

Эффективные уравнения движения солитона в двухподрешеточных изотропных магнетиках

Е. Г. Галкина¹, Б. А. Иванов^{2,3}, В. М. Муравьев^{2,4}

¹ *Институт физики НАН Украины, пр. Науки, 46, г. Киев, 03028, Украина*

² *Институт магнетизма НАН и МОН Украины, бульв. Вернадского, 36б, г. Киев, 03142, Украина*
E-mail: bivanov@i.com.ua

³ *Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Радиофизический факультет*
пр. Глушкова, 2, г. Киев, 03127, Украина

⁴ *Национальный авиационный университет, пр. Космонавта Комарова, 1, г. Киев, 03058, Украина*

Статья поступила в редакцию 16 июля 2002 г.

Построено решение задачи рассеяния магновов на солитоне Белавина—Полякова в двумерных магнетиках в рамках обобщенной σ -модели. На основе этой модели можно описать как ферромагнетик, так и антиферромагнетик, а также ферримагнетик вблизи точки компенсации спинов подрешеток. Для этой модели сформулирована задача рассеяния магнона на солитоне и получено ее точное решение для парциальной моды с азимутальным квантовым числом $m = 1$. Показано, что в линейном приближении эта мода полностью описывает динамику центра солитона в магнетике конечного размера. На основе этого анализа построены эффективные уравнения движения солитона в различных магнетиках.

Побудовано розв'язок задачі розсіяння магновів на солітоні Белавина—Полякова в двовимірних магнетиках в рамках узагальненої σ -моделі. На основі цієї моделі можна описати як ферромагнетик, так і антиферромагнетик, а також ферримагнетик поблизу точки компенсації спинів ґраток. Для цієї моделі сформульовано задачу розсіяння магнона на солітоні та одержано її точний розв'язок для парціальної моди з азимутальним квантовим числом $m = 1$. Показано, що в лінійному наближенні ця мода повністю описує динаміку центра солітона в магнетикі скінченного розміру. На основі цього аналізу побудовано ефективні рівняння руху солітона в різних магнетиках.

PACS: 75.10.–b

Хорошо известно, что в низкоразмерных магнетиках особую роль могут играть нелинейные элементарные возбуждения — солитоны. В ряде случаев солитоны вносят определяющий вклад в термодинамические свойства одномерных и двумерных магнетиков. С солитонами связано отсутствие дальнего порядка при ненулевых температурах в одномерных и изотропных двумерных магнетиках. В одномерных магнетиках за это ответственны кинки, см. обзоры [1–3], в двумерных магнетиках — локализованные солитоны Белавина—Полякова [4]. Для двумерного легкоплоскостного ферромагнетика было показано, что присутствие нелокализованных солитонов (вихрей) приводит к особому виду фазо-

вого перехода — фазовому переходу Березинского—Костерлица—Таулесса [5,6]. Движение солитонов и солитон-магнонное взаимодействие приводят к вкладу солитонов в динамические функции отклика, что можно исследовать экспериментально с помощью рассеяния нейтронов [7], а также путем изучения затухания спиновых волн [8–10].

Динамическое описание широкого класса классических двумерных изотропных гейзенберговских магнетиков может быть проведено в терминах классического единичного векторного параметра порядка \mathbf{n} , $n_x + in_y = \sin \theta e^{i\varphi}$, $n_z = \cos \theta$ [1,11]. Динамика классического ферромагнетика описывается уравнением Ландау—Лифшица для нормированной

намагниченности, которая в этом случае играет роль динамической переменной \mathbf{n} . В классическом антиферромагнетике в качестве динамической переменной выступает вектор антиферромагнетизма, который в длинноволновом приближении можно считать единичным. Динамика антиферромагнетика описывается уравнениями лоренц-инвариантной σ -модели \mathbf{n} -поля. Оба типа магнетиков будем рассматривать в рамках единого подхода — на основе обобщенной σ -модели, динамические уравнения которой имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \theta + \sin \theta \cos \theta \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \varphi)^2 \right] = \\ = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\zeta \sin \theta}{D} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\nabla (\sin^2 \theta \nabla \varphi) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\sin^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t}) - \frac{\zeta \sin \theta}{D} \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (2)$$

Здесь параметр D имеет смысл коэффициента спиновой жесткости ферромагнетика, c — скорость спиновых волн в антиферромагнетике. В приближении взаимодействия ближайших соседей $D = JSa^2/\hbar$, $c = 2JSa\sqrt{Z}/\hbar$, J — модуль обменного интеграла, S — спин атома, a — постоянная решетки, Z — число ближайших соседей. Конкретный вид магнетика определяется соотношением параметров c и D/ζ . Обобщенная σ -модель при конечных D и c описывает ферримагнетик вблизи точки компенсации механических моментов подрешеток. Для такого магнетика линейное по временным производным (гироскопическое) слагаемое в уравнении имеет такую же структуру, что и в ферромагнетике, но пропорционально малому параметру $\zeta = (S_1 - S_2)/(S_1 + S_2)$, где S_1, S_2 — средние значения механических моментов атомов подрешеток [11]. Для описания ферромагнетика необходимо опустить в уравнениях движения вторые производные по времени, т.е. формально устремить c к бесконечности, и положить $S_2 = 0$, т.е. $\zeta = 1$. Динамическое слагаемое в лагранжиане ферромагнетика имеет чисто гироскопическую природу. Динамика изотропной σ -модели, описывающей антиферромагнетик, имеет лоренц-инвариантный вид с характерным параметром скорости c . Для антиферромагнетика гироскопический член отсутствует (нужно положить $\zeta = 0$).

Простейшими элементарными линейными возбуждениями изотропного магнетика, возникающими на фоне основного однородного состояния, являются магноны непрерывного спектра. Выбирая ориентацию параметра порядка \mathbf{n} вдоль полярной оси, по-

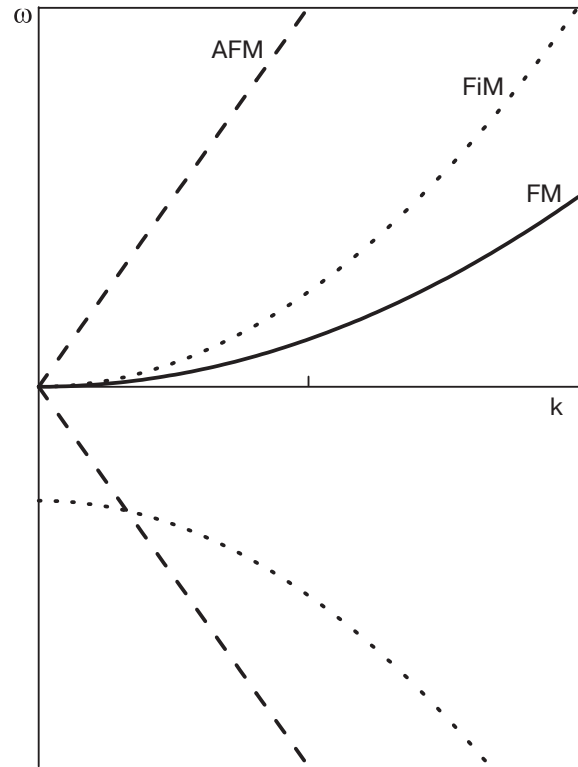


Рис. 1. Законы дисперсии магнонов для различных изотропных магнетиков, которые описываются обобщенной σ -моделью: FM — ферромагнетик, AFM — антиферромагнетик, FiM — ферримагнетик.

лучим магнонные решения в виде циркулярно поляризованной волны $\theta = \text{const} \ll 1$, $\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(k)t$. Закон дисперсии для ферромагнетика квадратичен, $\omega_{FM}(k) = Dk^2$ (см. рис. 1).

В случае антиферромагнетика закон дисперсии линейен, $|\omega_{AFM}(k)| = ck$, в нем присутствуют две вырожденные ветви с противоположными циркулярными поляризациями $\omega = \pm ck$, что эквивалентно возможности линейной поляризации магнонов. Для ферримагнетика возникают две ветви, как и в случае антиферромагнетика, но эти ветви не вырождены, их частоты определяются формулами

$$\omega_{\pm} = -\zeta \frac{c^2}{2D} \pm \sqrt{\left(\zeta \frac{c^2}{2D} \right)^2 + c^2 k^2}. \quad (3)$$

При малых k одна ветвь магнонов, как и для ферромагнетика, имеет безактивационный закон дисперсии $\omega_{1,FiM}(k) = Dk^2/\zeta$, а вторая имеет ненулевую активацию $\omega_{2,FiM} \rightarrow -\zeta c^2/D$ при $k \rightarrow 0$.

Для изотропного магнетика в двумерном случае известно точное аналитическое решение, которое описывает солитон Белавина — Полякова [4]:

$$\text{tg} \frac{\theta_0}{2} = x^{-|v|}, \quad \varphi_0 = \alpha + v\zeta, \quad x = \frac{r}{R}. \quad (4)$$

Это решение имеет, естественно, одинаковый вид как для ферромагнетика или антиферромагнетика, так и для ферримагнетика. Здесь r, χ — полярные координаты в плоскости магнетика, целое число ν — топологический заряд солитона, R и α — произвольные параметры.

Энергия такого солитона определяется формулой

$$E_0 = 4\pi JS^2 |\nu|$$

и не зависит от R и α . Неоднозначность выбора α характерна для многих моделей и является следствием изотропности гейзенберговского обмена. Существование произвольного параметра R (радиуса солитона) и независимость энергии от R связаны с масштабной инвариантностью статической двумерной σ -модели [4]. Очевидно, что подобная симметрия нарушается в динамике, за исключением тривиального случая чистого антиферромагнетика и трансляционного движения, когда все сводится к преобразованию Лоренца.

Уравнения нелинейной σ -модели для антиферромагнетика формально лоренц-инвариантны с характерной скоростью c — фазовой скоростью магнонов. Следовательно, анализ динамических свойств солитонов в антиферромагнетиках может быть проведен с помощью преобразования Лоренца применительно к неподвижному солитону. В частности, энергия и импульс солитонов в антиферромагнетиках, движущихся с произвольной скоростью \mathbf{v} , определяются формулами

$$E(v) = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{P}(v) = \frac{\mathbf{v}}{c} \frac{E_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

с законом дисперсии, имеющим стандартный лоренц-инвариантный вид, $E(P) = \sqrt{E_0^2 + c^2 P^2}$, где E_0 — энергия неподвижного солитона. В интересующем нас случае малых скоростей солитона $v \ll c$ это означает, что в основном приближении координата солитона \mathbf{X} в случае антиферромагнетика удовлетворяет уравнению типа Ньютона с вполне определенной массой M , $M_{AFM} = E_0/c^2$:

$$M \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{F}_e, \quad (5)$$

где \mathbf{F}_e — внешняя сила, действующая на солитон.

Динамические свойства солитонов в ферромагнетиках изучены недостаточно полно. Для них надежно установлено лишь существование в динамических уравнениях гироскопического слагаемого $G[\mathbf{e}_z, d\mathbf{X}/dt]$, величина которого определяется топологией. Для солитона $G = 4\pi\nu JS^2/D$. Понятно, что комбинирование этого слагаемого с ньютонов-

скими уравнениями (5) должно приводить к ларморовской прецессии центра солитона с частотой $\omega_L = G/M$. Однако ситуация оказалась более сложной. Как для солитона в изотропном магнетике, так и для вихря в легкоплоскостном магнетике спектр магнонов безактивационный. Отсюда следует, что при движении солитона типа ларморовской прецессии с конечной частотой ω_L ее значение неизбежно попадает в магнонный континуум. Следовательно, движение солитона возбуждает магнонные моды, что ведет к принципиально различным следствиям для его движения в безграничной среде и в конечном образце. В интересующем нас случае магнетика конечного размера следует ожидать, что в результате излучения магнонов, их отражения от границы и обратного воздействия на солитон установится динамическое состояние магнетика, включающее как движущийся солитон, так и когерентные колебания намагниченности, согласованные с движением солитона. Для понимания этой сложной картины весьма важными оказались работы по прямому численному моделированию движения солитона для ферромагнетиков приблизительно круговой формы, вырезанных из квадратной решетки размерами до 200×200 , под действием сил изображения со стороны границы [12, 13]. В этих работах показано, что движение солитона не описывается простыми уравнениями второго порядка типа уравнений Ньютона и необходимо вводить динамические уравнения более высокого порядка по временным производным. Следуя этой идее, авторы [14] утверждают, что адекватное описание динамики магнитного вихря в легкоплоскостном ферромагнетике может быть получено только с использованием сложной иерархии уравнений движения, содержащих все более высокие производные по времени. Чтобы это понять, следует обсудить, в каком смысле можно говорить о неравномерном движении вихря (не являющегося локализованным возмущением поля) в легкоплоскостном магнетике или солитона Белавина — Полякова (в котором локализация слабая) в изотропном магнетике.

При вычислении солитонного вклада в функции отклика магнетика существенным оказывается именно координата центра солитона. Поведение этой величины анализировалось в численных экспериментах [12, 13]. Таким образом, мы приходим к задаче о построении эффективных уравнений динамики солитона, т.е. уравнений, описывающих движение некой точки \mathbf{X} , выбранной как центр солитона, не принимая во внимание, что вдали от солитона могут быть возбуждены магнонные моды, связанные с временной эволюцией $\mathbf{X}(t)$. Фактически координата солитона $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ в этом подходе играет

роль коллективной переменной, описывающей как динамику конечного числа спинов, связанных с солитоном как таковым, так и динамику магнетонных мод вдали от солитона. Ясно, что такие уравнения могут быть построены только приближенно и важно установить, как изменяется вид этих уравнений при повышении точности (например, при учете все большего числа магнетонных мод). Кроме того, понятно, что такие уравнения на определенном уровне станут *нелокальными*, т. е. коэффициенты в них будут существенно зависеть от размеров и формы системы. Именно такая ситуация возникала при построении эффективных уравнений для магнитных вихрей, предложенных в работе [12]. С другой стороны, на основе анализа данных численного моделирования было установлено, что уравнения, линейные по временным производным от смещения солитона из центра системы, дают адекватное описание динамики центра солитона даже при немалом начальном смещении (10–20 % от размера системы). Фактически это означает, что единственный источник нелинейности в уравнениях связан со статическим слагаемым — внешней силой, например силой изображения. Поэтому возникла идея — для восстановления динамических уравнений, описывающих движение солитонов, использовать данные о малых колебаниях намагниченности на фоне солитона. Действительно, поскольку силу изображения, действующую на магнитный вихрь, легко сосчитать, частоты некоторых магнетонных мод могут быть связаны с динамическими слагаемыми в уравнениях движения.

Таким образом, мы приходим к задаче о малых колебаниях намагниченности на фоне солитона (этот подход развивал Вайсин [15]). Анализ этой задачи по сравнению с одномерным случаем значительно осложняется тем, что исследование даже неподвижных солитонов, что является очевидной первой стадией анализа динамики, проводится с использованием численных методов. В этом плане опять наиболее интересным случаем является изотропная σ -модель, для которой не только известно неподвижное солитонное решение, но и может быть достигнут существенный прогресс в анализе магнетонных на фоне солитона.

Для анализа малых колебаний намагниченности на фоне солитона Белавина — Полякова необходимо рассмотреть отклонения угловых переменных θ и φ от их значений в солитоне θ_0 и φ_0 соответственно. Удобно ввести $\vartheta = \theta - \theta_0$ и переменную $\mu = (\varphi - \varphi_0) \sin \theta_0$ и затем перейти к комплексной переменной $\psi = \vartheta + i\mu$. После несложных преобразований задача сводится к комплексному уравнению вида

$$\hat{H}\psi + \Delta U\psi^* - \frac{2 \cos \theta_0}{x^2} i \frac{\partial \psi}{\partial \chi} = -i \frac{DR^2}{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{R^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (6)$$

где \hat{H} — оператор Шредингера с потенциалом

$$U = \frac{2v^2 \cos^2 \theta_0 + (\theta'_0)^2 - v^2 \sin^2 \theta_0}{2x^2},$$

$$2\Delta U = (\theta'_0)^2 - \left(\frac{v^2}{x^2} \right) \sin^2 \theta_0;$$

штрихом обозначена производная по безразмерной переменной $x = r/R$. Для солитона в изотропном магнетике $\theta'_0 = -(v/x) \sin \theta_0$, и слагаемое с ΔU обращается в нуль. Величина ΔU не равна нулю как для магнитных вихрей, так и для прецессионных солитонов в легкоосных магнетиках. Хотя в нашу задачу не входит исследование анизотропных магнетиков, для которых $\Delta U \neq 0$, обсудим вначале общие свойства этой проблемы, так как это важно для выбора мод, ответственных за движение центра солитона.

Решения уравнения (6) можно искать в виде $\psi = \vartheta + i\mu = u(r)e^{i\Phi} + v(r)e^{-i\Phi}$, $\Phi = m\chi + \omega t$, где m — азимутальное квантовое число. Тогда для функций $u(r)$, $v(r)$ получается задача на собственные значения вида двух связанных уравнений Шредингера:

$$\left[\hat{H} + \frac{2mv \cos \theta_0}{x^2} \right] u + (\Delta U)v = \Omega u, \quad (7)$$

$$\left[\hat{H} - \frac{2mv \cos \theta_0}{x^2} \right] v + (\Delta U)u = -\Omega v,$$

для обобщенной σ -модели $\Omega = R^2 [\omega D/\zeta + \omega^2/c^2]$. Если же $\Delta U = 0$, то система распадается на два независимых уравнения типа Шредингера для u и v :

$$\hat{H}_{(+)}u = \Omega u, \quad \hat{H}_{(-)}v = -\Omega v, \quad (8)$$

$$\hat{H}_{(\pm)} = -\nabla_x^2 + \frac{(m \pm v \cos \theta_0)^2 - v^2 \sin^2 \theta_0}{r^2}. \quad (9)$$

Эти два уравнения не эквивалентны, в частности, они имеют разные асимптотики решения в нуле: $u = c_1 r^{m-v} + c_2 r^{-(m-v)}$, $v = c_3 r^{m+v} + c_4 r^{-(m+v)}$. Поэтому уравнения для u и v играют разные роли в описании динамики солитона. Легко видеть, что операторы $\hat{H}_{(\pm)}$ не имеют отрицательных собственных значений. Поэтому уравнение для v в случае $\Delta U = 0$ можно вообще не рассматривать, положив в решении $v = 0$. Тогда мы приходим к выводу, что малые колебания на фоне солитона в изотропном магнетике описываются одним уравнением типа Шредингера (8) с оператором $\hat{H}_{(+)}$ для переменной u .

В работе [16] были найдены решения этого уравнения при $\Omega = 0$ для любого значения азимутального числа m . Эти нулевые решения $u_m^{(0)}$ имеют вид $u_m^{(0)} = x^{-m} \sin \theta_0$, для случая $-v + 1 \leq m \leq v$ они описывают квазилокальные моды данной задачи. Особенно важно, что среди них есть мода с $m = 1$, в которой $u_1^{(0)} = \sin \theta_0 / x \propto d\theta_0 / dx$. Ясно, что именно эта мода описывает движение солитона и представляет для нас наибольший интерес.

При любом сколь угодно малом, но ненулевом ΔU ситуация меняется кардинально. В этом случае уравнения для u и v образуют связанную систему. Формальное решение для второго уравнения системы (7) при малом ΔU и конечном значении $\Omega > 0$ можно записать в виде

$$v = \frac{1}{\hat{H}_{(-)} + \Omega} (\Delta U) u.$$

Это немедленно приводит к возможности не двух, а четырех типов поведения $u(r)$ и таких же типов для $v(r)$ при $r \rightarrow 0$, т.е. для любого m могут появиться обе асимптотики: $u = c_1 r^{m-v} + c_2 r^{-(m-v)} + c_3 r^{m+v} + c_4 r^{-(m+v)}$. Отсюда сразу видно, что в случае связанной системы общего вида динамика солитона как целого ассоциируется с модами как с $m = -1$, так и с $m = +1$. В некотором смысле в этом случае восстанавливается симметрия относительно замены $m \rightarrow -m$. В частности, амплитуды рассеяния спиновой волны с малым волновым числом k на магнитном вихре ($\Delta U \neq 0$) для $m = +1$ и $m = -1$ отличаются только знаком [14], в то время как для солитона в изотропном ферромагнетике $\Delta U = 0$, и эти амплитуды имеют различную функциональную зависимость от k [17].

Таким образом, мы приходим к выводу, что для общей модели магнетика при построении эффективных уравнений для координаты центра вихря, играющей роль коллективной переменной, следует использовать частоты мод с $m = +1$ и $m = -1$ как уединенных, так и объединенных в дублеты «высших» мод. Для изотропных же магнетиков в этой задаче актуальны только моды с $m = +1$, которые в пределе $\Omega \rightarrow 0$ имеют асимптотику $d\theta_0/dr$ и описывают смещение солитона. Однако нас интересует движение с немалой скоростью, которому соответствуют конечные частоты в уравнении (8).

Замечательным свойством изотропных магнетиков с солитоном Белавина—Полякова является то, что для них существует точное решение для трансляционной моды с азимутальным числом $m = 1$ при произвольном k , а не только его асимптотики при $k \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow 0$), которое отвечает сдвигу солитона как целого с бесконечно малой скоростью. Для нашего анализа это очень важно, так как для выясне-

ния вопроса о локальном или нелокальном характере движения солитона необходимо исследовать динамику в ограниченном магнетике конечного размера L , а не только в пределе $L \rightarrow \infty$. Это решение было получено в работе [17] и может быть записано в виде

$$u_1^k = J_{v+1}(kr) + \frac{J_v(kr)}{k(r/R)^v} \frac{d\theta_0}{dr}, \quad (10)$$

подчеркивающим, что на малых расстояниях эта мода описывает смещение солитона. По-видимому, наличие такого решения не связано с точной интегрируемостью задачи. Действительно, модель изотропного магнетика является точно интегрируемой в статическом двумерном случае, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, y)$, но ничего не известно о ее интегрируемости в динамическом (2+1) случае, для $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, y, t)$.

Исследуем простой случай, позволяющий восстановить уравнения движения солитона. Рассмотрим колебания намагниченности в круговом магнетике с конечным радиусом L и солитоном в центре. Обсудим граничные условия Дирихле, отвечающие фиксированному значению намагниченности на границе,

$$\psi(r, \chi)|_{r=L} = 0, \quad (11)$$

моделирующие случай отталкивания солитона от границы за счет сил изображения [17]. Нас интересуют только те колебания намагниченности, которые связаны со смещением солитона, т.е. имеют азимутальное число $m = 1$. При учете граничных условий (11) и явного вида собственной функции (10) спектр задачи — дискретный. В области малых волновых векторов $kL \ll 1$ решение (10) имеет вид

$$\psi(x) \propto r^{v+1} \left(1 - \frac{4v(v+1)}{(kr)^2} \frac{1}{(r/R)^{2v} + 1} \right),$$

откуда получается, что для фиксированных граничных условий существует решение спектральной задачи с аномально малой частотой, отвечающее этому неравенству. Для него

$$k_0^2 = \frac{4v(v+1)}{L^2} \left(\frac{R}{L} \right)^{2v}. \quad (12)$$

Следующие корни уравнения уже отвечают условию $kL \approx 1$, $k_n = j_n/L$, где j_n — n -й корень функции Бесселя. Таким образом, спектр собственных частот трансляционной моды с $m = 1$ содержит аномально малую частоту, которая должна проявляться в медленном движении солитона, и дискретный ряд более высоких частот такого порядка величины, как для магнетика без солитона. Важно отметить, что для всех этих частот в соответствующем решении можно

явно наблюдать характерный пик, отвечающий смещению солитона. Для anomalно малой частоты решение практически неотлично от функции $d\theta_0/dr$ во всем магнетике (см. рис. 2,а). Для следующей моды отличие от $d\theta_0/dr$ заметно вдали от солитона, но трансляционный максимум по-прежнему явно выражен в области локализации солитона (см. рис. 2,б).

Для ферромагнетика и антиферромагнетика эти ответы приводят к принципиально различным физическим картинам динамики солитонов, поэтому эти случаи нужно анализировать отдельно. В случае антиферромагнетика есть две частоты, отвечающие трансляционной голдстоуновской моде:

$$\omega_0^2 = c^2 k_0^2 = \frac{4\nu(\nu+1)c^2}{L^2} \left(\frac{R}{L}\right)^{2\nu}. \quad (13)$$

Эти частоты могут быть легко объяснены на основе простой физической картины движения солитона под действием силы изображения $\mathbf{F}_e = -\alpha\mathbf{X}/L^p$, где $p = 2(\nu+1)$, а величина $\alpha = 16\pi\nu^2(\nu+1)JS^2R^{2\nu}$ [17]. Для рассмотренных нами граничных условий Дирихле сила является возвращающей (отталкивание от границы) и движение устойчиво.

Весьма существенно, что даже для простого случая антиферромагнетика, для которого должна реализоваться лоренц-инвариантная или (при малых скоростях) ньютоновская динамика, в случае солитона в конечном магнетике эффективные уравнения оказываются более сложными, чем уравнение Ньютона. Действительно, колебания солитона под действием силы изображения имеют конечную частоту и попадают в непрерывный спектр. В силу этого возбуждаются магнотные моды, в круговом магнетике им соответствуют высшие значения k_n . Учет k_n для $n > 0$ также может быть объяснен на основе эффективных уравнений для \mathbf{X} . При этом появляется иерархия эффективных уравнений движения, содержащих только четные производные по времени. Для описания динамики с учетом одной высшей моды достаточно записать уравнение четвертого порядка,

$$M_2 \frac{d^4 \mathbf{X}}{dt^4} + M \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} + \frac{\alpha \mathbf{X}}{L^p} = 0, \quad (14)$$

коэффициенты в котором можно найти, сопоставив частоты $\omega_1^2 = c^2 k_1^2$, $k_1 = j/L$. При больших $L \gg R$ получается, что $M_2 \cong M/\omega_1^2$, т.е. величина M_2 расходится с ростом L ,

$$M_2 = \frac{E_0 L^2}{c^4 j^2}, \quad (15)$$

и учет этой моды дает нелокальные уравнения для солитона в антиферромагнетике. Движение солито-

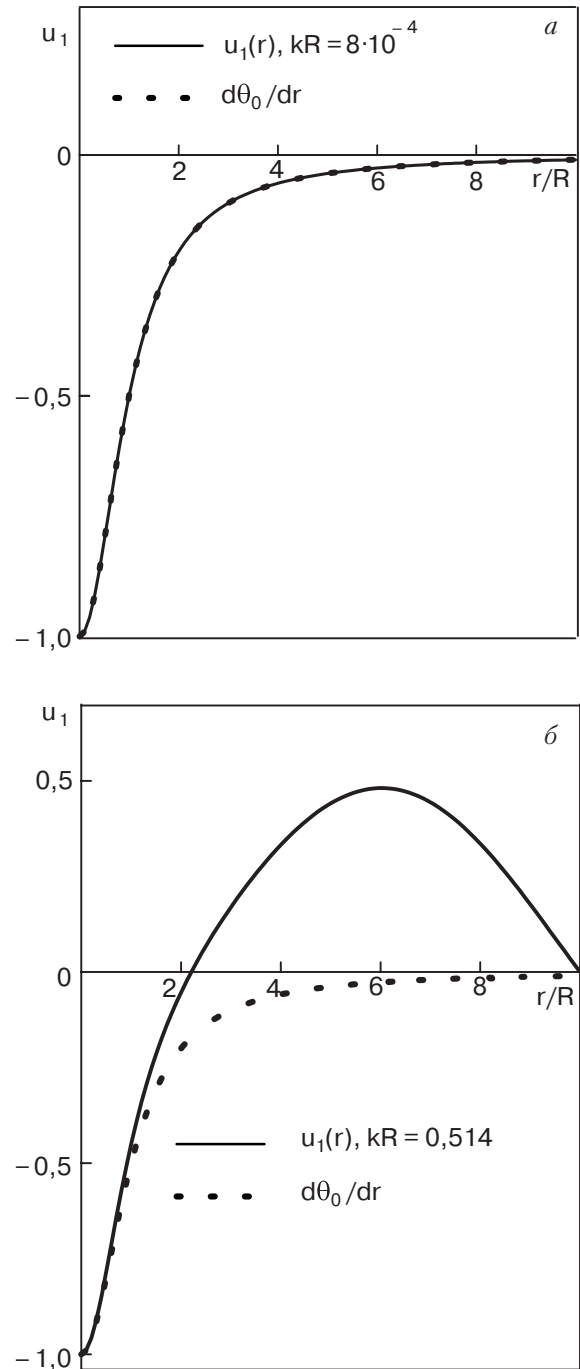


Рис. 2. Функция $u_{m=1}(r)$ для трансляционной голдстоуновской моды (а) и следующей трансляционной моды (б) в изотропном магнетике с $L=10R$.

на с учетом этого слагаемого будет иметь вид суперпозиции колебаний медленного движения с частотами $\pm \omega_0$ и быстрого с частотами $\pm \omega_1$. В общем случае для компонент вектора \mathbf{X} можно записать

$$X = A \cos \omega_0 t + C \cos (\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$Y = B \sin (\omega_0 t + \varphi_0) + D \sin (\omega_1 t + \varphi_2).$$

В зависимости от соотношения амплитуд A, B, C, D и фаз $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ как быстрое, так и медленное движение может характеризоваться и линейной, и эллиптической (или круговой) поляризацией. Такое большое разнообразие решений неудивительно для уравнения четвертого порядка, в котором в качестве начальных условий следует задавать значение \mathbf{X} и его производных по времени до третьей включительно.

Обсудим, какое движение солитона получается из этого уравнения в условиях, в которых проводилось численное моделирование [13]. В этом случае начальному состоянию отвечала статическая спиновая конфигурация с солитоном, который в начальный момент времени покоился в некоторой точке $\mathbf{X}(0) = a\mathbf{e}_0$, \mathbf{e}_0 — произвольный орт. Поскольку в начальный момент использовалась статическая конфигурация, следует считать, что $d\mathbf{X}/dt|_{t=0} = 0$, $d^2\mathbf{X}/dt^2|_{t=0} = 0$, $d^3\mathbf{X}/dt^3|_{t=0} = 0$. Отсюда получается, что солитон движется вдоль прямой линии, параллельной \mathbf{e}_0 , и его смещение $\mathbf{X}(t)$ имеет вид суперпозиции двух колебаний:

$$\mathbf{X}(t) = a\mathbf{e}_0 \frac{\omega_1^2 \cos \omega_0 t - \omega_0^2 \cos \omega_1 t}{\omega_1^2 - \omega_0^2}.$$

Таким образом, анализируя самый простой случай антиферромагнетика, для которого динамика солитонов любого типа, казалось бы, должна иметь лоренц-инвариантный характер, мы установили, что центр солитона должен совершать достаточно сложное движение, которое, в свою очередь, должно проявляться в функциях отклика магнетика. Оно может быть верифицировано путем численного моделирования. К сожалению, подобные исследования не проводились.

Таким образом, исходя только из линейных уравнений для координаты солитона мы получили связь между амплитудами различных мод, возбужденных в системе. Чтобы проверить справедливость этого подхода, применим его к задаче, которая подробно проанализирована как аналитически, так и численно. Рассмотрим движение вихря в легкоплоскостном магнетике круговой формы с радиусом L . В такой системе есть нижайшая мода с $m = 1$ и частотой $\omega_0 \propto 1/L^2$. Следующие моды объединены в дублеты с $m = \pm 1$, модули их частот ω_1 и ω_2 близки. Нижнему дублету отвечают $\omega_1 = -\tilde{\omega} + \delta$, $\omega_2 = \tilde{\omega} + \delta$, $\omega_0 \leq \delta \ll \tilde{\omega} \propto 1/L$. Эта картина получается из численного исследования магнанных мод на фоне вихря в дискретной модели магнетика [15, 14] и аналитически из анализа данных рассеяния магненов на вихре [14]. Присутствие этих трех мод наблюдалось при численном моделировании динамики вихря, при этом высшие дублеты обычно не были видны [13].

Движение вихря с учетом только этих трех частот описывается уравнением, которое можно получить как путем обобщения феноменологических данных [13], так и на основе метода коллективных переменных с использованием обобщенной подстановки типа движущейся волны [18]:

$$G_3[d^3\mathbf{X}/dt^3, \mathbf{e}_z] + Md^2\mathbf{X}/dt^2 + G[d\mathbf{X}/dt, \mathbf{e}_z] + \kappa\mathbf{X} = 0.$$

Здесь коэффициенты гиросилы G и массы M конечны, коэффициент упругости $\kappa \propto 1/L^2$, а коэффициент «высшей» гиросилы G_3 расходится с ростом размера системы как L^2 [14]. Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} X &= A_0 \cos \omega_0 t + A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ &\quad + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ Y &= A_0 \sin \omega_0 t + A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ &\quad + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Для описания численных работ примем, что вихрь в начальном состоянии покоится, т.е. $d\mathbf{X}/dt|_{t=0} = 0$, $d^2\mathbf{X}/dt^2|_{t=0} = 0$. Считая для определенности, что $X(0) = a$, $Y(0) = 0$, получаем, что все три коэффициента, A_0, A_1 и A_2 , не равны нулю. В линейном приближении по малому параметру $\omega_0/\tilde{\omega}$

$$A_0 \approx a, \quad A_1 \approx -A_2 \approx a\omega_0/2\tilde{\omega}.$$

При этом получается траектория, весьма похожая на ту, что наблюдалась в численных экспериментах и описана аналитически Ковалевым, Мертенсом и Шнитцером на основе анализа законов сохранения солитона при взаимодействии с «облаком» магненов.

Для локализованных топологических солитонов в ферромагнетиках численное моделирование движения солитонов не проводилось. Из анализа малых колебаний в работе [17] было предложено описывать движения таких солитонов на основе уравнения Ньютона с гиросилой:

$$Md^2\mathbf{X}/dt^2 + G[d\mathbf{X}/dt, \mathbf{e}_z] = -\alpha\mathbf{X}/L^p.$$

Оказалось, что для солитона Белавина — Полякова в ферромагнетике нелокальность проявляется уже при учете второй производной, т.е. в обычных уравнениях ньютоновского типа эффективная масса M_{FM} расходится как L^2 , $M_{FM} = -4\pi vJS^2(L/jD)^2$, причем ее знак зависит от характера граничных условий [17]. Для фиксированных граничных условий знак массы отрицательный, масса становится положительной для магнетика со свободной границей.

Переход от локальной к нелокальной динамике удобно проследить на примере обобщенной σ -модели (1),(2), которая в пределе антиферромагнетика (при $\zeta \rightarrow 0$) и при учете только двух нижних мод дает локальные ньютоновские уравнения с конечной массой $M = E_0/c^2$, а при $1/c^2 \rightarrow 0$ переходит в уравнение Ландау–Лифшица для ферромагнетика. Далее мы ограничимся анализом наиболее интересного случая топологического заряда $v = 1$.

Обсудим динамические уравнения с учетом двух наименьших собственных значения k_0^2 и k_1^2 , $k_0^2 \ll k_1^2$ при условии $R \ll L$, которые записываются в виде

$$k_0^2 = \frac{8R^2}{L^4}, \quad k_1^2 = \left(\frac{j}{L}\right)^2.$$

В отличие от случая ферромагнетика, им отвечают четыре частоты, абсолютные значения которых, в отличие от антиферромагнетика, могут различаться. Две частоты $\omega_0^{(+)}$ и $\omega_0^{(-)}$ соответствуют $k^2 = k_0^2$,

$$\omega_0^{(\pm)} = -\zeta \frac{c^2}{2D} \pm \sqrt{\left(\zeta \frac{c^2}{2D}\right)^2 + c^2 k_0^2}, \quad (16)$$

еще две, $\omega_1^{(+)}$ и $\omega_1^{(-)}$ связаны с k_1^2 :

$$\omega_1^{(\pm)} = -\zeta \frac{c^2}{2D} \pm \sqrt{\left(\zeta \frac{c^2}{2D}\right)^2 + c^2 k_1^2}, \quad (17)$$

где символы (\pm) в обозначениях частот нужно выбирать так же, как и знаки в формулах перед корнем. В эти выражения входят три безразмерных малых параметра: ζ , $(R/L)^2$ и D/cL . Будем считать, что величина ck_0 , содержащая произведение двух из них, является много меньшей, чем ck_1 , но не будем пока фиксировать относительные величины $\zeta c^2/D$ и ck_0 или ck_1 . Ясно, что такое неравенство не исключает и случай «чистого» антиферромагнетика, для которого $\zeta = 0$.

Если величина ζ достаточно велика или размер системы L мал, так что $\zeta c > D/L$, то выполняется неравенство

$$\omega_0^{(+)} \ll \omega_1^{(+)} \ll \omega_0^{(-)} \cong |\omega_1^{(-)}| \cong \zeta c^2/D.$$

В таком предельном случае следует отбросить максимальные частоты порядка $\zeta c^2/D$. Дело не только в том, что для «чистого» ферромагнетика $\zeta \sim 1$ и эти частоты велики, порядка обменного интеграла. Важнее то, что целый ряд квазидублетов, отвечающих значениям $c^2 k_2^2, c^2 k_3^2, \dots, k_n^2 \sim j_n/L$, где j_n — следующие корни функции Бесселя, лежат между $\omega_1^{(\pm)}$ и $\omega_{0,1}^{(-)}$, в силу чего учет $\omega_{0,1}^{(-)}$ непоследователен. Тогда соотношение двух частот $\omega_1^{(+)}$ и $\omega_0^{(+)}$, актуальных для задачи, такое же, как для солитона

в ферромагнетике: $\omega_0^{(+)} \ll \omega_1^{(+)}$. Следует ожидать, что уравнение движения, как и в ферромагнетике, будет иметь ньютоновскую форму:

$$M \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} + G \left[\mathbf{e}_z, \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right] = \mathbf{F}_e. \quad (18)$$

Здесь $\mathbf{F}_e = -\alpha \mathbf{X}/L^p$ — внешняя сила, которая имеет тот же вид, что и для антиферромагнетика; G — гироскопическая константа. Рассмотрим, как эти уравнения согласуются с закономерностями динамики солитона, полученными из анализа малых колебаний. В главном приближении по малым параметрам ζ и $(R/L)^2$ получаем два значения частот: G/M и α/GL^p . Сравнивая эти частоты с величинами $\omega_0^{(+)}$ и $\omega_1^{(+)}$, приходим к формуле для эффективной массы и гиросилы, которые отличаются от полученной выше для ферромагнетика только наличием множителя ζ :

$$M = -\frac{4\pi\zeta^2 JS^2}{D^2} \left(\frac{L}{j}\right)^2, \quad G = \frac{4\pi\zeta JS^2}{D}. \quad (19)$$

Заметим, что величину гиросилы нетрудно получить и обычным путем непосредственного анализа уравнений σ -модели.

Итак, в «ферромагнитном» предельном случае $\zeta c > D/L$ значение эффективной массы оказывается расходящимся как L^2 , так же как в «чистом» ферромагнетике. Однако коэффициент перед L^2 убывает при уменьшении ζ , и в актуальном случае $\zeta \ll 1$ при конечном L значение M мало в меру малости ζ .

Рассмотрим теперь другой интересный «антиферромагнитный» предельный случай $\zeta c < D/L$. В этом предельном случае выполняются неравенства $|\omega_0^{(\pm)}| \ll |\omega_1^{(\pm)}|$, основному приближению также соответствуют две частоты, $\omega_0^{(+)} \cong \alpha R^2/L^4 G$ и $\omega_0^{(-)} \cong -\zeta c^2/D$, а частоты $\omega_1^{(\pm)}$ образуют высоко расположенный дублет. Очевидно, что в этом основном приближении мы снова получаем обычное динамическое уравнение Ньютона с гиросилой (18). Сопоставляя его корни с величинами $\omega_0^{(+)}$ и $\omega_0^{(-)}$ из (16), получаем, что значение эффективной массы конечно и положительно:

$$M = \frac{4\pi JS^2}{c^2}.$$

Это значение буквально воспроизводит лоренц-инвариантный ответ, но в этом случае значение гиросилы конечно. Предельный переход $\zeta \rightarrow 0$ в полученных формулах дает чисто антиферромагнитную лоренц-инвариантную динамику. Учет высшего дублета приводит к появлению уравнений четвертого порядка с той же структурой, что для «чистого» антиферромагнетика, но с дополнительным слагае-

мым, пропорциональным $\zeta d^3\mathbf{X}/dt^3$ (здесь мы их не обсуждаем).

Таким образом, для наиболее общей, но физически содержательной двумерной модели изотропного магнетика в настоящей работе проанализирована динамика солитонов Белавина—Полякова и прослежен переход от локальной динамики — лоренц-инвариантной для антиферромагнетика или чисто гироскопической (безинерционной) для ферромагнетика — к нелокальной динамике. Показано, что нелокальность обязательно появляется при анализе движения координаты центра солитона, рассматриваемой как коллективной переменной, и при необходимости учета достаточного количества собственных частот системы. В ферромагнетике нелокально уже обычное инерционное слагаемое в уравнении Ньютона, для чистого антиферромагнетика нелокальность появляется при учете первого неголдстоуновского дублета. В промежуточном случае ферри-магнетика с малой, но ненулевой раскомпенсацией спинов $\zeta \gg (D/cL) (R/L)^2$ для солитона в простейшем приближении реализуется типичная ньютоновская динамика с гироскопической силой. При выполнении неравенства $\zeta \ll D/cL$ эффективная масса конечна при $L \rightarrow \infty$. Условием реализации такого поведения является выполнение неравенств $\zeta \ll D/cL$. Поскольку $D/c \sim a$ (a — постоянная решетки), это может быть согласовано и разумно с точки зрения микроскопического приближения (что требует выполнения условия $R \gg a$) только в конечном магнетике при достаточно малых значениях ζ :

$$\zeta \ll \frac{1}{L} \frac{D}{c} \approx \frac{a}{L}.$$

В другом предельном случае $\zeta > D/cL$ эффективная масса, как и в случае ферромагнетика, расходится как L^2 при увеличении размеров системы, но с существенно меньшим коэффициентом, который обращается в нуль в пределе $\zeta \rightarrow 0$. Таким образом, при изменении размера системы или параметра раскомпенсации ζ происходит переход от локального к типично нелокальному поведению.

1. Ю. А. Изюмов, *УФН* **155**, 553 (1988).
2. Н.-Ж. Mikeska and M. Steiner, *Adv. Phys.* **40**, 191 (1991).
3. V. G. Bar'yakhtar and B. A. Ivanov, *Soliton Thermodynamics of Low-Dimensional Magnet*, Sov. Sci. Rev. Sec. A: Phys. Reviews, I. Khalatnikov (ed.), Amsterdam, v. **16**, p. 3 (1993).
4. А. А. Белавин, А. М. Поляков, *Письма в ЖЭТФ* **22**, 503 (1975).

5. В. Л. Березинский, *ЖЭТФ* **59**, 907 (1970); *там же* **61**, 1144 (1971).
6. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys.* **C6**, 1181 (1973).
7. D. D. Wiesler, H. Zabel, and S. M. Shapiro, *Z. Phys.* **B93**, 277 (1994).
8. F. Waldner, *J. Magn. Magn. Mater.* **31–34**, 1203 (1983); *ibid.* **54–57**, 873 (1986); *ibid.* **104–107**, 793 (1992).
9. C. E. Zaspel, T. E. Grigereit, and J. E. Drumheller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4539 (1995); K. Subbaraman, C. E. Zaspel, and J. E. Drumheller, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2201 (1998).
10. C. E. Zaspel and J. E. Drumheller, *Int. J. Mod. Phys.* **10**, 3649 (1996).
11. Б. А. Иванов, А. Л. Сукстанский, *ЖЭТФ* **84**, 370 (1983).
12. F. G. Mertens, H. J. Schnitzer, and A. R. Bishop, *Phys. Rev.* **B56**, 2510 (1997).
13. F. G. Mertens and A. R. Bishop, in: *Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century*, L. Christiansen, M. Soerensen, and A. C. Scott (eds.), Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin (2000).
14. Б. А. Иванов, Н. Ж. Schnitzer, F. G. Mertens, and G. M. Wysin, *Phys. Rev.* **B58**, 8464 (1998).
15. G. M. Wysin, *Phys. Rev.* **B54**, 15156 (1996).
16. Б. А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **61**, 898 (1995).
17. Б. А. Иванов, В. М. Муравьев, Д. Д. Шека, *ЖЭТФ* **116**, 1091 (1999).
18. H. J. Schnitzer, F. G. Mertens, and A. R. Bishop, *Physica* **D141**, 261 (2000).

Effective equations of motion of a soliton in two sublattice isotropic magnets

E. G. Galkina, B. A. Ivanov, and V. M. Murav'yov

A solution of the problem of magnon scattering on a Belyavin—Polyakov soliton in 2D magnets described by the generalized σ -model is constructed. Based on this model, one can describe both a ferromagnet and an antiferromagnet as well a ferrimagnet in the vicinity of the compensation point. For this model a problem of magnon-soliton scattering is formulated and its exact solution for the partial mode with the azimuthal quantum number $m = 1$ is obtained. It is shown that in the linear approach this mode completely describes the dynamics of the solution center in a magnet of finite size. The analysis is used to derive effective equations of soliton motion in different magnets.