int_{-\mu}^{W-\mu}d\varepsilon_{\mathbf{p}_2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\Omega_2F(\mathbf{p}_2\,,\,\Omega_2)\,, \tag{13}$$

где $N_0 = m/2\pi$ — плотность электронных состояний; W — ширина энергетической зоны; μ — химический потенциал. Мы полагаем $T_c << \omega_0$, что позволяет рассматривать предел $T_c \to 0$ и выполнить интегрирование по частоте Ω_2 обычным образом.

Полагая затем малыми значения передаваемого импульса $q = |\mathbf{p}-\mathbf{p}_1| << 2p_F$, выполним интегрирование по энергии $\varepsilon_{\mathbf{p}_2}$ и угловой переменной, использовав метод вычислений, приведенный в [19], применительно к двумерному случаю. Полученные таким образом выражения для функций $P_{v,c}(\mathbf{pp}_1\,,\,\Omega\Omega_1)$ подставляем в (5), (6) и выполняем усреднение по поверхности Ферми:

$$\langle\langle V_N(pp_1)\rangle\rangle_{FS} =$$

$$= \frac{\omega_0^2}{(\Omega-\Omega_1)^2+\omega_0^2}\,g^2[1+\lambda P_v(Q_c\,,\,\Omega\Omega_1)]\,, \tag{14}$$

$$\langle\langle V_S(pp_1)\rangle\rangle_{FS} =$$

$$= \frac{\omega_0^2}{(\Omega-\Omega_1)^2+\omega_0^2}\,g^2[1+\lambda P_v(Q_c\,,\,\Omega\Omega_1)] +$$

$$+\lambda P_v(Q_c\,,\,-\Omega-\Omega_1)+\lambda P_c(Q_c\,,\,\Omega\Omega_1)]\,. \tag{15}$$

Здесь

$$P_{v,c}(Q_c\,,\,\Omega\Omega_1) =$$

$$= \frac{\pi}{Q_c}\,\langle\langle\theta(q_c - |\mathbf{p}-\mathbf{p}_1|)P_{v,c}(\mathbf{pp}_1\,,\,\Omega\Omega_1)\rangle\rangle_{FS}\,. \tag{16}$$

При $\Omega = 0$, $\Omega_1 = \omega_0$ и $2EQ_c^2 < \mu < W/2$ выражения для функций $P_{v,c}(Q_c\,,\,\Omega\Omega_1)$ можно привести к виду

$$P_v(Q_c\,,\,0,\,\omega_0) = \omega_0B(0,\,\omega_0) + \left[\frac{A(0,\,\omega_0)}{\omega_0} - \omega_0B(0,\,\omega_0)\right]\left[1-\frac{E^2}{\omega_0^2}\,\frac{4}{9}\,Q_c^4\right] + \frac{E}{\omega_0}\,C(0,\,\omega_0)\,\frac{Q_c^2}{2} +$$
$$+\,i\left\{\omega_0B_1(0,\,\omega_0) + \left[\frac{A_1(0,\,\omega_0)}{\omega_0} - \omega_0B_1(0,\,\omega_0)\right]\left[1-\frac{E^2}{\omega_0^2}\,\frac{4}{9}\,Q_c^4\right] + \frac{E}{\omega_0}\,C_1(0,\,\Omega_1)\,\frac{Q_c^2}{2}\right\}\,, \tag{17}$$

$$P_c(Q_c, 0, \omega_0) = \omega_0 B(0, -\omega_0) + \left[\frac{A(0, -\omega_0)}{\omega_0} - \omega_0 B(0, -\omega_0)\right]\left[1 - \frac{E^2}{\omega_0^2}\frac{11}{45}Q_c^4\right] + \frac{E}{\omega_0}C(0, -\omega_0)\frac{Q_c^2}{6} +$$

$$+ i\left\{\omega_0 B_1(0, -\omega_0) + \left[\frac{A_1(0, -\omega_0)}{\omega_0} - \omega_0 B_1(0, -\omega_0)\right]\left[1 - \frac{E^2}{\omega_0^2}\frac{11}{45}Q_c^4\right] + \frac{E}{\omega_0}C_1(0, -\Omega_1)\frac{Q_c^2}{6}\right\}, \tag{18}$$

где

$$E = 4E_F\,, \quad E_F = \frac{p_F^2}{2m}\,, \quad \frac{A(0, \omega_0)}{\omega_0} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{1+\bar{\mu}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\overline{W} - \bar{\mu} + 1}\,,$$

$$\omega_0 B(0, \omega_0) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{(1+\bar{\mu})[(1+\bar{\mu})^2 + 2]}{[(1+\bar{\mu})^2 + 1]^2} + \frac{(\overline{W} - \bar{\mu} + 1)[(\overline{W} - \bar{\mu} + 1)^2 + 2]}{[(\overline{W} - \bar{\mu} + 1)^2 + 1]^2}\right\}, \tag{19}$$

$$\frac{E}{\omega_0}C(0, \omega_0) = \frac{1}{m}\left\{\ln\frac{\overline{W} - \bar{\mu} + 1}{1+\bar{\mu}} - \frac{1}{2}\ln\frac{(\overline{W} - \bar{\mu} + 1)^2 + 1}{(\bar{\mu}+1)^2 + 1} - \frac{1}{(1+\bar{\mu})^2 + 1} + \frac{1}{(\overline{W} - \bar{\mu} + 1)^2 + 1}\right\},$$

$$\frac{A_1(0, \omega_0)}{\omega_0} = -\frac{1}{4}\left\{\ln\frac{(\overline{W} - \bar{\mu} + 1)^2 + 1}{(\bar{\mu}+1)^2 + 1} - 2\ln\frac{\overline{W} - \bar{\mu} + 1}{1+\bar{\mu}}\right\},$$

$$\omega_0 B_1(0, \omega_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+\bar{\mu})^2 + 1} - \frac{1}{(\overline{W} - \bar{\mu} + 1)^2 + 1}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{(1+\bar{\mu})^2 - 1}{[(1+\bar{\mu})^2 + 1]^2} - \frac{(\overline{W} - \bar{\mu} + 1)^2 - 1}{[(\overline{W} - \bar{\mu} + 1)^2 + 1]^2}\right], \tag{20}$$

$$\frac{E}{\omega_0}C_1(0, \omega_0) = \frac{2}{m}\left\{\mathrm{arctg}\,\frac{1}{1+\bar{\mu}} - \frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\overline{W} - \bar{\mu} + 1} - \frac{1+\bar{\mu}}{(1+\bar{\mu})^2 + 1} - \frac{\overline{W} - \bar{\mu} + 1}{(\overline{W} - \bar{\mu} + 1)^2 + 1}\right\}.$$

Здесь

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\omega_0}\,; \quad \overline{W} = \frac{W}{\omega_0}\,; \quad m = \frac{2\omega_0}{E}\,.$$

4. Критическая температура и уравнение для Q_c

Подставляя (14) и (15) при $\Omega = 0$ и $\Omega_1 = \omega_0$ в уравнения (3) и (4), усредненные по поверхности Ферми, получаем

$$M(\Omega) = \frac{g^2}{\beta V}\sum_{\mathbf{p}_1\Omega_1}\frac{\omega_0^2}{(\Omega - \Omega_1)^2 + \omega_0^2}\times$$

$$\times[1 + \lambda P_v(Q_c, 0, \omega_0)]G(\mathbf{p}_1\Omega_1)\,, \tag{21}$$

$$\Sigma(\Omega) = \frac{g^2}{\beta V}\sum_{\mathbf{p}_1\Omega_1}\frac{\omega_0^2}{(\Omega - \Omega_1)^2 + \omega_0^2}\times$$

$$\times[1 + 2\lambda P_v(Q_c, 0, \omega_0) + \lambda P_c(Q_c, 0, \omega_0)]\times$$

$$\times G(p_1\Omega_1)\Sigma(\Omega_1)G(-\mathbf{p}_1 - \Omega_1)\,. \tag{22}$$

Подставив в (21) выражение (7) и выполнив интегрирование по энергии с учетом электрон-дырочной асимметрии (13), получаем

$$\mathrm{Im}\,M(\Omega) = -\lambda_z\frac{1}{\beta}\sum_{\Omega_1}\frac{\omega_0^2}{(\Omega - \Omega_1)^2 + \omega_0^2}\frac{\tilde{\Omega}_1}{|\tilde{\Omega}_1|}\times$$

$$\times\left[\mathrm{arctg}\,\frac{W - \mu}{|\tilde{\Omega}_1|} + \mathrm{arctg}\,\frac{\mu}{|\tilde{\Omega}_1|}\right] - \lambda^2\,\mathrm{Im}\,P_v(Q_c, 0, \omega_0)\times$$

$$\times\frac{1}{\beta}\sum_{\Omega_1}\frac{\omega_0^2}{(\Omega - \Omega_1)^2 + \omega_0^2}\frac{1}{2}\ln\frac{(W-\mu)^2 + \tilde{\Omega}_1^2}{\mu^2 + \tilde{\Omega}_1^2}\,, \tag{23}$$

где

$$\lambda_z = \lambda[1 + \lambda\,\mathrm{Re}\,P_v(Q_c, 0, \omega_0)]\,. \tag{24}$$

Приведем выражение для $\tilde{\Omega}$ к виду

$$\tilde{\Omega} = \Omega - \mathrm{Im}\, M(\Omega) = \Omega Z + Z_1 \,, \qquad (25)$$

где

$$Z = Z(0) = 1 + \lambda_z \frac{1}{2}\left[\frac{\overline{W} - \overline{\mu}}{\overline{W} - \overline{\mu} + 1} + \frac{\overline{\mu}}{\overline{\mu} + 1}\right],$$

$$Z_1 = \lambda^2\, \mathrm{Im}\, P_v(Q_c\,,\, 0,\, \omega_0)\, \frac{\omega_0}{4} \ln \frac{(\overline{W} - \overline{\mu})^2 + 1}{\overline{\mu}^2 + 1} \,. \qquad (26)$$

В результате

$$G(\mathbf{p}\Omega) = \frac{1}{i[\Omega Z + Z_1] - \varepsilon_{\mathbf{p}}} \,. \qquad (27)$$

Подставив (27) в (22) и выполнив интегрирование по энергии, получаем

$$\Sigma(\Omega) = \frac{1}{\beta} \sum_{\Omega_1} (\lambda_\Delta + i\lambda^2\delta)\, \Sigma(\Omega_1)\, \frac{1}{\Omega_1 Z} \times$$

$$\times [\Phi_1(\Omega_1) + i\Phi_2(\Omega_1)]\, \frac{\omega_0^2}{(\Omega - \Omega_1)^2 + \omega_0^2} \,, \qquad (28)$$

где

$$\Phi_1(\Omega_1) = \frac{Z\Omega_1 + Z_1}{|Z\Omega_1 + Z_1|}\, \frac{1}{2}\left[\mathrm{arctg}\, \frac{W - \mu}{|Z\Omega_1 + Z_1|} + \right.$$

$$\left. + \;\mathrm{arctg}\, \frac{\mu}{|Z\Omega_1 + Z_1|}\right] + \frac{Z\Omega_1 - Z_1}{|Z\Omega_1 - Z_1|} \times$$

$$\times \frac{1}{2}\left[\mathrm{arctg}\, \frac{W - \mu}{|Z\Omega_1 - Z_1|} + \mathrm{arctg}\, \frac{\mu}{|Z\Omega_1 - Z_1|}\right], \qquad (29)$$

$$\Phi_2(\Omega_1) = \frac{1}{2} \ln \frac{(W - \mu)^2 + (Z\Omega_1 - Z_1)^2}{\mu^2 + (Z\Omega_1 - Z_1)^2} -$$

$$- \frac{1}{2} \ln \frac{(W - \mu)^2 + (Z\Omega_1 + Z_1)^2}{\mu^2 + (Z\Omega_1 + Z_1)^2} \,, \qquad (30)$$

$$\lambda_\Delta = \lambda(1 + 2\lambda\, \mathrm{Re}\, P_v(Q_c\,,\, 0,\, \omega_0) +$$

$$+ \lambda\, \mathrm{Re}\, P_c(Q_c\,,\, 0,\, \omega_0))\,, \qquad (31)$$

$$\delta = \mathrm{Im}\, [2P_v(Q_c\,,\, 0,\, \omega_0) + P_c(Q_c\,,\, 0,\, \omega_0)] \,.$$

Из уравнения (28) следует, что $\Sigma(\Omega)$ является комплексной величиной. Введем $\Sigma = \Sigma_1 + i\Sigma_2$, подставим в (28) и запишем систему уравнений для действительной и мнимой частей:

$$\Sigma_1(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2 + \omega_0^2}\, V_1 A_1^0 - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2 + \omega_0^2}\, V_2 A_2^0 \,;$$

$$\Sigma_2(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2 + \omega_0^2}\, V_2 A_1^0 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2 + \omega_0^2}\, V_1 A_2^0 \,. \qquad (32)$$

Здесь

$$A_1^0 = \frac{1}{\beta} \sum_{\Omega_1} \frac{\omega_0^2}{\Omega_1^2 + \omega_0^2}\, \frac{\Phi_1(\Omega_1)}{\Omega_1 Z}\, \Sigma_1(\Omega_1) \,;$$

$$A_2^0 = \frac{1}{\beta} \sum_{\Omega_1} \frac{\omega_0^2}{\Omega_1^2 + \omega_0^2}\, \frac{\Phi_1(\Omega_1)}{\Omega_1 Z}\, \Sigma_2(\Omega_1) \,. \qquad (33)$$

Подставляя (32) в (33), получаем

$$A_1^0 = A_1^0 V_1 \xi_c - A_2^0 V_2 \xi_c \,;\;\; A_2^0 = A_1^0 V_2 \xi_c + A_2^0 V_1 \xi_c \,, \qquad (34)$$

где

$$\xi_c = \frac{1}{\beta} \sum_{\Omega_1} \frac{\omega_0^4}{(\Omega_1^2 + \omega_0^2)^2}\, \frac{\Phi_1(\Omega_1)}{\Omega_1 Z} \,. \qquad (35)$$

Температуру сверхпроводящего перехода T_c определяем из условия разрешимости системы уравнений (34), которое дает

$$(V_1^2 + V_2^2)\, \xi_c^2 - 2V_1 \xi_c + 1 = 0 \,, \qquad (36)$$

откуда

$$\xi_c = \frac{V_1 \pm \sqrt{-V_2^2}}{V_1^2 + V_2^2} \,. \qquad (37)$$

Решение для ξ_c вещественное, если $V_2 = 0$. Это условие приводит к выражению

$$\xi_c \simeq 1/V_1 \approx 1/\lambda_\Delta \qquad (38)$$

и дополнительному уравнению

$$V_2 = \lambda_\Delta\, \frac{\Phi_2(\omega_0)}{\Phi_1(\omega_0)} + \lambda^2\delta = 0 \,. \qquad (39)$$

Ограничившись членами порядка λ^2, приведем последнее к виду

$$\mathrm{Im}\, [2P_v(Q_c\,,\, \omega_0) + P_c(Q_c\,,\, \omega_0)] = 0 \,. \qquad (40)$$

Это уравнение определяет параметр обрезания электрон-фононного взаимодействия Q_c при заданном μ или n. На основании (40), (17) и (18) имеем

$$aQ_c^4 - bQ_c^2 - d = 0 \ , \qquad (41)$$

где

$$a = \frac{29}{45}\left(\frac{2}{m}\right)^2\left[\frac{A_1(0,\ \omega_0)}{\omega_0} - \omega_0 B_1(0,\ \omega_0)\right] ;$$
$$b = \frac{5}{3m}\ C_1(0,\ \omega_0\ ,\ \mu)\ ;\ \ d = \frac{A_1(0,\ \omega_0)}{\omega_0}\ . \qquad (42)$$

Из определений коэффициентов (42) следует $a << b$ и, поскольку мы ищем решение $Q_c^2 << 1$, его можно представить в виде

$$Q_c^2 \approx -\,d/b\ . \qquad (43)$$

Так как $b < 0$, Q_c — вещественная величина при $d > 0$, что равнозначно условию $\mu < W/2$. Следовательно, возможно возникновение сверхпроводимости в двумерной системе. С учетом этого нижнего предела для μ получаем, что в данной теории можно рассматривать $2EQ_c^2 < \mu < W/2$. В этой области значений плотностей носителей заряда возможно существование сверхпроводимости в квазидвумерной системе на основе электрон-фононного взаимодействия при наличии сильных электронных корреляций. При $\mu = W/2$ имеем $d = 0$ и $b \neq 0$. Следовательно, из (43) вытекает $Q_c = 0$. Можно сказать, что при $Q_c \neq 0$ и симметричном заполнении энергетической зоны сверхпроводимость в системе отсутствует, поскольку не удовлетворяется условие (40).

Выполнив интегрирование по Ω_1 в (35), приведем выражение для температуры сверхпроводящего перехода T_c к виду

$$T_c = \frac{1{,}13\omega_0[(\overline{W} - \overline{\mu})\overline{\mu}]^{1/2}}{\sqrt{e}\ [\overline{W} - \overline{\mu} + 1)(\overline{\mu} + 1)]^{1/2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{Z}{\lambda_\Delta} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\overline{W} - \overline{\mu} + 1} + \frac{1}{\overline{\mu} + 1}\right]\right\} . \qquad (44)$$

Дополним это выражение уравнением для химического потенциала

$$n = \frac{2}{\beta V}\sum_{\mathbf{k}\Omega} G(\mathbf{k}\Omega)\ e^{i\Omega 0^+}\ , \qquad (45)$$

где n — плотность носителей заряда.

Подставив в (45) выражение (27) и выполнив интегрирование по Ω в пределе $T_c/\omega_0 << 1$ и интегрирование по энергии обычным способом, получаем

$$\overline{\mu} = Z\overline{n}\ , \qquad (46)$$

где $\overline{\mu} = \mu/\omega_0$, $\overline{n} = n/(2N_0\omega_0)$, а Z определяется формулой (26).

Совместное рассмотрение (44) и (46) позволяет получить зависимость T_c от концентрации носителей заряда $\overline{n}$. С ростом $\overline{n}$ величина T_c растет и достигает максимального значения вблизи симметричного заполнения энергетической зоны $\mu = W/2$. При $\mu > W/2$ величина $T_c = 0$, поскольку система уравнений (34), определяющая величину T_c , несовместима. Отсюда следует, что в двумерных системах сверхпроводимость осуществляется в интервале $0 < \overline{\mu} < \overline{W}/2$. Благодаря учету эффектов неадиабатичности высокие T_c , соответствующие ВТСП, достигаются при промежуточных значениях параметра связи $\lambda \sim 0{,}5$–1. Значения же температуры T_c , полученные на основании (44) и (46), для адиабатической системы ($P_v = P_c = 0$) соответствуют случаю обычных сверхпроводников и не могут достигать высоких значений при промежуточных значениях константы связи λ. В этом случае высокие T_c достигаются при $\lambda \approx 3$.

Для коэффициента изотопического эффекта на основании (44) имеем

$$\alpha = -\frac{d\ \ln T_c}{d\ \ln M} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{d\ \ln (T_c/\omega_0)}{d\ \ln \omega_0}\right] , \qquad (47)$$

где

$$\frac{d\ \ln (T_c/\omega_0)}{d\ \ln \omega_0} = -\frac{1}{4}\left[\frac{\overline{W} - \overline{\mu} + 2}{(\overline{W} - \overline{\mu} + 1)^2} + \frac{\overline{\mu} + 2}{(\overline{\mu} + 1)^2}\right] -$$
$$-\frac{1}{\lambda_\Delta}\frac{dZ}{d\ \ln \omega_0} + \frac{Z}{\lambda_\Delta^2}\frac{d\lambda_\Delta}{d\ \ln \omega_0}\ , \qquad (48)$$

$$\frac{dZ}{d\ \ln \omega_0} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\lambda^2}{2}\left[\frac{\overline{\mu}}{(\overline{\mu} + 1)^2 + 1} + \frac{\overline{W} - \overline{\mu}}{(\overline{W} - \overline{\mu} + 1)^2 + 1}\right] \times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\overline{W} - \overline{\mu}}{\overline{W} - \overline{\mu} + 1} + \frac{\overline{\mu}}{\overline{\mu} + 1}\right] + \lambda_z\left[\frac{\overline{W} - \overline{\mu}}{(\overline{W} - \overline{\mu} + 1)^2} + \frac{\overline{\mu}}{(\overline{\mu} + 1)^2}\right]\right\},$$
$$\frac{d\lambda_\Delta}{d\ \ln \omega_0} = -\frac{3\lambda^2}{2}\left[\frac{\overline{\mu}}{(\overline{\mu} + 1)^2 + 1} + \frac{\overline{W} - \overline{\mu}}{(\overline{W} - \overline{\mu} + 1)^2 + 1}\right] . \qquad (49)$$

При получении этих формул мы отбросили члены, содержащие зависимость от Q_c , поскольку при $Q_c << 1$ их вклад незначителен. Анализ этих формул позволяет сделать вывод, что значение коэффициента изотопического эффекта α существенно зависит от параметров λ и W. При малых n величина $\alpha \sim 0{,}2$–$0{,}3$ и растет с ростом n. Так, например, при $\lambda = 0{,}5$, $\overline{W} = 6$ вблизи значений $\mu = W/2$, $\alpha \approx 0{,}4$.

5. Случай трехмерной системы

Выполним те же вычисления, что и в [19], но рассмотрим переменную плотность носителей заряда (электрон-дырочную асимметрию) и не будем пренебрегать мнимой частью функций P_v и P_c. В этом случае перейдем от суммирования к интегрированию в вершинных функциях (9) согласно формуле

$$\frac{1}{\beta V}\sum_{\mathbf{p}_2\Omega_2} F(\mathbf{p}_2, \Omega_2) = N_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\alpha}{2}\, d\alpha \times$$

$$\times \int_{-\mu}^{W-\mu} d\varepsilon_{\mathbf{p}_2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_2 F(\mathbf{p}_2, \Omega_2)\ , \qquad (50)$$

где $N_0 = mp_F/2\pi^2$.

Выполнив вычисления аналогично тому, как это было сделано для двумерного случая, используя (50), для величин, усредненных по поверхности Ферми, получаем

$$P_{v,c}(Q_c, \Omega\Omega_1) =$$

$$= \frac{1}{Q_c^2} \langle\langle \theta(q_c - |\mathbf{p} - \mathbf{p}_1|) P_{v,c}(\mathbf{p}\mathbf{p}_1, \Omega\Omega_1)\rangle\rangle_{FS}, \qquad (51)$$

$$P_v(Q_c, 0, \omega_0) = \omega_0 B(0, \omega_0) +$$

$$+\left[\frac{A(0, \omega_0)}{\omega_0} - \omega_0 B(0, \omega_0)\right]\left[1 - \frac{E^2}{\omega_0^2}\frac{1}{2}Q_c^4\right] +$$

$$+ i\left\{\omega_0 B_1(0, \omega_0) + \left[\frac{A_1(0, \omega_0)}{\omega_0} - \omega_0 B_1(0, \omega_0)\right] \times\right.$$

$$\left.\times\left[1 - \frac{E^2}{\omega_0^2}\frac{1}{2}Q_c^4\right]\right\}, \qquad (52)$$

$$P_c(Q_c, 0, \omega_0) =$$

$$= \omega_0 B(0, -\omega_0) + \left[\frac{A(0, -\omega_0)}{\omega_0} - \omega_0 B(0, -\omega_0)\right]\times$$

$$\times\left[1 - \frac{E^2}{\omega_0^2}\frac{11}{6}Q_c^4\right] + \frac{E}{\omega_0}C(0, -\omega_0)Q_c^2 +$$

$$+ i\left\{\omega_0 B_1(0, -\omega_0) + \left[\frac{A_1(0, -\omega_0)}{\omega_0} - \omega_0 B_1(0, -\omega_0)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[1 - \frac{E^2}{\omega_0^2}\frac{11}{6}Q_c^4\right] + \frac{E}{\omega_0}C_1(0, -\omega_0)Q_c^2\right\}. \qquad (53)$$

Выражения (52) и (53) отличаются от соответствующих выражений двумерного случая (17) и (18) значениями численных коэффициентов в членах, содержащих Q_c^2 и Q_c^4.

В трехмерной системе величины λ_Δ (31), λ_z (24) и Z определяются вершинными функциями (52) и (53).

На основании уравнения (40) и соотношений (52), (53) получаем уравнение для определения импульса обрезания электрон-фононного взаимодействия Q_c в трехмерной системе

$$a_1 Q_c^4 - b_1 Q_c^2 + d_1 = 0\ , \qquad (54)$$

где

$$a_1 = \frac{5}{6}\left(\frac{2}{m}\right)^2\left[\frac{A_1(0, \omega_0)}{\omega_0} - \omega_0 B_1(0, \omega_0)\right];$$

$$b_1 = \frac{2}{m}C_1(0, \omega_0)\ ;\ d_1 = \frac{A_1(0, \omega_0)}{\omega_0} = d\ , \qquad (55)$$

или

$$Q_c^2 \approx d_1/b_1\ . \qquad (56)$$

Поскольку $b_1 < 0$, значения Q_c — действительные, если $d_1 < 0$. Это условие соответствует $\mu > W/2$. Следовательно, сверхпроводимость в трехмерной неадиабатической системе с сильными электронными корреляциями ($Q_c << 1$) на основе механизма электрон-фононного взаимодействия возможна при высоких плотностях носителей заряда. Величина T_c соответствует максимальному значению при $\mu \approx W/2$ и убывает с ростом $n(\mu)$, а при $\mu = W$ имеем $T_c = 0$ (44).

Перейдем к пределу симметричного заполнения энергетической зоны в трехмерной системе, чтобы сравнить полученные результаты с [19].

Сделав замену $W - \mu \to E/2$ и $\mu \to E/2$, получаем, что ряд коэффициентов обращается в нуль: $C(0, \omega_0) = 0$, $A_1(0, \omega)/\omega_0 = 0$, $\omega_0 B_1(0, \omega_0) = 0$. Коэффициенты $A(0, \omega_0)/\omega_0$ и $\omega_0 B(0, \omega_0)$ переходят в соответствующие выражения работы [19] при $Q_c << 1$, а величина $b_1 = 2C_1(0, \omega_0)/m \neq 0$ в работе [19] отсутствует. При этом в нашем случае уравнение (54) приобретает вид

$$b_1 Q_c^2 = 0 \; . \tag{57}$$

Так как $b_1 \neq 0$, то $Q_c = 0$. Если же полагать $b_1 = 0$, что было сделано в [19] в результате пренебрежения мнимой частью вершинной функции P_c , то приведенное выше уравнение удовлетворяется при любом Q_c , и, следовательно, в этом случае его можно рассматривать как параметр теории. По-видимому, в рассмотренной модели [19] после выполнения расчетов при $Q_c << 1$ следует положить $Q_c \to 0$. При $Q_c \neq 0$ в такой системе сверхпроводимость отсутствует, так как при этом величина ξ_c (37), определяющая температуру сверхпроводящего перехода, является комплексной величиной.

6. Заключение

Мы исходим из предположения, что причиной возникновения сверхпроводимости в системе является электрон-фононное взаимодействие. Наличие же сильных электронных корреляций способствует реализации малых значений передаваемого импульса (малые значения импульса обрезания электрон-фононного взаимодействия) [22,23]. Эта теория применима и в случае любого электрон-бозонного взаимодействия, приводящего к сверхпроводимости, если характерная бозонная частота $\omega_0 \sim E_F$ и $q_c << 2p_F$.

Изучено влияние эффектов неадиабатичности (вклада вершинных и пересекающихся диаграмм по электрон-фононному взаимодействию в массовых операторах) на температуру сверхпроводящего перехода T_c и коэффициент изотопического эффекта α в системах с переменной плотностью носителей заряда. Рассмотрены квазидвумерная и трехмерная системы, при этом мы не учитывали флуктуации, считая их малыми.

Основные выводы

1. Решающую роль в возможности возникновения сверхпроводимости при заданной плотности носителей заряда в ВТСП играет размерность системы.

2. В квазидвумерной системе сверхпроводимость возникает при малых концентрациях носителей заряда, величина T_c растет с увеличением этой концентрации вплоть до значений $\mu \leq W/2$, дальнейшее повышение μ приводит к исчезновению сверхпроводимости.

3. В трехмерной системе возможно возникновение сверхпроводимости при $\mu > W/2$, т.е. при больших концентрациях носителей заряда, величина T_c максимальна при $\mu = W/2$ и обращается в нуль при $\mu = W$.

4. Можно предположить, что при малых концентрациях носителей заряда электронная система в ВТСП является квазидвумерной (сильно анизотропной), а с ростом концентрации носителей заряда из-за введения кислорода или примеси распределение электронов в пространстве становится более изотропным и имеет место переход двумерность—трехмерность. В этом случае сверхпроводимость существует во всей области значений $0 < \mu < W$ и температура сверхпроводящего перехода будет определяться формулой (44) с определением всех входящих в нее величин при $\mu < W/2$ на основе двумерной системы, а при $\mu > W/2$ на основе трехмерной. При этом зависимость T_c от концентрации носителей заряда будет иметь вид колоколообразной кривой. Максимальное значение T_c благодаря эффекту неадиабатичности достигает значений, свойственных ВТСП при промежуточном значении параметра λ.

5. Параметр обрезания электрон-фононного взаимодействия Q_c подчиняется уравнениям (41) и (54) в случае двумерной и трехмерной систем соответственно, полученных из условия вещественности величины ξ_c (39), определяющей температуру сверхпроводящего перехода T_c . В точке $\mu = W/2$ величина $Q_c = 0$. В соответствии с этим обстоятельством Q_c убывает с ростом μ для двумерной и растет для трехмерной системы, являясь, таким образом, функцией концентрации носителей заряда.

6. Коэффициент изотопического эффекта увеличивается с ростом концентрации носителей заряда для двумерной и убывает для трехмерной системы.

7. В случае симметричного заполнения энергетических зон $W - \mu \to E/2$ и $\mu \to E/2$ [19] сверхпроводимость в системе при $Q_c \neq 0$ не возникает. Отсюда следует, что теория [19] применима только в пределе $Q_c \to 0$ и рассмотрение Q_c как параметра теории, который может принимать различные значения, на наш взгляд, неоправданно.

1. V. A. Moskalenko, P. Entel, and D. F. Digor, *Phys. Rev.* **59**, 619 (1999).
2. М. И. Владимир, В. А. Москаленко, *ТМФ* **82**, 3301 (1990).
3. С. И. Вакару, М. И. Владимир, В. А. Москаленко, *ТМФ* **85**, 1185 (1990).
4. В. А. Москаленко, *ТМФ* **111**, 744 (1997).
5. М. Е. Палистрант, В. М. Вакалюк, *СФХТ* **3**, 567 (1990).
6. В. А. Москаленко, М. Е. Палистрант, В. М. Вакалюк, *УФН* **161**, 155 (1991).
7. M. E. Palistrant and F. G. Kochorbe, *Physica* **C194**, 351 (1992).
8. М. Г. Калалб, Ф. Г. Кочорбэ, М. Е. Палистрант, *ТМФ* **91**, 483 (1992).
9. Ф. Г. Кочорбэ, М. Е. Палистрант, *ЖЭТФ* **103**, 3084 (1993); *ТМФ* **96**, 459 (1993); *ЖЭТФ* **114**, 195 (1998).
10. Э. В. Горбар, В. П. Гусынин, В. М. Локтев, *СФХТ* **6**, 483 (1993); *ФНТ* **16**, 1171 (1993).
11. N. Kristoffel, P. Konsin, and T. Ord, *Nuovo Cim.* **17**, 1 (1994).
12. M. E. Palistrant, *J. Supercond.* **10**, 19 (1997); *ТМФ* **109**, 137 (1996); *ТМФ* **111**, 289 (1997).
13. V. Z. Kresin and S. A. Wolf, *Physica* **C169**, 476 (1990); *Physica* **C198**, 328 (1992).
14. М. В. Локтев, В. М. Турковский, *ЖЭТФ* **114**, 605 (1998); *Cond. Mat. Phys.* (Lviv) **1**, 113 (1998).
15. М. В. Локтев, В. М. Турковский, С. Г. Шарапов, *ТМФ* **115**, 419 (1998).
16. А. Б. Мигдал, *ЖЭТФ* **34**, 1438 (1958).
17. C. Grimaldi, L. Pietronero, and S. Strässler, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1158 (1995).
18. L. Pietronero, S. Strässler, and C. Grimaldi, *Phys. Rev.* **B52**, 10516 (1995).
19. C. Grimaldi, L. Pietronero, and S. Strässler, *Phys. Rev.* **B52**, 10530 (1995).
20. E. Cappellati and L. Pietronero, *Phys. Rev.* **B53**, 932 (1996).
21. A. Perali, C. Grimaldi, and L. Pietronero, *Phys. Rev.* **B58**, 5736 (1998).
22. M. L. Kulic and R. Zeyher, *Phys. Rev.* **B49**, 4395 (1994).
23. R. Zeyher and M. L. Kulic, *Phys. Rev.* **B53**, 2850 (1996).
24. J. P. Garbotte, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 1027 (1990).
25. M. A. Ikeda, A. Ogasawara, and M. Sugihara, *Phys. Lett.* **A170**, 319 (1992).
26. А. А. Абрикосов, Л. Д. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике,* Москва (1962).

Temperature of superconducting transition and coefficient of isotope effect in superconductors with low Fermi energies

M. E. Palistrant

Study of superconductivity is made on systems with variable charge carrier density, strong electron correlations (by involving the influence of these correlations on electron-phonon interaction) and low Fermi energies. We have to take into account the vertex and intersecting diagrams of electron-phonon interaction (P_v , P_c) because of the violation of the Migdal theorem caused by the smallness of the Fermi energy. The study is done on two- and three-dimensional systems. The values of P_v and P_c are calculated and an equation for the cutoff momentum Q_c of the electron-phonon interaction is derived. The latter quantity is shown to depend on charge carrier density. Expressions for the of the superconducting transition temperature T_c and the coefficient of the isotope effect α are derived. The behavior of these quantities as a function of charge carrier density is analyzed. The field of superconductivity existence is determined in two- and three-dimensional systems.