

Нелинейные колебания намагниченности в малых цилиндрических ферромагнитных частицах

Б. А. Иванов^{1,2}, И. А. Ястремский²

¹ *Институт магнетизма НАН Украины, пр. Вернадского, 36-б, г. Киев, 03142, Украина*
E-mail: bivanov@i.com.ua

² *Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, пр. Глушкова, 2, г. Киев, 03127, Украина*

Статья поступила в редакцию 5 февраля 2001 г.

Рассмотрены радиально-симметричные нелинейные колебания намагниченности в малых цилиндрических частицах ферромагнетика для свободных и фиксированных граничных условий на боковой поверхности частиц. Оказалось, что даже для нелинейных колебаний малой амплитуды зависимость частоты от амплитуды колебаний довольно сложная и может включать ряд бифуркаций. Характер колебаний существенно зависит от граничных условий, например, для свободных граничных условий существуют бифуркации решений, отсутствующие для фиксированных граничных условий. Обсуждены возможности обобщения полученных результатов на случай колебаний в цилиндре с более сложной угловой зависимостью и радиально-симметричных колебаний в сферической частице.

Розглянуто радіально-симетричні нелінійні коливання намагніченості в малих циліндричних частинках феромагнетика для вільних і фіксованих граничних умов на боковій поверхні частинок. Виявилось, що навіть для нелінійних коливань малої амплітуди залежність частоти від амплітуди коливань досить складна і може включати ряд біфуркацій. Характер коливань суттєво залежить від граничних умов, наприклад, для вільних граничних умов існують біфуркації рішень, які відсутні для фіксованих граничних умов. Обговорено можливості узагальнення одержаних результатів на випадки коливань в циліндрі з більш складною кутковою залежністю і радіально-симетричних коливань у сферичній частинці.

Введение

В последнее десятилетие благодаря технологии напыления и литографии стало возможным создание нанометровых периодических магнитных сверхрешеток различных типов — как одномерных (например, многослойных магнитных пленок), так и двумерных, среди которых особенно популярны решетки так называемых магнитных точек [1,2]. Магнитные точки представляют собой частицы в форме кругового [1] или эллиптического [2] цилиндров, или прямоугольной призмы, изготовленные из магнитномягких ферромагнетиков (ФМ), таких как Co, Fe, FeNi и т.д., расположенные на немагнитной подложке. Решетки магнитных точек важны с практической точки зрения (высокоплотная магнитная запись) и интересны как принципиально новые объекты фундаментальной физики магнетизма. Действительно, хотя физические свойства материала внутри одной частицы (магнитной точки) размерами по-

рядка сотен нанометров близки к свойствам массивного ФМ, однако поведение сверхрешеток таких точек при учете слабости их взаимодействия [3] существенно отличается от поведения как массивных ФМ, так и стандартных сплошных тонких магнитных пленок.

Особые свойства таких материалов должны проявляться в резонансных экспериментах. Исследования, проведенные на длинных, аксиально намагниченных проволоках ФМ [4] и на решетках магнитных точек [5,6], показали, что спектр спиновых волн (СВ) в таких системах дискретный, что является прямым следствием граничных условий на боковой поверхности частиц. Такой же эффект обсуждался для нанометровых ферромагнитных частиц в форме цилиндра [3].

Во всех указанных выше работах исследовались линейные СВ. Известно, что учет нелинейности приводит к ряду эффектов, таких, как параметрическое возбуждение магнонов [7,8], за-

висимость частоты от амплитуды колебаний, возможные бифуркации, различные неустойчивости и т.д. Ясно, что эти эффекты для сверхрешеток могут сильно отличаться от наблюдаемых для массивных образцов или сплошных тонких магнитных пленок. При этом основой для исследования динамики намагниченности в таком ансамбле является знание свойств одной частицы, поскольку если межчастичное расстояние несколько больше, чем размер частиц, то можно пренебречь магнитостатическим взаимодействием между ними [3].

Настоящая работа посвящена исследованию нелинейных спиновых волн (НСВ) в частице легкоосного ФМ, имеющей форму цилиндра. Показано, что даже в приближении нелинейных волн малой амплитуды картина нелинейных мод весьма сложная и может включать ряд бифуркаций. Картина НСВ существенно зависит от характера граничных условий. Обсуждены обобщения задачи на случай сферических частиц.

1. Модель и постановка задачи

Рассмотрим нелинейные спиновые волны в частице легкоосного ФМ, имеющей форму цилиндра радиусом L_0 и высотой h , предполагая, что $L_0 \gg h$. Как правило, именно такая ситуация характерна для реальных сверхрешеток. Легкая ось ФМ перпендикулярна основанию цилиндра. Макроскопическая динамика ФМ описывается классическим векторным параметром порядка, в качестве которого можно выбрать единичный вектор $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$, где \mathbf{M} — намагниченность ФМ; M_0 — намагниченность насыщения. Вектор \mathbf{m} удобно записать в угловых переменных, $\mathbf{m} = (\sin \theta \cos \varphi; \sin \theta \sin \varphi; \cos \theta)$. Плотность энергии ФМ запишем в виде [9, 10]

$$W = \frac{A}{2} \{ (\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2 \} - \frac{1}{2} K \cos^2 \theta - \frac{1}{2} (\mathbf{M} \mathbf{H}^{(m)}), \quad (1)$$

где A — обменная постоянная; K — константа анизотропии; $\mathbf{H}^{(m)}$ — магнитостатическое поле. Использована цилиндрическая система координат (r, χ, z) , где r, χ — полярные координаты в плоскости основания цилиндра, ось Oz параллельна оси цилиндра. Известно, что для неэллиптических образцов основное состояние намагниченности неоднородно. Причиной этого является то, что магнитостатическое поле $\mathbf{H}^{(m)}$ — сложный функционал от \mathbf{M} . Однако в случае, когда $L_0 \gg h$, возможны два существенных упрощения. Во-первых, при выполнении этого неравенства возможен переход к локальной зависимости

магнитостатического поля от \mathbf{M} , $\mathbf{H}^{(m)} = -4\pi M_z \mathbf{e}_z$, и учет диполь-дипольного взаимодействия сводится к переопределению константы анизотропии, $K \rightarrow K^{(m)} = K - 2\pi M_0^2$. (При $K < 2\pi M_0^2$ ФМ превращается в легкоплоскостной, но мы ограничимся ФМ с перпендикулярной анизотропией.) Во-вторых, хотя возле боковой поверхности цилиндра $\mathbf{H}^{(m)}$ все же неоднородно, эта неоднородность сосредоточена в области порядка h , и соответствующие эффекты пренебрежимо малы. Поэтому можно считать, что намагниченность в основном состоянии однородна и направлена вдоль легкой оси ФМ. В цилиндрической геометрии на фоне однородного основного состояния могут существовать как собственные моды с неоднородностью вдоль оси Oz , так и моды, характеризующиеся неоднородностью в плоскости цилиндра. В первом случае ($\mathbf{m} = \mathbf{m}(z)$) ситуация такая же, как для нелинейных мод в тонких пластинах ФМ, и специфические эффекты двумерности отсутствуют. Поэтому рассмотрим такие собственные моды, в которых \mathbf{m} не зависит от z . Сделанные выше приближения качественно не изменяют характер нелинейных мод, но существенно упрощают анализ и делают результаты более прозрачными и ясными.

Динамика ФМ описывается уравнением Ландау—Лифшица, которое для энергии вида (1) может быть записано в виде

$$r_v^2 \nabla^2 \theta - [1 + r_v^2 (\nabla \varphi)^2] \sin \theta \cos \theta = - \frac{\sin \theta}{\omega_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (2)$$

$$r_v^2 \operatorname{div} (\sin^2 \theta \nabla \varphi) = \frac{\sin \theta}{\omega_0} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (3)$$

где $r_v = \sqrt{A/K^{(m)}} \gg a$ — характерная магнитная длина, a — постоянная решетки; $\omega_0 = (2\mu_B K^{(m)}/\hbar) M_0$ — частота однородной прецессии намагниченности в линейной теории.

Система уравнений (2), (3) имеет дискретный набор классов решений, характеризующихся различной угловой зависимостью, эти классы определяются формулами

$$\theta = \theta(x), \quad \varphi = \omega t + q\chi + \varphi_0, \quad (4)$$

где $x = r/r_v$; φ_0 — произвольная фаза; $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (см. [10]). При выборе решения в виде (4) уравнение (3) удовлетворяется тождественно, и для функции $\theta(x)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение. В дальнейшем будет показано, что для частицы до-

статочны больших размеров эффекты нелинейности проявляются уже при достаточно малых амплитудах отклонения намагниченности от легкой оси ФМ, когда $\theta \ll 1$, при этом для частот ω выполняется условие $|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0$. Ограничимся рассмотрением таких малоамплитудных НСВ. Разложим функции в уравнении (2) в ряд по степеням θ и ограничимся членами порядка θ^3 , $(1 - \omega/\omega_0)\theta$, $q^2/x^2\theta$. В результате получаем

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} - \frac{q^2}{x^2} \theta - \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \theta + \frac{1}{2} \theta^3 = 0. \quad (5)$$

При исследовании уравнения (5) следует различать случаи $\omega > \omega_0$ и $\omega < \omega_0$.

Для случая $\omega < \omega_0$, делая обычную замену

$$\theta(x) = \sqrt{2\varepsilon} f(\xi), \quad \varepsilon = (1 - \omega/\omega_0)^{1/2}, \quad \xi = \varepsilon x, \quad (6)$$

получаем для функции $f(\xi)$ уравнение с кубической нелинейностью

$$\frac{d^2f}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{df}{d\xi} - \frac{q^2}{\xi^2} f - f + f^3 = 0, \quad (7)$$

широко обсуждаемое в различных физических приложениях. В частности, это уравнение используется для описания самофокусировки оптических пучков [11], а при $q = 0$ и $q = 1$ описывает двумерные солитоны в ФМ [12, 13].

Для $\omega > \omega_0$ сделаем аналогичную замену

$$\theta(x) = \sqrt{2\varepsilon} g(\xi), \quad \varepsilon = (\omega/\omega_0 - 1)^{1/2}, \quad \text{где } \xi = \varepsilon x. \quad (8)$$

Функция $g(\xi)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2g}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dg}{d\xi} - \frac{q^2}{\xi^2} g + g + g^3 = 0. \quad (9)$$

Таким образом, для обоих случаев ($\omega > \omega_0$ и $\omega < \omega_0$) мы получили универсальные дифференциальные уравнения, которые не зависят от ω , что существенно упрощает анализ. Когда $\xi \rightarrow 0$, несингулярные в нуле решения уравнений (7) и (9) имеют одинаковое поведение, $g = g_0 \xi^q/q!$, $f = f_0 \xi^q/q!$, однако на больших расстояниях характер решений существенно отличается. Его легко установить при анализе соответствующих уравнений на фазовой плоскости [10].

Уравнение для $g(\xi)$, независимо от выбора константы g_0 , имеет при больших ξ только осциллирующие решения

$$g(\xi) \rightarrow [C_{1,q} \sin \xi + C_{2,q} \cos \xi]/\sqrt{\xi} \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty,$$

величины констант $C_{1,q}$, $C_{2,q}$ определяются поведением решения в нуле, т.е. величиной g_0 .

Функция $f(\xi)$ ведет себя иначе. Для всех значений f_0 при различных q , за исключением определенного счетного набора $f_0 = F_m^{(q)}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, решения при $\xi \rightarrow \infty$ также осциллируют, но вокруг двух различных конечных значений $f = \pm 1$, конкретно,

$$f(\xi) \rightarrow 1 + [B_{1,q} \sin \xi + B_{2,q} \cos \xi]/\sqrt{\xi}$$

или

$$f(\xi) \rightarrow -1 - [D_{1,q} \sin \xi + D_{2,q} \cos \xi]/\sqrt{\xi}.$$

Решения с этими двумя различными асимптотиками разделены солитонным решением с экспоненциальным стремлением $f(\xi)$ к нулю при $\xi \rightarrow \infty$:

$$f(\xi) \rightarrow (\alpha_q/\sqrt{\xi}) \exp(-\beta_q \xi).$$

Солитонные решения образуют счетный набор и получаются при выборе одного из указанных выше значений $f_0 = F_m^{(q)}$ в качестве условия при $\xi = 0$. Характерные значения F_m для восьми значений m и $q = 0, 1$ приведены в табл. 1. Минимальное из этих значений $F_1^{(q)}$ соответствует солитону без узлов, в котором $f(\xi)$ не обращается в нуль ни при каких конечных значениях ξ . Остальные $F_m^{(q)}$ с $m \neq 1$ определяют солитоны с $(m-1)$ узлом. Солитонные решения для любого q и m могут быть получены численно методом стрельбы [10].

Таблица 1

Характерные значения F_m

m	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_m^{(q=0)}$	2,2	3,33	4,14	4,82	5,42	5,95	6,44	6,9
$F_m^{(q=1)}$	1,25	2,43	3,58	4,72	5,88	7,03	8,19	9,33

2. Формирование нелинейных мод для частицы конечных размеров

При дальнейшем анализе учтем конечные размеры частицы. Построим решения, которые удовлетворяют заданным граничным условиям на поверхности частицы, т.е. при $r = L_0$. В терминах безразмерных переменных x или ξ граничные условия с учетом (6) и (8) берутся при значениях

$x = L = L_0/r_v$ или $\xi = |(\omega/\omega_0 - 1)|^{1/2} L_0/r_v$ соответственно. Граничные условия для намагниченности при различных условиях на поверхности цилиндра можно записать следующим образом: $a\theta + b(\mathbf{n}\partial\theta/\partial\mathbf{r}) = 0$, \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности [7,9]. Рассмотрим детально два предельных случая: $a \neq 0, b = 0$ и $a = 0, b \neq 0$, что соответствует фиксированным и свободным магнитным моментам на поверхности. Обобщение на случай произвольного соотношения a и b не столь простое, и мы обсудим его в заключительном разделе. Таким образом, задача состоит в том, чтобы исследовать зависимость частоты нелинейной моды ω от амплитуды колебаний намагниченности при различных типах угловых зависимостей решения (различных q) для этих двух граничных условий.

Для линейной задачи эта проблема решается просто — решение уравнения представляет собой функцию Бесселя (с индексом q) $J_q(kr)$. Собственные значения волнового числа k определяются условиями $k_{n,q} L_0 = j_{n,q}$ или $k_{n,q} L_0 = j'_{n,q}$, где $j_{n,q}$ — n -й корень функции Бесселя, $j'_{n,q}$ — n -й корень ее производной для фиксированных или свободных условий соответственно. Связь $\omega_{n,q}$ и $k_{n,q}$ определяется линейным законом дисперсии магновов $\omega_{n,q} = \omega_0[1 + (r_v k_{n,q})^2]$.

Для нелинейной задачи этот метод не подходит, линейный закон дисперсии не справедлив, и связь $\omega_{n,q}$ с размером частицы и амплитудой волны надо искать из решения уравнения для $\theta(r)$, коэффициенты которого зависят от ω . Переход к универсальным уравнениям для $f(\xi)$ и $g(\xi)$ упрощает анализ, хотя не настолько, как в линейном случае, так как решения универсальных уравнений все же зависят от амплитуды волны. Чтобы проанализировать нелинейные моды для некоторого конкретного q , достаточно построить два семейства решений для $f(\xi)$ и $g(\xi)$ с различными начальными условиями

$$g(\xi \rightarrow 0) \rightarrow g_0 \xi^q/q!, \quad f(\xi \rightarrow 0) \rightarrow f_0 \xi^q/q!$$

и найти поведение характерных точек (нулей функций и их производных) как функций начальных значений g_0 или f_0 соответственно.

Обозначим $\xi_{n,q}(g_0)$ как n -й корень функции $g(\xi)$ с заданным начальным условием $g(\xi \rightarrow 0) \rightarrow g_0 \xi^q/q!$, а $\xi'_{n,q}(g_0)$ как n -й корень производной $dg(\xi)/d\xi$. Аналогично для анализа решений с $\omega < \omega_0$ введем обозначения $\xi_{n,q}(f_0)$ и $\xi'_{n,q}(f_0)$, которые определяют n -е корни f и $df/d\xi$. Начнем для определенности со случая фиксированных граничных условий. Тогда дифференцируя соотношение (8) q раз по переменной x и

используя соотношение $L\sqrt{\omega/\omega_0 - 1} = \xi_n(g_0)$, получаем систему алгебраических уравнений для нахождения $\omega = \omega_n [d^q\theta/dx^q(x=0), L]$ при $\omega > \omega_0$, где $d^0\theta/dx^0(x=0) = \theta(0)$. Необходимость дифференцирования вызвана тем, что для конкретного значения q соответствующие значения

$$g(0) = 0, \quad d^1g(0)/dx^1 = 0, \quad d^2g(0)/dx^2 = 0, \dots$$

$$d^{q-1}g(0)/dx^{q-1} = 0.$$

Это в равной степени относится и к функции $f(\xi)$. При $\omega < \omega_0$ следует использовать (7) и соотношение $L\sqrt{1 - \omega/\omega_0} = \xi_n(f_0)$. Эти системы для случая $q = 0$, который рассматривается ниже, удобно переписать в виде (индекс $q = 0$ для сокращения формул в дальнейшем не пишем)

$$\theta(0) = \frac{\sqrt{2}}{L} g_0 \xi_n(g_0), \quad \frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \left(\frac{\xi_n(g_0)}{L}\right)^2, \quad \omega > \omega_0; \quad (10)$$

$$\theta(0) = \frac{\sqrt{2}}{L} f_0 \xi_n(f_0), \quad \frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \left(\frac{\xi_n(f_0)}{L}\right)^2, \quad \omega < \omega_0. \quad (11)$$

Система уравнений для свободных граничных условий имеет такой же вид, но $\xi_n(g_0)$ и $\xi_n(f_0)$ следует заменить на $\xi'_n(g_0)$ и $\xi'_n(f_0)$.

Таким образом, зависимость $\omega = \omega_n[\theta(0), L]$ задана параметрически с помощью уравнений (10) для $\omega > \omega_0$ и уравнений (11) для $\omega < \omega_0$, где в роли вспомогательных параметров выступают g_0 и f_0 соответственно. Чтобы получить искомую зависимость $\omega = \omega_n[\theta(0), L]$, нужно решить уравнение (9) при $\omega > \omega_0$ и уравнение (7) при $\omega < \omega_0$ с различными начальными значениями g_0 и f_0 (при $q = 0$) и построить зависимости $\xi_n(g_0)$ и $\xi_n(f_0)$ для фиксированных граничных условий или $\xi'_n(g_0)$ и $\xi'_n(f_0)$ для свободных граничных условий.

Используя эти численные данные, можно для каждого значения реальной амплитуды колебаний намагниченности $\theta(0)$ и размера системы L найти набор частот, которые ей отвечают. Применим этот подход для конкретных примеров.

3. Фиксированные граничные условия

Для фиксированных граничных условий ($b = 0$) НСВ определяются поведением корней функции $g(\xi)$ (при $\omega > \omega_0$) и $f(\xi)$ (при $\omega < \omega_0$). Численный расчет показал, что при любом g_0 функция $g(\xi)$ осциллирует с уменьшающейся амплитудой. Ко-

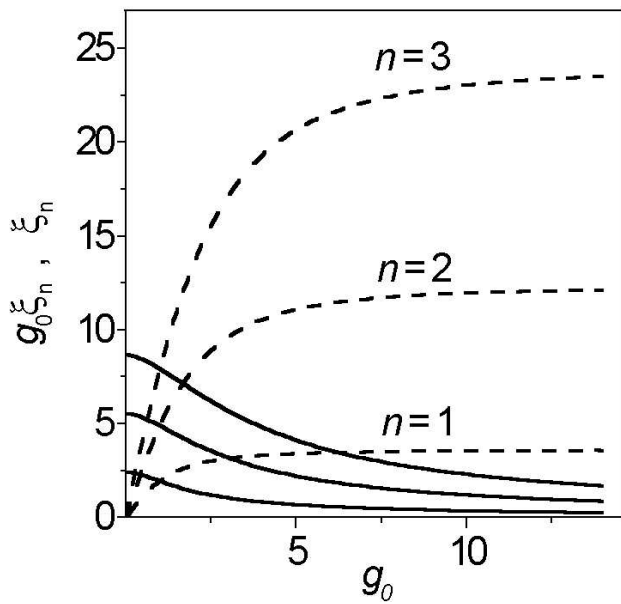


Рис. 1. Зависимости $\xi_n(g_0)$ (—) и $g_0 \xi_n(g_0)$ (---) для различных значений n .

гда амплитуда решения мала ($g_0 \rightarrow 0$), функция $g(\xi)$ пропорциональна функции Бесселя нулевого порядка $J_0(\xi)$, а ее корни $\xi_n(g_0)$ с высокой степенью точности совпадают с корнями $j_{0,n}$ функции $J_0(\xi)$. Зависимости n -го корня $\xi_n(g_0)$ от g_0 при малых g_0 приведены на рис. 1. (Необходимо напомнить, что, как следует из уравнений (10), (11), выбором достаточно большого L можно даже при больших g_0 сделать $\theta(0)$ как угодно малым, а ω/ω_0 как угодно близким к 1, поэтому наш подход остается справедливым.) Видно, что $\xi_n(g_0)$ — монотонно спадающие функции. На рис. 1 приведены графики функций $g_0 \xi_n(g_0)$, которые входят в уравнение (10) и важны для расчета частот. При $g_0 \rightarrow 0$ функция $g_0 \xi_n(g_0) \rightarrow 0$. Если же g_0 достаточно велико, то $g_0 \xi_n(g_0)$ выходит на постоянное значение X_n , значения X_n для первых восьми n приведены в табл. 2.

Таблица 2

Характерные значения X_n для больших g_0

n	1	2	3	4	5	6	7	8
X_n	3,5	12,2	24,1	38,1	54,2	72,1	91,6	112,6
X'_n	7,2	17,6	30,6	45,8	62,8	81,6	101,9	123,6

Видно, что когда $\theta(0) \rightarrow 0$ ($g_0 \rightarrow 0$), $\omega/\omega_0 = 1 + (j_{0,n}/L)^2$ и $d\omega/d\theta = 0$, что находится в согласии с выводами линейной теории СВ. При возрастании $\theta(0)$ частота колебаний монотонно уменьшается, и при $\theta(0) = \sqrt{2} X_n/L$ ее значение становится равным ω_0 .

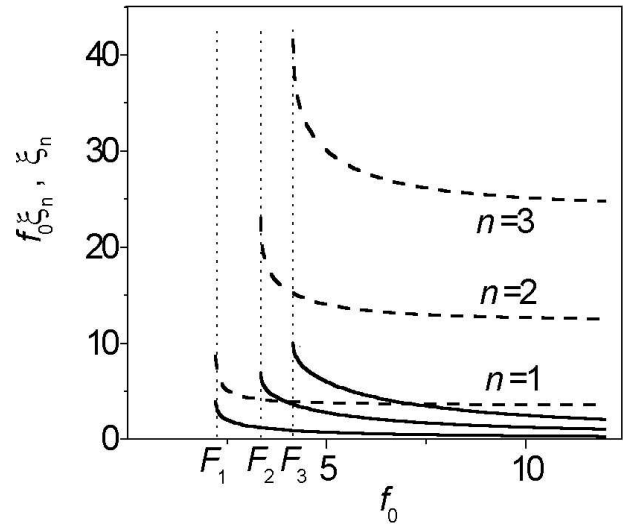


Рис. 2. Зависимости $\xi_n(f_0)$ (—) и $f_0 \xi_n(f_0)$ (---) для различных значений n .

Перейдем в область $\omega < \omega_0$ и рассмотрим функцию $f(\xi)$. При достаточно малых f_0 ($f_0 < F_1$) функция $f(\xi)$ не имеет корней. Для $f_0 = F_1$ этот корень возникает при $\xi \rightarrow \infty$, что соответствует солитонному решению. При $F_1 \leq f_0 < F_2$ функция $f(\xi)$ имеет один корень, при $F_2 \leq f_0 < F_3$ — два корня и т.д. В общем случае $f(\xi)$ имеет m корней, если $F_m \leq f_0 < F_{m+1}$, где $m = 1, 2, \dots, \infty$; при этом $\xi_n(F_m) = \infty$, если $m \leq n$. Графики $\xi_n(f_0)$ и $f_0 \xi_n(f_0)$ приведены на рис. 2. Видно, что $f_0 \xi_n(f_0)$ является монотонно спадающей функцией. Когда $f_0 \rightarrow F_m + 0$, $F_m \xi_n(F_m) \rightarrow \infty$. При f_0 достаточно большом, так же, как и в случае $g_0 \xi_n(g_0)$, $f_0 \xi_n(f_0)$ выходит на константу, численные значения которой с высокой степенью точности совпадают с X_n . Используя (11), для значений $f_0 \approx F_m$ можно приближенно записать $\theta(0) = (\sqrt{2}/L) F_n \xi_n(f_0)$. Выражая отсюда $\xi_n(f_0)$ и подставляя в (11), можно получить асимптотики для $\omega = \omega_n(\theta(0), L)$, а именно, $\omega = \omega_0 [1 - 0,5(\theta(0)/F_n)^2]$. Тут интересно подчеркнуть две особенности. Во-первых, выражение для асимптотик не зависит явно от размера системы. В данном случае L проявляет себя следующим образом: чем больше L , тем при меньших амплитудах $\theta(0)$ ω стремится к своим асимптотикам. Во-вторых, выражение для асимптотик не зависит от конкретного вида расходимостей в точках $f_0 = F_m$. Это справедливо и для свободных граничных условий.

Частоты НСВ $\omega = \omega_n[\theta(0), L]$ для $L = 100$, найденные из этих данных, приведены на рис. 3. Видно, что при возрастании $\theta(0)$ частота колебаний уменьшается. При достаточно большом $\theta(0)$ значение ω_n асимптотически стремится к $\omega_0 [1 - 0,5(\theta(0)/F_n)^2]$. Поскольку величины F_m

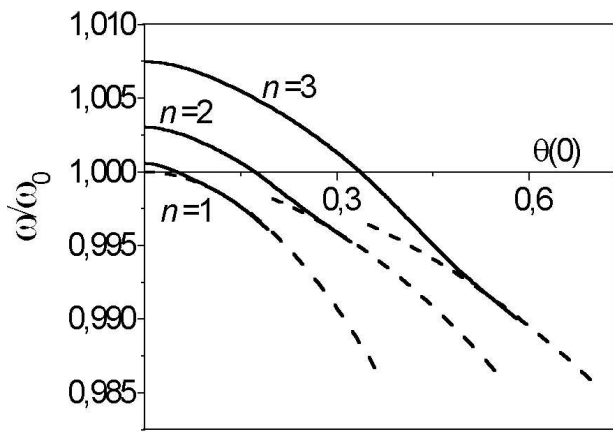


Рис. 3. Зависимости $\omega = \omega_n[\theta(0), L]$ для фиксированных граничных условий и $L_0 = 100 r_v$ — сплошные линии; асимптотики $\omega/\omega_0 = 1 - 0,5[\theta(0)/F_n]^2$ — штриховые линии.

достаточно велики (см. табл. 1), этот режим реализуется при $\theta(0) \ll 1$ и $\omega/\omega_0 \approx 1$, поэтому применимость нашего подхода сохраняется.

4. Свободные граничные условия

Случай свободных граничных условий более интересен, так как при этом помимо зависимости частоты от амплитуды колебаний проявляется еще одно свойство, присущее нелинейным системам, а именно, бифуркации решений. Однако бифуркации возникают при $\omega < \omega_0$, а в случае $\omega > \omega_0$ картина похожа на ту, которая наблюдается при фиксированных граничных условиях. Корни производной решения $\xi'_n(g_0)$ определены для всех g_0 , и когда $g_0 \rightarrow 0$, $\xi'_n(g_0)$ совпадает с $j'_{0,n}$ (n -ми корнями $dJ_0/d\xi$). Зависимости $\xi'_n(g_0)$ и $g_0 \xi'_n(g_0)$ от g_0 качественно похожи на соответствующие зависимости $\xi_n(g_0)$ и $g_0 \xi_n(g_0)$, приведенные на рис. 1. Как и для $g_0 \xi_n(g_0)$, при $g_0 \rightarrow \infty$ произведение $g_0 \xi'_n(g_0)$ стремится к константе X'_n , численные значения этих констант приведены в табл. 2. Как и для фиксированных граничных условий, при $\theta(0) \rightarrow 0$ частота $\omega/\omega_0 = 1 + (j'_{0,n}/L)^2$ и $d\omega/d\theta = 0$. При возрастании $\theta(0)$ частота ω монотонно уменьшается и при $\theta(0) = \sqrt{2} X'_n / L$ совпадает с границей непрерывного спектра ($\omega = \omega_0$).

Если же $\omega < \omega_0$, то картина качественно изменяется. Зависимости $\xi'_n(f_0)$ приведены на рис. 4, а. Видно, что $\xi'_n(f_0)$ имеет $(n + 1)$ расхождений. Первая наблюдается, когда $f_0 \rightarrow 0$. Эта характерная особенность (нелинейный эффект при малых f_0) обусловлена тем, что уравнение (7) является существенно нелинейным. Даже если $f_0 \rightarrow 0$, его

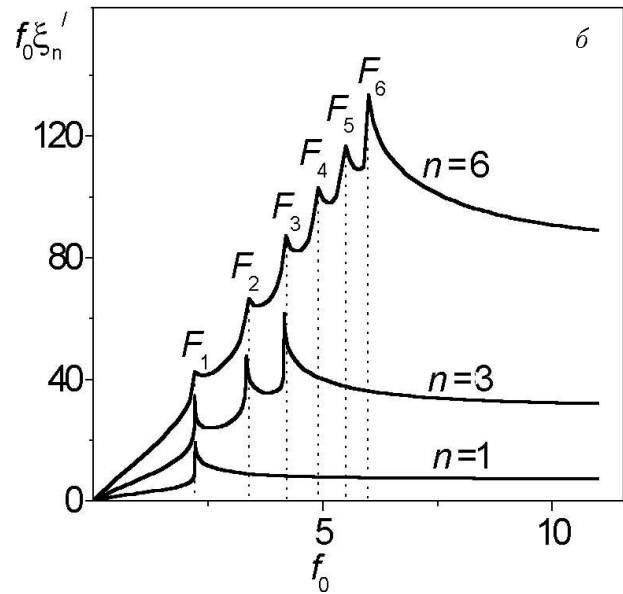
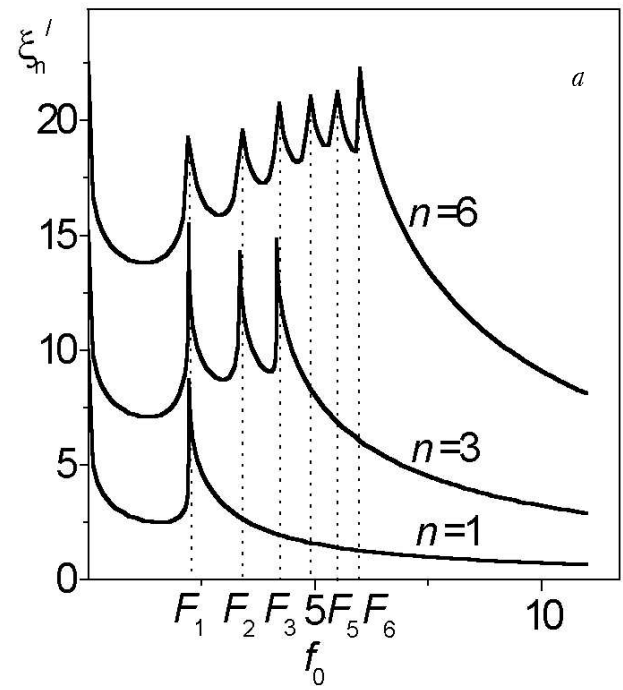


Рис. 4. Зависимости $\xi'_n(f_0)$ (а) и $f_0 \xi'_n(f_0)$ (б) для различных значений n .

решение $f(\xi)$ при малых f_0 начинает возрастать и растет до тех пор, пока не становится существенным нелинейный член f^3 . Остальные расхождении происходят при $f_0 = F_m$, характерные значения F_m обсуждались выше и приведены в табл. 1. Графики $f_0 \xi'_n(f_0)$ приведены на рис. 4, б. Видно, что при $f_0 \rightarrow 0$ значение $f_0 \xi'_n(f_0) \rightarrow 0$. Когда же $f_0 \rightarrow \infty$, значения $f_0 \xi'_n(f_0)$ стремятся к тем же постоянным X'_n , что возникали при $\omega > \omega_0$. Функция $f_0 \xi'_n(f_0)$ имеет n расхождений.

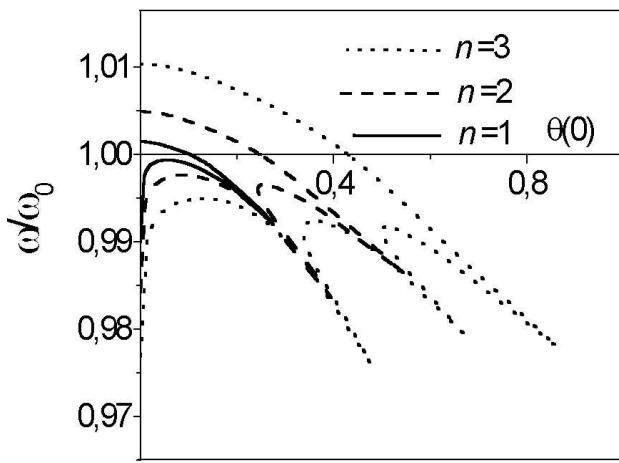


Рис. 5. Зависимости $\omega = \omega_n[\theta(0), L]$ для свободных граничных условий и $L_0 = 100 r_v$.

Именно эти особенности в поведении функций $\xi'_n(f_0)$ и $f_0 \xi'_n(f_0)$ при $f_0 = 0$, F_1 , F_2 и т.д. приводят к появлению бифуркаций. Графики $\omega = \omega_n[\theta(0), L]$ приведены на рис. 5. Только для НСВ с $n = 1$ бифуркации отсутствуют. Когда $\theta(0) < \sqrt{2} X'_n / L$, при $\omega > \omega_0$ имеем верхнюю ветвь колебаний, которая рассмотрена выше, и нижнюю при $\omega < \omega_0$. Различие этих мод наиболее отчетливо проявляется при $\theta(0) \rightarrow 0$, когда верхней ветви отвечают решения $g(\xi)$, близкие к линейным, а нижней ветви соответствуют существенно нелинейные решения $f(\xi)$, в которых $f(\xi \approx 1) \gg f(0)$. Если $\theta(0) = \sqrt{2} X'_n / L$, то, как уже отмечалось ранее, верхняя ветвь проходит через $\omega = \omega_0$. При $\theta(0) > \sqrt{2} X'_n / L$ мы имеем две ветви колебаний с $\omega < \omega_0$. Если $\theta(0)$ достаточно большое, обе ветви стремятся к асимптотике, $\omega/\omega_0 = 1 - 0,5[\theta(0)/F_1]^2$.

Рассмотрим НСВ с $n = 2$. На рис. 5 можно видеть, что когда $\theta(0) < \theta_{2,1}^c$ (выражения для $\theta_{n,k}^c$ будут приведены ниже), наблюдается две ветви колебаний. Если $\theta(0) > \theta_{2,1}^c$, появляются две новые ветви колебаний. Когда $\theta(0)$ велико, ω стремится к асимптотикам $\omega/\omega_0 = 1 - 0,5[\theta(0)/F_i]^2$, где $i = 1, 2$. В общем случае для НСВ с любым n есть $(n - 1)$ бифуркационных параметров $\theta_{n,k}^c$, где $k = 1, 2, \dots, n-1$. При каждом $\theta_{n,k}^c$ появляются две новые ветви колебаний с характерной зависимостью частоты от амплитуды: $\omega = \omega_{1,2} = \omega[\theta(0)] \pm P_{n,k}[\theta(0) - \theta_{n,k}^c]^s$, где $P_{n,k}$ и s — числа, $s < 1$. Значения $\theta_{n,k}^c$ можно определить из соотношения $d\omega/d\theta = \infty$ или же $d(f_0 \xi'_n(f_0))/df_0 = 0$. Эта формула приводит к зависимости $\theta_{n,k}^c = \sqrt{2} t_{n,k} / L$, параметры $t_{n,k}$ могут быть определены численно. Конкретные значения $t_{n,k}$ для не очень больших n не очень велики, при $n < 8$ они не превосходят 10, например:

$$\begin{array}{llll} t_{2,1} = 2,8; & t_{3,1} = 2,6; & t_{3,2} = 3,8; & t_{4,1} = 2,5; \\ t_{4,2} = 3,7; & t_{4,3} = 4,6; & t_{5,1} = 2,4; & t_{5,2} = 3,6; \\ t_{5,3} = 4,5; & t_{5,4} = 5,2; & t_{6,1} = 2,4; & t_{6,2} = 3,6; \\ t_{6,3} = 4,4; & t_{6,4} = 5,1; & t_{6,5} = 5,8; & t_{7,1} = 2,4; \\ t_{7,2} = 3,6; & t_{7,3} = 4,4; & t_{7,4} = 5,1; & t_{7,5} = 5,7; \\ t_{7,6} = 6,3. \end{array}$$

Поэтому при достаточно больших значениях L для описания сложной картины бифуркаций применимо использованное нами приближение слабонелинейных волн. При достаточно больших $\theta(0)$ частоты ω для различных ветвей выходят на свои асимптотики $\omega/\omega_0 = 1 - 0,5[\theta(0)/F_i]^2$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Заключительные замечания и обсуждение возможных обобщений

Рассмотрена НСВ с радиальной симметрией $\theta = \theta(r)$, $\varphi = \omega t + \varphi_0$ в цилиндрической ФМ частице радиусом L_0 . Оказалось, что при достаточно больших $L_0 \gg r_v$ даже в приближении нелинейных волн малой амплитуды картина нелинейных мод является весьма сложной и может включать ряд бифуркаций.

Для фиксированных граничных условий бифуркации отсутствуют и классификация мод такая же, как в линейном случае — каждая ветвь колебаний характеризуется целым числом (номером моды n). Частота моды ω_n плавно убывает с ростом амплитуды $\theta(0)$, при $\theta(0) = \sqrt{2} X'_n / L$ переходит границу непрерывного спектра ω_0 и затем стремится к асимптотикам $\omega/\omega_0 = 1 - 0,5[\theta(0)/F_n]^2$.

Случай свободных граничных условий является более интересным, так как здесь присутствуют также и бифуркации, а число ветвей больше, чем для линейного случая или нелинейной задачи с фиксированными граничными условиями. Для моды с $n = 1$ таких ветвей две (см. рис. 5). При $\theta(0) \rightarrow 0$ верхняя ветвь описывает линейные спиновые волны с законом дисперсии $\omega/\omega_0 = 1 + (j'_{0,n}/L)^2$ и $d\omega/d\theta = 0$, нижняя мода существенно нелинейная. Для остальных мод с $n \geq 2$ имеется $(n - 1)$ бифуркационных параметров $\theta_{n,k}^c$, $k < n$. Если при заданном n амплитуда меньше, чем $\theta_{n,1}^c$, то наблюдаются две ветви колебаний. Когда $\theta(0)$ становится больше $\theta_{n,1}^c$, появляются еще две ветви и т.д. В общем случае, если $\theta_{n,k}^c < \theta(0) < \theta_{n,k+1}^c$, то существует $2(k + 1)$ различных ветвей колебаний. Когда амплитуда $\theta(0)$ становится достаточно большой, частоты мод ω_n , отвечающие разным ветвям, плавно убывают с ростом $\theta(0)$ к асимптотическим значениям $\omega/\omega_0 = 1 - 0,5[\theta(0)/F_i]^2$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Для произвольных граничных условий, когда параметры a и b конечные, в терминах функций $f(\xi)$, $g(\xi)$ надо анализировать соотношения $(r_v a)f + b\sqrt{1 - \omega/\omega_0}(\partial f/\partial \xi) = 0$ для частот $\omega < \omega_0$ и $(r_v a)g + b\sqrt{\omega/\omega_0 - 1}(\partial g/\partial \xi) = 0$ для $\omega > \omega_0$. При этом в условие входит частота и исходная универсальность в значительной степени теряется, а анализ усложняется. Однако качественно результат можно описать, отметив, что при конечных значениях $r_v a/b$ при приближении к границе непрерывного спектра граничные условия эффективно становятся фиксированными. При $r_v a/b \sim 1$, с учетом $|\omega/\omega_0 - 1| \ll 1$, поведение мод НСВ практически такое, как для фиксированных граничных условий. Переход к картине, эффективно соответствующей свободным условиям, возможен только при больших значениях b , когда $(r_v a)^2 \ll b^2|\omega/\omega_0 - 1|$.

Конкретный анализ частот НСВ был проведен только для мод с радиальной симметрией ($q = 0$) и для двух простейших случаев граничных условий. Как отмечено выше (см. (4)), для цилиндрических частиц возможны более общие решения вида $\theta = \theta(x)$, $\varphi = \omega t + q\chi + \varphi_0$, q — целые числа. Обсудим общие закономерности формирования нелинейных мод с различной угловой зависимостью. Можно сказать, что возможность существования бифуркаций и их характер для НСВ с $q = 0$ обусловлены наличием локализованных решений ($\theta = 0$ или $d\theta/d\xi = 0$, когда $\xi \rightarrow \infty$) для счетного множества значений начальных условий $\theta(0)$. Это свойство, очевидно, сохраняется и для мод с различными $q \neq 0$. Это дает основания полагать, что бифуркации описанной природы будут наблюдаться для всех значений q .

Для сферической частицы угловая зависимость намагниченности значительно более сложная [10], и детальное рассмотрение этого случая выходит за рамки настоящей работы. Однако анализ простейшего варианта радиально-симметричных колебаний, с пренебрежением при этом диполь-дипольным взаимодействием, что возможно когда $K \gg 2\pi M_0^2$, не представляет труда. Для этого случая также можно провести упрощение исходного уравнения Ландау—Лифшица до двух универсальных уравнений типа (7), (9), которые будут отличаться от (7) для $\omega < \omega_0$ или (9) для $\omega > \omega_0$ лишь отсутствием слагаемого с q и заменой $(1/\xi)(d/d\xi)$ на $(2/\xi)(d/d\xi)$. Для этих уравнений все закономерности, в частности наличие счетного множества локализованных решений, остаются теми же, и следует ожидать аналогичной картины нелинейных мод, включая возможность

существования бифуркаций описанного выше типа.

В заключение заметим, что рассмотренная в данной работе модификация магнитных двумерных аксиально-симметричных солитонов в цилиндрической области конечного радиуса не является специфической для двумерных систем. Существование последовательности бифуркаций рождения солитонов все более сложного вида в случае свободных границ и отсутствие таких бифуркаций при фиксированных границах наблюдается и в одномерных системах [14–16] и является лишь следствием конечности размера системы.

Работа поддержана грантом INTAS 97-31 311.

1. B. Hillebrands, C. Mathieu, C. Hartmann, M. Bauer, O. Buettner, S. Riedling, B. Roos, S. O. Demokritov, B. Bartenlian, C. Chappert, D. Decanini, F. Rosseaux, E. Cam, A. Muller, B. Hoffmann, and U. Hartmann, *J. Magn. Magn. Mater.* **75**, 10 (1997).
2. M. Grimsditch, Y. Jaccard, and I. K. Shuller, *Phys. Rev.* **B58**, 11539 (1998).
3. K. Yu. Guslienko and A. N. Slavin, *J. Appl. Phys.* **87**, 6337 (2000).
4. C. Mathieu, J. Jorzick, A. Frank, S. O. Demokritov, A. N. Slavin, B. Hillebrands, B. Bartenlian, C. Chappert, D. Decanini, F. Rosseaux, and E. Cambril, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3968 (1998).
5. C. Mathieu, C. Hartmann, M. Bauer, O. Buettner, S. Riedling, B. Roos, S. O. Demokritov, B. Hillebrands, B. Bartenlian, C. Chappert, D. Decanini, F. Rousseaux, E. Cambril, A. Muller, B. Hoffman, and U. Hartman *Appl. Phys. Lett.* **70**, 2912 (1997).
6. J. Jorzick, S. O. Demokritov, B. Hillebrands, B. Bartenlian, C. Chappert, D. Decanini, F. Rosseaux, and E. Cambril, *Appl. Phys. Lett.* **75** 3859, (1999).
7. А. Г. Гуревич, Г. А. Мелков, *Магнитные колебания и волны*, Наука, Москва (1994).
8. В. С. Львов, *Нелинейные спиновые волны*, Наука, Москва (1987).
9. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
10. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983); А. М. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
11. R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Townes, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 479, (1964).
12. A. S. Kovalev, A. M. Kosevich, and K. V. Maslov, *JETP Lett.* **30**, 296 (1980).
13. B. A. Ivanov, C. E. Zaspel, and I. A. Yastremsky, *Phys. Rev.* **B63**, 134413 (2001).
14. А. С. Ковалев, *ТМФ* **37**, 135 (1978).
15. А. С. Ковалев, *ФТТ* **21**, 1729 (1979).
16. А. С. Ковалев, М. М. Богдан, *Физика многочастичных систем* **13**, 20 (1988).

Nonlinear magnetization oscillations in small cylindrical ferromagnetic particles

B. A. Ivanov and I. A. Yastremsky

Radial-symmetric nonlinear magnetization oscillations are considered for small ferromagnetic cylindrical particles both for free and fixed boundary conditions on a lateral side of the particles. It turns out that even for nonlinear oscillations of small ampli-

tude the relation between frequency and amplitude is complex enough and comprises a bifurcations series. The oscillation character depends essentially on boundary conditions, for example, for free boundary conditions there are bifurcations of solutions, whereas in the case of fixed conditions such bifurcations are absent. The possibilities of generalization of the results obtained to the cases of oscillations in a cylinder with a more complex angular dependence and radial-symmetric oscillations in a sphere particle are discussed.