

# Динамика щелевых солитонов в модели Френкеля—Конторовой с двухбарьерным потенциалом

А. В. Горбач<sup>1</sup>, А. С. Ковалев<sup>2</sup>, О. В. Усатенко<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина

<sup>2</sup> Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины  
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина  
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua

<sup>3</sup> Институт радиофизики и электроники НАН Украины, ул. Акад. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина

Статья поступила в редакцию 13 февраля 2001 г.

Рассмотрена нелинейная упругая цепочка, находящаяся во внешнем двухбарьерном периодическом потенциале (обобщенная модель Френкеля—Конторовой). Изучены малоамплитудные динамические локализованные возбуждения, величины параметров которых находятся в щели спектра линейных волн системы и вблизи нее, — щелевые и околощелевые солитоны.

Розглянуто нелінійний пружний ланцюжок, який знаходиться у зовнішньому двохбар'єрному періодичному потенціалі (узагальнена модель Френкеля—Конторової). Вивчено малоамплітудні динамічні локалізовані збудження, величини параметрів яких знаходяться в щілині спектра лінійних хвиль системи і поблизу неї, — щілинні та білящілинні солітони.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Yv, 45.05.+x

## Введение

Модель Френкеля—Конторовой широко используется в физике твердого тела для теоретического описания дислокаций в кристаллах [1–3], движения краудионов в упругой решетке [4–6], флаксонов в джозефсоновских контактах, доменных границ в магнитоупорядоченных средах и т.д. [3,7]. В последнее время большое внимание уделяется обобщенным моделям Френкеля—Конторовой, в которых цепочка взаимодействующих атомов находится в сложном периодическом потенциале, — так называемом «двухъямном» или «двухбарьерном» потенциале [3,5,6,8]. В таких системах могут существовать топологические солитонные возбуждения со специфической структурой, в частности дробные и расщепленные краудионы [5,6].

Помимо топологических солитонных возбуждений (кинков), которые рассматриваются в большинстве работ, в модели Френкеля—Конторовой также могут существовать динамические

малоамплитудные солитонные возбуждения (солитоны огибающей). Изучению такого типа солитонных возбуждений в обобщенной модели Френкеля—Конторовой и посвящена настоящая работа.

Рассмотрена одноатомная упругая цепочка, находящаяся в двухбарьерном потенциале. Такая модуляция потенциала приводит к возникновению в спектре линейных волн щели, ширина которой пропорциональна разнице между двумя минимумами двухбарьерного потенциала. Изучены малоамплитудные динамические солитонные решения с параметрами, величины которых лежат в щели спектра линейных волн и вблизи нее, — так называемые щелевые и околощелевые солитоны.

## Постановка задачи и основные динамические уравнения

Как известно, в стандартной модели Френкеля—Конторовой рассматривается цепочка гармонически взаимодействующих между собой атомов, совершающих одномерное движение в потенци-

альном поле вида  $U \propto 1 - \cos x_n$  неподвижной периодической подложки, где  $x_n$  — пространственная координата  $n$ -го атома. Используем обобщенную модель [5,6], полагая периодический потенциал, создаваемый подложкой («внешнюю» нелинейность), в виде

$$V(x_n) = \gamma \left[ \eta(1 - \cos x_n) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x_n) \right], \quad (1)$$

где  $\gamma > 0$ , а  $\eta$  — безразмерный параметр, характеризующий двухбарьерность потенциала.

Взаимодействие между атомами вдоль цепочки также будем полагать ангармоническим («внутренняя» нелинейность):

$$U(\xi_n) = \frac{K_2}{2} (\xi_n - \xi_{n-1})^2 + \frac{K_4}{2} (\xi_n - \xi_{n-1})^4, \quad (2)$$

где  $\xi_n$  — смещение  $n$ -го атома из его положения равновесия  $x_n^0 = \pi n$ :  $\xi_n = x_n - x_n^0$ ; константа  $K_2$  положительна, межатомное расстояние полагаем равным  $\pi$ .

Будем считать, что в основном состоянии координаты атомов соответствуют минимумам внешнего потенциала (см. рис. 1). При этом атомы с четными номерами располагаются в абсолютных минимумах функции (1), соответствующих значению потенциальной энергии  $V(\pi n) \equiv 0$ ,  $n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ , а атомы с нечетными номерами — в относительных минимумах, которые отвечают значению потенциальной энергии  $V(\pi n) \equiv 2\eta\gamma$ ,  $n = \pm 1, \pm 3, \dots$ . Это соответствует тому, что межатомное расстояние рассматриваемой одноатомной цепочки в основном состоянии равно половине периода подложки. Таким образом, параметр  $\eta$  характеризует разность энергий двух минимумов.

Уравнение движения для  $n$ -го атома имеет вид

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} + K_2 (2\xi_n - \xi_{n+1} - \xi_{n-1}) + \gamma [\eta \sin(\pi n + \xi_n) + \sin(2\xi_n)] = 0. \quad (3)$$

В большинстве работ, использующих модель Френкеля — Конторовой, изучаются топологические солитонные решения уравнения (3) — кинки. Мы будем рассматривать малоамплитудные динамические солитоны, в которых каждый атом слабо отклоняется от своего положения равновесия. В этом случае можно разложить внешний потенциал (1) по малым смещениям  $\xi_n$  до первых нелинейных слагаемых. Такое разложение будет различным для атомов с четными и нечетными

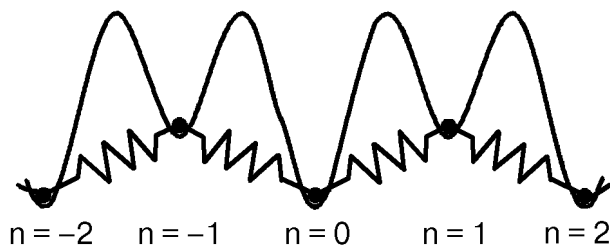


Рис. 1. Схематическое изображение расположения атомов в цепочке. Четные атомы находятся в абсолютных минимумах двухбарьерного потенциала (1), а нечетные — в относительных.

номерами. В результате получаем следующее динамическое уравнение для  $n$ -го атома:

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} + K_2 (2\xi_n - \xi_{n+1} - \xi_{n-1}) + \gamma [2 + \eta \cos(\pi n)] \xi_n + K_4 [(\xi_n - \xi_{n+1})^3 + (\xi_n - \xi_{n-1})^3] - \frac{8}{3} \gamma \xi_n^3 = 0, \quad (4)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Модуляция параметров системы предполагается малой ( $\eta \ll 1$ ) и не учитываются малые слагаемые, пропорциональные  $\eta \xi_n^3$ . Отличительной особенностью данного уравнения является наличие слагаемого, содержащего  $\cos(\pi n)$ , которое модулирует гармоническую часть внешнего потенциала системы. Такая модуляция приводит к тому, что общее решение линеаризованных уравнений нельзя искать в стандартном виде  $\xi_n \propto \exp(i\omega t - i\beta n)$ , оно должно содержать две волны, распространяющиеся с различными фазовыми скоростями [9]:

$$\xi_n = A_1 \exp i(\omega t - \beta n) + A_2 \exp i(\omega t - (\beta - \pi)n) + \text{с.с.} \quad (5)$$

Спектр линейных волн системы (см. рис. 2) определяется дисперсионным уравнением:

$$\omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 - \tilde{\omega}_0^4 \cos^2 \beta = 0, \quad (6)$$

где  $\omega_1^2 = (2K_2 + 2\gamma - \eta\gamma)/m$ ;  $\omega_2^2 = (2K_2 + 2\gamma + \eta\gamma)/m$ ;  $\tilde{\omega}_0^2 = 2K_2/m$  и  $\omega_0 = \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}/2$ . При заданной частоте  $\omega$  двум парциальным волнам из решения (5) соответствуют точки  $a_1$  и  $a_2$  на рис. 2. Как видно, эти две волны имеют одинаковые групповые скорости  $V = d\omega/d\beta$ , однако разные фазовые скорости.

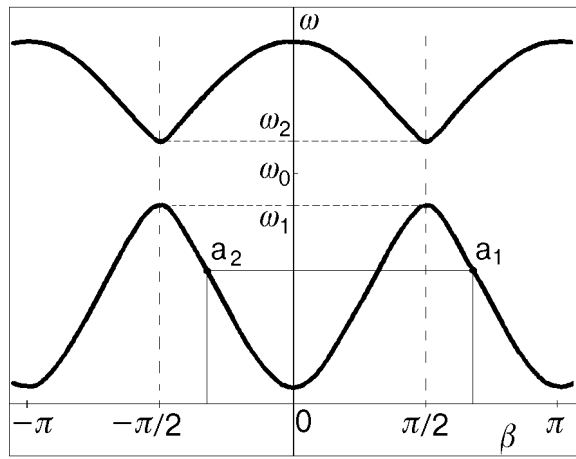


Рис. 2. Спектр линейных волн вида (5), описываемый характеристическим уравнением (6).

При  $\beta = \pm \beta_0 = \pm \pi/2$  спектр линейных волн имеет щель, ширина которой пропорциональна величине  $\eta$ :  $\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\eta\gamma/m$ . Возникновение данной щели обусловлено модуляцией параметров системы. В дальнейшем нас будут интересовать нелинейные возбуждения, значения параметров которых находятся внутри и около щели.

Амплитуда линейной волны произвольна. В случае нелинейной волны амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  в решении (5) также могут принимать различные значения, однако их отношение определяется частотой волны:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\sqrt{|1 - \omega^2/\omega_2^2|} \pm \sqrt{|1 - \omega^2/\omega_1^2|}}{\sqrt{|1 - \omega^2/\omega_2^2|} \mp \sqrt{|1 - \omega^2/\omega_1^2|}}, \quad (7)$$

где верхний (нижний) знак отвечает возбуждениям с частотами, лежащими на участках спектра, где увеличение модуля волнового вектора соответствует увеличению (уменьшению) частоты.

Ограничимся рассмотрением нелинейных волн с частотами  $\omega \sim \omega_1, \omega_2$  и волновыми числами  $\beta \approx \beta_0$  (т.е. значениями  $\beta = \beta_0 + \kappa$ , где  $\kappa \ll 1$ ). В этой области параметров спектр линейных волн (6) имеет квадратичную форму.

Будем искать решение системы нелинейных уравнений (4) в виде (5) с коэффициентами  $A_1$  и  $A_2$ , медленно зависящими от  $t$  и  $n$ :

$$\begin{aligned} \xi_n = & A_1(n, t) \exp i \left( \omega t - \frac{\pi}{2} n \right) + \\ & + A_2(n, t) \exp i \left( \omega t + \frac{\pi}{2} n \right) + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (8)$$

Нас будут интересовать малоамплитудные нелинейные решения с параметрами, лежащими вблизи щели спектра линейных волн. Условие малости амплитуд таких волн для закона дисперсии линейных волн (6) выполняется вблизи кривой  $\omega = \omega(k)$ . В дальнейшем будем полагать параметр  $\eta$  малым, что обеспечивает узость щели спектра линейных волн. Таким образом, условие малости амплитуд будет выполняться как внутри щели, так и в ее окрестности.

В длинноволновом пределе, когда  $A_i(n, t)$  — медленно меняющиеся функции номера  $n$ , заменим дискретный номер атомов  $n$  в  $A_i(n, t)$  на непрерывную координату  $x$  и используем разложение

$$A_i(x \pm 1, t) = A_i(x, t) \pm \frac{\partial A_i(x, t)}{\partial x} + O(\eta^2 A_i)$$

(как будет видно из дальнейшего,  $\partial A_i(x, t)/\partial x \sim \eta A_i$ ,  $\partial A_i(x, t)/\partial t \sim \omega_0 \eta A_i$ ).

В случае малого различия минимумов потенциальной энергии ( $\eta \ll 1$ ), когда  $\partial A_i/\partial t \ll \omega_1 A_i$ ,  $\omega_2 A_i$  и  $\partial A_i/\partial x \ll A_i$ , в щели и около щели спектра линейных волн при подстановке (8) в (4) в линейной части уравнения можно оставить только первые производные  $\partial A_i/\partial t$  и  $\partial A_i/\partial x$ . Кроме того, с учетом малости амплитуд осцилляций атомов ( $|K_4| |A_i|^2/K_2 \ll 1$ ,  $|A_i|^2 \ll 1$ ), в нелинейной части уравнения (4) при подстановке (8) все производные от амплитуд  $A_i$  можно опустить. Справедливость этих предположений проверяется в полученных решениях. Для  $A_1$  и  $A_2$  имеем систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} i \frac{2}{\omega_0} \frac{2(K_2 + \gamma)}{\eta\gamma} \frac{\partial A_1}{\partial t} + i \frac{2K_2}{\eta\gamma} \frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{2\delta}{\omega_0} \frac{2(K_2 + \gamma)}{\eta\gamma} A_1 - A_2 - \frac{3K_4}{\eta\gamma} \left[ (3p + 1) A_1 (|A_1|^2 + 2|A_2|^2) + 3(p - 1) A_2^2 A_1^* \right], \\ i \frac{2}{\omega_0} \frac{2(K_2 + \gamma)}{\eta\gamma} \frac{\partial A_2}{\partial t} - i \frac{2K_2}{\eta\gamma} \frac{\partial A_2}{\partial x} = \frac{2\delta}{\omega_0} \frac{2(K_2 + \gamma)}{\eta\gamma} A_2 - A_1 - \frac{3K_4}{\eta\gamma} \left[ (3p + 1) A_2 (|A_2|^2 + 2|A_1|^2) + 3(p - 1) A_1^2 A_2^* \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\omega_0^2 = 2(K_2 + \gamma)/m$  — частота, соответствующая середине щели спектра линейных волн;  $\delta = \omega - \omega_0$  — частота, отсчитанная от середины щели;  $p = [1 - (4\gamma/3K_4)]/3$  — параметр, характеризующий соотношение «внутренней» и «внешней» нелинейностей.

Как следует из системы (9), спектр линейных волн вида (5) в окрестности волнового числа  $\beta_0 = \pi/2$  выглядит следующим образом:

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{\omega_0 \eta \gamma}{4(K_2 + \gamma)} \sqrt{1 + (2K_2 \kappa / \eta \gamma)^2}. \quad (10)$$

Вводя перенормированные амплитуды  $\sqrt{12|K_4|/\eta \gamma} A_i = F_i$ , координату  $(\eta \gamma / (2K_2))x \rightarrow x$  и время  $[\omega_0 \eta \gamma / 4(K_2 + \gamma)]t \rightarrow t$ , получаем систему уравнений в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial F_1}{\partial t} + i \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \Omega F_1 - F_2 - \\ &- \frac{\sigma}{4} \left[ (3p + 1)F_1(|F_1|^2 + 2|F_2|^2) + 3(p - 1)F_2^2 F_1^* \right], \\ i \frac{\partial F_2}{\partial t} - i \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \Omega F_2 - F_1 - \\ &- \frac{\sigma}{4} \left[ (3p + 1)F_2(|F_2|^2 + 2|F_1|^2) + 3(p - 1)F_1^2 F_2^* \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\Omega = 4\delta(K_2 + \gamma)/(\omega_0 \eta \gamma)$  — безразмерное отклонение частоты от середины щели спектра линейных волн, а  $\sigma = \text{sgn}(K_4)$ .

В новых переменных спектр линейных волн (10) в системе координат, движущейся с групповой скоростью  $V = \partial\omega/\partial\kappa$ , т.е. для решений вида  $F_i \propto \exp(-i\kappa(x - Vt))$ , приобретает вид

$$\Omega_L = \frac{4(K_2 + \gamma)}{\eta \gamma} \pm \sqrt{1 - V^2}. \quad (12)$$

Полученная система дифференциальных уравнений (11) аналогична системе, описывающей динамику двухатомной цепочки [10].

### Анализ солитонных решений

Подробный качественный анализ системы вида (11) при произвольном значении параметра  $p$  проведен в работе [10]. Здесь приведем аналитические выражения для солитонных решений системы (11) в частном случае  $K_4 = 0$ , т.е. когда «внутренняя» нелинейность в цепочке отсутствует. При таком выборе константы  $K_4$  система (11) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial F_1}{\partial t} + i \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \\ &= \Omega F_1 - F_2 - \frac{1}{2} \left[ F_1(|F_1|^2 + 2|F_2|^2) + F_2^2 F_1^* \right], \\ i \frac{\partial F_2}{\partial t} - i \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \\ &= \Omega F_2 - F_1 - \frac{1}{2} \left[ F_2(|F_2|^2 + 2|F_1|^2) + F_1^2 F_2^* \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где  $F_i = \sqrt{8/\eta} A_i$ .

Будем полагать зависимость амплитуд  $F_i$  от координаты и времени в виде  $F_i(x, t) = F_i(x - Vt)$ , стандартном для движущихся со скоростью  $V$  солитонов огибающей. Введем новые вещественные переменные  $u_1, u_2, q$  и  $s$ :

$$\begin{aligned} F_1 &= u_1 \exp(iq + is), \\ F_2 &= u_2 \exp(iq - is), \end{aligned} \quad (14)$$

которые удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{du_1}{dz} = u_1 \sin(2s) + \beta(V) u_1^3 \sin(4s), \quad (15)$$

$$\frac{ds}{dz} = -v + \cos(2s) + \alpha(V) u_1^2 + \beta(V) u_1^2 \cos(4s), \quad (16)$$

$$\frac{dq}{dz} = -vV + \frac{V}{\sqrt{1 - V^2} (1 + V)} u_1^2, \quad (17)$$

$$u_2 = \sqrt{(1 - V)/(1 + V)} u_1, \quad (18)$$

$$\text{где } \alpha(V) = \frac{3 - V^2}{2\sqrt{1 - V^2} (1 + V)}; \quad z = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}};$$

$\beta(V) = \sqrt{(1 - V)/(1 + V)}/2$ , а параметр  $v(\Omega, V)$  определяется соотношением

$$v(\Omega, V) = \frac{\Omega}{\sqrt{1 - V^2}}. \quad (19)$$

Связь между амплитудами  $u_1, u_2$  вида (18) соответствует двухпараметрическим решениям системы (11). Вообще говоря, эта система допускает решения более общего вида, зависящие от трех параметров, но здесь мы такие решения рассматривать не будем. Обсуждению возможности существования трехпараметрических солитонов посвящена работа [11]. В случае двухпараметри-

ческих решений в качестве параметров удобно выбрать сдвиг частоты  $\Omega$  и скорость  $V$ .

Уравнения (15), (16) для  $u_1$  и  $s$  в системе (15)–(18) отделяются и представляют систему уравнений со следующим эффективным гамильтонианом:

$$H = (-v + \cos(2s)) u_1^2 + \frac{\alpha}{2} u_1^4 + \frac{\beta}{2} u_1^4 \cos(4s), \quad (20)$$

где переменные  $u_1^2$  и  $2s$  играют роль канонически сопряженных координаты и импульса, а координата  $z$  — эффективного «времени».

Удобно исследовать возможные решения системы (15), (16) на фазовой плоскости переменных  $(u_1, s)$ . В общем случае фазовый портрет симметричен относительно оси  $u_1 = 0$  и является периодическим по переменной  $s$  с периодом, равным  $\pi$ . Поэтому будем рассматривать его в области  $u_1 > 0, 0 < s < \pi$  (см. рис. 3). Вид фазового портрета рассматриваемой системы зависит от значения параметра  $v$ , являющегося функцией безразмерных скорости  $V$  и сдвига частоты  $\Omega$  (19).

При  $v < -1$ , т.е. когда частота нелинейного возбуждения меньше частот нижней ветви спектра линейных волн ( $\Omega < -\sqrt{1 - V^2}$ ), особых точек на фазовой плоскости  $(u_1, s)$  нет и солитонные решения в данной области частот отсутствуют. При частоте  $v = -1$  ( $\Omega = -\sqrt{1 - V^2}$ ) возникает особая точка с координатами  $u_1 = 0, s = \pi/2$ , которая расщепляется на два седла  $u_1 = 0, s = \pi/2 \pm \arccos(-v)/2$  и центр  $C$  с координатами  $u_1 = \sqrt{(v+1)(\alpha+\beta)}, s = \pi/2$  в области частот  $-1 < v < 1$  (см. рис. 3,а). Седла соединены сепаратрисами  $L$ , которые соответствуют движущимся щелевым солитонам. Фазовые портреты, изображенные на рис. 3,а,б, аналогичны фазовым портретам ангармонического

осциллятора в условиях параметрической накачки [12]. Близость этих систем обусловлена тем, что периодический по координате  $x$  коэффициент в эволюционных уравнениях играет роль периодического по времени коэффициента при параметрическом возбуждении.

На верхней ветви спектра линейных волн, т.е. при  $v = 1$  ( $\Omega = \sqrt{1 - V^2}$ ), происходит очередная бифуркация: каждое седло расщепляется на два, симметрично расположенных в областях  $u_1 > 0$  и  $u_1 < 0$ . Таким образом, в области частот  $1 < v < v_* = 1/(1 - V^2)$  на фазовой плоскости  $(u_1, s)$  существуют седла с координатами  $u_1 = \pm\sqrt{(v-1)(\alpha+\beta)}, s = 0, \pi$  и центры с координатами  $u_1 = \pm\sqrt{(v+1)(\alpha+\beta)}, s = \pi/2$  (см. рис. 3,б). Седла соединены сепаратрисами  $N$  и  $N'$ , которым соответствуют движущиеся околощелевые солитоны, в которых, в отличие от щелевых солитонов  $L$ , асимптотики на бесконечности ( $z \rightarrow \pm\infty$ ) не равны нулю. Сепаратриса  $N$  соответствует так называемому «светлому солитону на пьедестале», так как в нем амплитуда поля в нуле превосходит амплитуду на бесконечности. Сепаратриса  $N'$  соответствует «темному солитону ненулевого вакуума» (см. [12]).

Наконец, при частоте  $v = v_* = 1/(1 - V^2)$  происходит последняя бифуркация: центр  $u_1 = \sqrt{(v-1)(\alpha+\beta)}, s = \pi/2$  расщепляется на седло с теми же координатами и два новых центра с координатами  $u_1 = \sqrt{v}/(\alpha-\beta), s = \pi/2 \pm \arccos(v_*/v)/2$  (см. рис. 3,в). Теперь помимо сепаратрис  $N$  и  $N'$  возникают новые — сепаратрисы  $K$ . Таким образом, в области частот  $v > v_*$  существуют три типа движущихся околощелевых солитонов:  $N, N'$  и  $K$ .

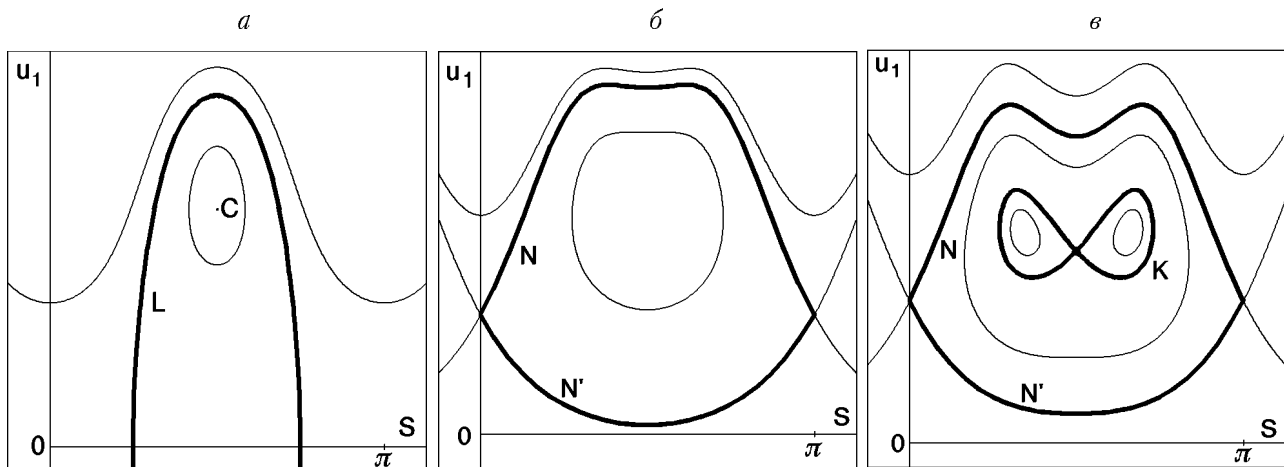


Рис. 3. Фазовые портреты системы (15), (16) при различных значениях частоты  $v$ :  $-1 < v < 1$  (а),  $1 < v < v_*$  (б),  $v > v_*$  (в).

Щелевые солитоны  $L$  и околосолевые солитоны  $N$ ,  $N'$  подробно изучены в [10]. Здесь рассмотрим околосолевые солитоны  $K$ . Аналитическое

выражение для этого типа солитонов имеет следующий вид:

$$u_1 = \left[ \frac{(1+V)\sqrt{1-V^2}(1+v)}{2-V^2} \right]^{1/2} \left\{ \frac{(1+v)(v-v_*) + v(v_*+1) \operatorname{ch}^2(\zeta)}{(v-1)(v-v_*) + v(v_*+1) \operatorname{ch}^2(\zeta) \pm 4\sqrt{v}(v-v_*) \operatorname{sh}(\zeta)} \right\}^{1/2},$$

$$s = \pi \pm \operatorname{arctg} \left[ \left( \frac{v(v_*+1)}{(v+1)(v-v_*)} \right)^{1/2} \operatorname{ch}(\zeta) \right],$$

$$q = -\frac{V(v+1)}{2-V^2} z \pm \frac{2V\sqrt{(v-v_*)(v+1)}}{(2-V^2)\sqrt{v_*}} \operatorname{arctg} \left[ c^{(1)} \left( \exp(-\zeta) \mp \sqrt{v_*(v+1)/v^2(v_*+1)} c^{(2)} \right) \right] \mp$$

$$\mp \frac{2V\sqrt{(v-v_*)(v+1)}}{(2-V^2)\sqrt{v_*}} \operatorname{arctg} \left[ c^{(2)} \left( \exp(-\zeta) \pm \sqrt{v_*(v+1)/v^2(v_*+1)} c^{(1)} \right) \right],$$

где  $\zeta = 2\sqrt{(v+1)(v-v_*)/(v_*+1)} z$ ;  $c^{(n)} = \sqrt{v/v_*} \times (1 - (-1)^n \sqrt{(v-v_*)/(v+1)})$ , различные знаки соответствуют различным сепаратрисным петлям.

Этот околосолевой солитон образован двумя нелинейными волнами с одинаковой частотой, распространяющимися в противоположных направлениях. Частота волн  $\omega$  и одно из двух их волновых чисел  $\beta_{1,2}$  полностью определяют параметры солитона: скорость  $V$  и сдвиг частоты  $\Omega$  в движущейся с солитоном системе координат:

$$\omega = \omega_0 + \frac{\omega_0 \eta \gamma}{4(K_2 + \gamma)} \times$$

$$\times \left[ \Omega + \frac{V^2}{(2-V^2)(1-V^2)} \left( \Omega + \sqrt{1-V^2} \right) \right],$$

$$\beta_{1,2} = \pm \beta_0 + \frac{\eta \gamma}{2K_2} \frac{V}{(2-V^2)(1-V^2)} \left( \Omega + \sqrt{1-V^2} \right).$$

В отличие от  $L$ -,  $N$ - и  $N'$ -солитонов, в  $K$ -солитонах фаза  $s$  имеет одинаковые асимптотики при  $z \rightarrow \pm \infty$ . Таким образом, сдвиг фазы составляющих солитон нелинейных волн при изменении координаты  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  определяется только асимптотиками фазы  $q$  и равен

$$\Delta = \mp \frac{4V\sqrt{(v-v_*)(v+1)}}{(2-V^2)\sqrt{v_*}} \times$$

$$\times \operatorname{arctg} \left[ c^{(1)} c^{(2)} \sqrt{v_*(v+1)/v^2(v_*+1)} \right]. \quad (22)$$

Профили полей  $u_1$  и  $u_2$  в  $K$ -солитоне существенно отличаются от таковых в  $L$ -,  $N$ - и  $N'$ -солитонах. На рис. 4 схематически изображена зависимость амплитуды  $u_1$  от координаты  $z$ , которая имеет нехарактерную для солитона несимметричную форму. Положения максимума и минимума амплитуды определяются соотношением

$$\zeta_0 = 2\sqrt{(v+1)(v-v_*)/(v_*+1)} z_0 =$$

$$= \operatorname{arcsch} \left[ -\frac{1}{\sqrt{v}} \left( 1 \pm \frac{v+1}{\sqrt{v_*+1}} \right) \right].$$

Результирующее поле  $\xi$  смещений атомов (см. (8)) в  $K$ -солитоне имеет вид локализованного возбуждения на фоне неубывающих на бесконечности нелинейных волн, его зависимость от координаты (номера атома) схематически изображена

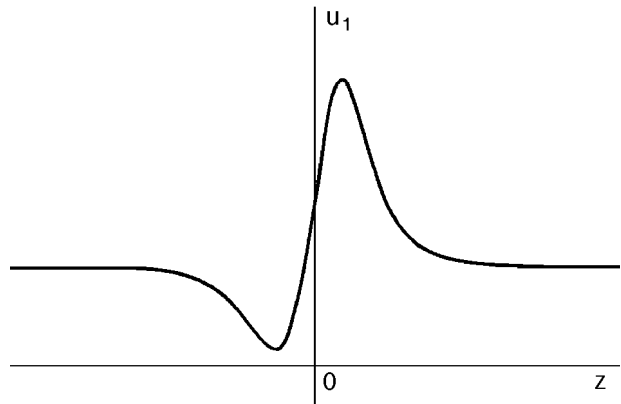


Рис. 4. Зависимость амплитуды  $u_1$  от координаты  $z$  в  $K$ -солитоне.

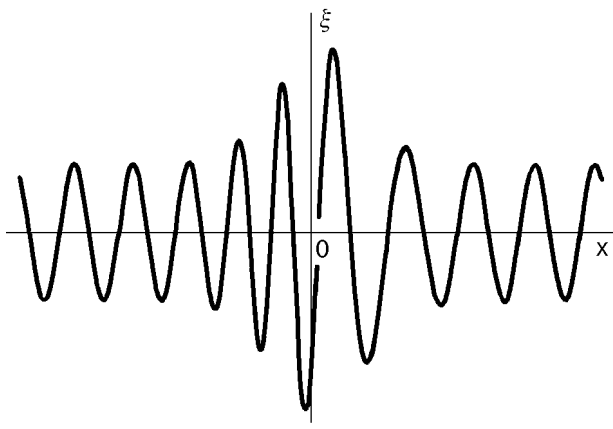


Рис. 5. Зависимость результирующего поля  $\xi$  смещений атомов в цепочке от координаты (номера атома).

на рис. 5. Максимум амплитуды в солитоне смещен относительно его центра, что обусловлено спецификой профилей полей  $u_1$  и  $u_2$ .

Область локализации  $K$ -солитона обратно пропорциональна величине  $(1 - V^2)$ . При стремлении скорости  $V$  к своему максимальному значению ( $|V| \rightarrow 1$ ) солитон делокализуется и в пределе переходит в периодическую нелинейную волну (так называемую «кноидальную» волну).

### Заключение

Изучена нелинейная динамика одноатомной цепочки во внешнем двухбарьерном потенциале. Показано, что данная система описывается динамическими уравнениями, аналогичными уравнениям динамики двухатомной цепочки. Изучена эволюция фазового портрета системы при изменении частоты нелинейного возбуждения и найдены явные выражения для солитонных решений в частном случае, когда взаимодействие между частицами предполагается линейным.

Проведенная аналогия между двумя различными модулированными упругими системами еще раз подтверждает сделанное авторами ранее [13] предположение о том, что динамика различных одномерных модулированных систем с кубичес-

кой нелинейностью может быть описана при помощи аналогичных дифференциальных уравнений, отличающихся лишь коэффициентами при линейных и нелинейных слагаемых.

Работа выполнена при частичной поддержке программы INTAS-99 (грант № 167) и программы МНОП (грант USU 082087).

1. Я. И. Френкель, Т. А. Конторова, *ЖЭТФ* **8**, 1340 (1938).
2. Дж. Хирт, И. Лоте, *Теория дислокаций*, Под ред. Э. М. Надгорного и Ю. А. Осипьяна, Атомиздат, Москва (1972).
3. О. М. Braun and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rep.* **306**, 1 (1998).
4. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Теория динамических краудионов. Радиационные и другие эффекты в твердых телах*, Тбилиси, 15–28 октября 1973 г.: Матер. школы по радиационным и другим дефектам в твердых телах, Тбилиси (1974), т. 1, с. 186.
5. В. Д. Нацик, Е. И. Назаренко, *ФНТ* **26**, 283 (2000).
6. В. Д. Нацик, С. Н. Смирнов, Е. И. Назаренко, *ФНТ* **27**, 316 (2001).
7. М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, Москва (1987).
8. И. Ф. Люксутов, А. Г. Наумовец, В. Л. Покровский, *Двумерные кристаллы*, Наукова думка, Киев (1988).
9. П. С. Ланда, В. Ф. Марченко, *УФН* **161**, 201 (1991).
10. А. С. Ковалев, О. В. Усатенко, А. В. Горбач, *ФТТ, в печати*.
11. A. S. Kovalev, O. V. Usatenko, and A. V. Gorbach, submitted to *Phys. Rev. E*.
12. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989).
13. A. S. Kovalev, O. V. Usatenko, and A. V. Gorbach, *Phys. Rev.* **E60**, 2309 (1999).

### The dynamics of nonlinear excitations in the Frenkel–Kontorova model with a two-barrier potential

A. V. Gorbach, A. S. Kovalev, and O. V. Usatenko

Nonlinear elastic chain with a two-barrier periodic substrate potential (the generalized Frenkel–Kontorova model) is considered. Low-amplitude dynamical localized excitations with the parameters lying in the gap and near the gap of the linear wave spectrum — gap and near-gap solitons — are studied.