

Блоховские осцилляции магнитных солитонов как пример динамической локализации квазичастиц в однородном внешнем поле

(Обзор)

А. М. Косевич

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: kosevich@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 6 февраля 2001 г.

Обзор посвящен теории осцилляционного движения зонной частицы или частицеподобного возбуждения в однородном внешнем поле — так называемых блоховских осцилляций. Пояснено, что условием такого необычного движения являются два обстоятельства: классическое уравнение движения, определяющее зависимость импульса частицы от времени под действием внешних полей ($dp/dt = F$), и зонный характер энергетического спектра частицы, предполагающий периодическую зависимость энергии частицы от импульса (квазиимпульса) [$\epsilon = \epsilon(p) = \epsilon(p + p_0)$], где p_0 — период в p -пространстве, естественным образом возникающий при описании движения в пространственно-периодической структуре (решетке). Даны квазиклассическое и квантовое описания блоховских осцилляций. Поскольку в монографической литературе отсутствует последовательное изложение квантовой теории этого явления, в первой части обзора достаточно подробно, со всеми основными вычислениями, изложены результаты осцилляционной динамики элементарного возбуждения $1D$ дискретной цепочки, включая теорию движения как в постоянном однородном поле, так и в гармонически зависящем от времени однородном поле. Приведено толкование соотношения частоты квазиклассических блоховских осцилляций и эквидистантного спектра уровней энергии в так называемой «лестнице Ванье–Штарка». Объяснена физическая природа явления динамической локализации зонной частицы в переменном во времени однородном поле. Показано, что основные результаты подобной динамики переносятся на движение динамического солитона дискретного нелинейного уравнения Шредингера. Во второй части обзора описаны блоховские осцилляции топологических и динамических магнитных солитонов. Показано, что феноменологические уравнения Ландау–Лифшица для поля намагниченности в магнитоупорядоченной среде обладают удивительными солитонными решениями. Энергия солитона оказывается периодической функцией его импульса, хотя движение происходит в сплошной среде. Наличие этой периодичности достаточно для объяснения блоховских осцилляций магнитных солитонов. Описана квантовомеханическая осцилляционная динамика солитона в дискретной спиновой цепочке. Завершается обзор обсуждением условий и возможностей экспериментального наблюдения такого осцилляционного движения.

Огляд присвячено теорії осциляційного руху зонної частинки або частинкоподібного збудження в однорідному зовнішньому полі — так званих блохівських осциляцій. Пояснено, що умовою такого незвичного руху є дві обставини: класичне рівняння руху, яке визначає залежність імпульсу частинки від часу під впливом зовнішніх полів ($dp/dt = F$), і зонний характер енергетичного спектра частинки, що припускає періодичну залежність енергії частинки від імпульсу (квазіімпульсу) [$\epsilon = \epsilon(p) = \epsilon(p + p_0)$], де p — період в p -просторі, що природним шляхом виникає при описуванні руху в просторово-періодичній структурі (ґратці). Наведено квазікласичний квантовий опис блохівських осциляцій. Тому що в монографічній літературі послідовне викладення квантової теорії цього явища відсутнє, в першій частині огляду достатньо докладно, з усіма основними розрахунками, викладено результати осциляційної динаміки елементарного збудження $1D$ дискретного ланцюжка, включаючи теорію руху як у постійному однорідному полі, так і в гармонічно залежному від часу однорідному полі. Наведено тлумачення співвідношення частоти квазікласичних блохівських осциляцій і еквидистантного спектра рівней енергії у так званій «східці Ванье–Штарка». Пояснено фізичну природу явища динамічної локалізації зонної частинки в змінному з часом однорідному полі. Показано, що

основні результати подібної динаміки переносяться на рух динамічного солітона дискретного нелінійного рівняння Шредингера. В другій частині огляду описано блохівські осциляції топологічних і динамічних магнітних солітонів. Показано, що феноменологічні рівняння Ландау–Ліфшиця для поля намагніченості в магнітоупорядкованому середовищі мають дивні солітонні рішення. Енергія солітона виявляється періодичною функцією його імпульсу, хоч рух відбувається у суцільному середовищі. Наявності цієї періодичності достатньо для пояснення блохівських осциляцій магнітних солітонів. Описано квантовомеханічну осциляційну динаміку солітона в дискретному спіновому ланцюжку. Закінчується огляд обговоренням умов і можливостей експериментального спостереження такого осциляційного руху.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Yv, 45.05.+x

Содержание

Введение	700
1. Блоховские осцилляции и динамическая локализация	703
1.1. Квантовая теория «лестницы Ванье–Штарка» и осцилляции частицы в однородном внешнем поле	703
1.2. Динамическая локализация частицы в переменном поле	709
1.3. Гамильтонова динамика солитона нелинейного уравнения Шредингера на решетке	711
2. Блоховские осцилляции магнитных солитонов.	718
2.1. Основные положения теории ферромагнетизма и квазиклассическое квантование магнитных солитонов	718
2.2. Осцилляционное движение магнитного солитона в легкоосном магнетике	721
2.3. Влияние диссипации на блоховские осцилляции магнитного солитона	723
2.4. Макроскопическая теория блоховских осцилляций солитона в двухосном ферромагнетике	726
2.5. Динамика солитонов дискретной спиновой системы (квантовое описание)	728
2.6. Обсуждение возможностей наблюдения проявлений блоховских осцилляций магнитного солитона	731
Приложение	734
Список литературы	736

Введение

Блоховскими осцилляциями в электронной теории называют *осцилляционное* движение зонного электрона в однородном *постоянном* электрическом поле с амплитудой, *обратно* пропорциональной величине приложенного поля. Такое необычное поведение квазичастицы в кристалле было предсказано Блохом в 1928 г. [1], и потому само физическое явление носит его имя. Причиной такого необычного (с точки зрения механики заряженной частицы в вакууме) поведения электрона в кристалле (так называемого блоховского или зонного электрона) является своеобразие его динамики во внешних полях. И основная особенность зонного движения электрона, порождающая это своеобразие, заключается в том, что энергия блоховского электрона, как любой квазичастицы в кристалле, является периодической функцией его импульса, а точнее — квазиимпульса (см. любую книгу по электронной теории, например, [2,3]). В свою очередь, периодическая зависимость энергии электрона от квазиимпульса (периодичность его закона дисперсии в k -простран-

стве с периодом обратной решетки) обусловлена трансляционной пространственной периодичностью кристаллической решетки. Если период кристаллической решетки (постоянная решетки) равен a , то период обратной решетки равен $2\pi\hbar/a$. Принимая существование периодичности закона дисперсии и возможность использовать классическое уравнение движения, согласно которому временная производная импульса электрона равна действующей на него электрической силе, легко оценить период блоховских осцилляций. Пусть $\Delta p = 2\pi\hbar/a$ — период энергии электрона $\epsilon(p)$ как функции его квазиимпульса. Скорость электрона равна производной от ϵ по p , поэтому в силу периодичности ϵ она также является периодической функцией p с тем же периодом. В электрическом поле эволюция импульса определяется обычным уравнением

$$\frac{dp}{dt} = eE, \quad (1)$$

поэтому $p = eEt$. Следовательно, скорость электрона действительно осциллирует со временем с частотой $\omega_B = eEa/\hbar$. Это и есть частота блохов-

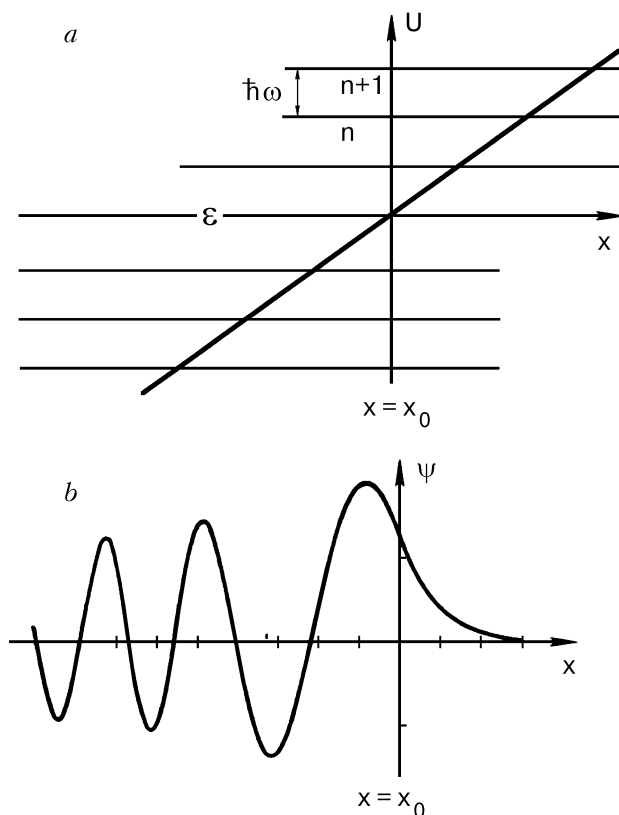


Рис. 1. Уровни энергии зонной частицы в однородном поле («лестница Ванье–Штарка») (а). Волновая функция зонной частицы с энергией \mathcal{E} (б).

ских осцилляций. Существенно, что блоховская частота пропорциональна периоду кристаллической решетки и действующей на электрон силе.

Предложенное квазиклассическое объяснение природы блоховских осцилляций можно сопроводить простой квантовой схемой. Пусть квантовая частица находится в стационарном состоянии с энергией \mathcal{E} в потенциальном поле $U = -Fx = -eEx$. Обозначим координату $x = x_0$ в точке, где $\mathcal{E} = -Fx_0$ (рис. 1,а). Тогда на полуоси $x > x_0$ кинетическая энергия частицы отрицательна, и ее волновая функция $\psi(x)$ экспоненциально спадает с ростом x (рис. 1,б). На полуоси $x < x_0$ частица обладает неким эффективным отрицательным квазиимпульсом, зависящим от координаты x , и находится в состоянии движения влево. Однако, когда квазиимпульс достигает границы зоны Бриллюэна, скорость электрона обращается в нуль, т.е. частица как бы испытывает отражение от границы зоны Бриллюэна. Следовательно, хотя функция $\psi(x)$ имеет осциллирующий характер, ее амплитуда спадает по мере роста $x_0 - x$ (рис. 1,б). В результате волновая функция оказывается отличной от нуля только в области вблизи $x = x_0$. Следовательно, стационарное состояние частицы локализовано около этой точки.

Такое физическое явление иногда называют *динамической локализацией* частицы в однородном внешнем поле. Но известно, что локализованное стационарное состояние должно обладать дискретным уровнем энергии. Чем же выделено это значение \mathcal{E} в однородном поле? В силу однородности поля никакого выделенного значения \mathcal{E} не существует. Поэтому необходимая дискретность может быть связана только с эквидистантным дискретным спектром типа

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + n\hbar\omega, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2)$$

где разным n отвечают одинаковые волновые функции, но локализованные вблизи разных центров $x_n = x_0 + (\hbar\omega/F)n$.

Эквидистантный спектр (2), особенно его проявление в оптических экспериментах, носит название «лестницы Ванье–Штарка» (*Wannier-Stark ladder*). Оказывается, расстояния между «ступенями» этой лестницы в случае электрона в однородном электрическом поле определяют блоховскую частоту осцилляций: $\omega = \omega_B$.

При разумных значениях электрического поля частота блоховских осцилляций электрона в металле на много порядков меньше частоты столкновений электрона даже в предельно чистых металлах (другими словами, период осцилляций намного превосходит время релаксации в металле τ , и амплитуда блоховских осцилляций намного превосходит длину свободного пробега электрона). Поэтому при расчете электросопротивления проводников и в других аналогичных случаях периодический характер движения электронов можно не учитывать, принимая, что на малых участках пути электрон движется поступательно. Долгое время считалось, что блоховские осцилляции представляют собой весьма любопытное, но интересное лишь в теоретическом плане физическое явление.

Ситуация кардинально изменилась, когда была разработана и создана технология изготовления весьма совершенных полупроводниковых сверхрешеток с периодами структуры, намного превышающими постоянную решетки. Поскольку в таких структурах период обратной решетки сильно уменьшен и энергетический спектр электрона разбит на узкие подзоны, соответствующие им блоховские осцилляции имеют достаточно высокие частоты (становится достижимым очевидное условие $\omega\tau \gg 1$), что делает реальным осуществление таких осцилляций и их экспериментальное наблюдение. На эту возможность впервые обратили внимание Эзаки и Цу [4], побудившие экспе-

риментаторов обнаружить эти осцилляции. Ясно, что в силу конечной величины времени релаксации τ измерения должны проводиться в течение очень коротких интервалов времени $\Delta t \ll \tau$, но это уже проблема техники эксперимента.

Эксперименты, относящиеся к обсуждаемой теме, подтвердили прежде всего проявление в оптических исследованиях «лестницы Ванье — Штарка» [6]. Позже были обнаружены непосредственно блоховские осцилляции электронного тока в объеме полупроводниковых сверхрешеток (первые прямые опыты такого типа были выполнены, по-видимому, в работах [7,8]).

Следует отметить, что экспериментально наблюдались осцилляции макроскопического электрического тока. А поскольку само явление заключается в трансляционных электронных колебаниях, оно может проявить себя лишь при когерентном движении всех участвующих в нем электронов. В эксперименте макроскопическая группа когерентных электронов создавалась в результате воздействия на полупроводниковую сверхрешетку лазерным импульсом (любопытно, что сам лазерный импульс создается коллективным когерентным переходом большой группы электронов из энергетически конвертированного атомного состояния в некое основное состояние).

Необходимость макроскопического когерентного движения электронной системы для реализации блоховских осцилляций ставит это явление в ряд других своеобразных осцилляционных эффектов, обусловленных периодической зависимостью тока от фазы системы большого числа носителей тока (напомним, что квазиимпульс электрона определяет фазу его волновой функции). Очевидным и ярким примером может служить эффект Джозефсона, в котором ток I гармонически зависит от фазы Φ :

$$I = I_0 \sin \Phi, \quad I_0 = \text{const}, \quad (3)$$

и скорость изменения фазы Φ со временем определяется выражением, аналогичным (1),

$$d\Phi/dt = eV/h, \quad V = \text{const}, \quad (4)$$

где V — разность электрических потенциалов на джозефсоновском контакте. В результате под действием постоянного напряжения возникает осциллирующий ток.

Физической системой, относящейся к тем, в которых должны наблюдаться блоховские осцилляции, является сверхпроводящий конденсат в периодической сверхпроводящей структуре (сверхпроводящей сверхрешетке). Действитель-

но, сверхпроводящий конденсат является макроскопической системой когерентно движущихся электронов (куперовских пар) и, будучи помещенным в пространственно периодический потенциал, должен испытывать блоховские осцилляции под действием, например, внешнего электрического поля, направленного вдоль оси, по которой имеется периодичность параметра порядка. На это обстоятельство давно было обращено внимание [9], однако соответствующие эксперименты автору неизвестны.

Своеобразные электронные осцилляции блоховского типа могут возникнуть в слоистой сверхрешетке в сильном магнитном поле, параллельном слоям (слои периодически с периодом d расположены перпендикулярно оси x , а магнитное поле H направлено вдоль оси z). При соответствующем выборе калибровки векторного потенциала компонента импульса электрона p_y сохраняется и определяет x -координату центра классической орбиты электрона x_0 . При такой геометрии энергия электрона, как показано в [10], является периодической функцией x_0 , а следовательно, периодической функцией p_y . Если к такой сверхрешетке приложить не разрушающее ее энергетической структуры электрическое поле E вдоль оси y , то в соответствии с вышеизложенным возникнут осцилляции с частотой $\omega = 2\pi E c / (Hd)$. Любопытно, что в данном случае осцилляции наблюдаются в направлении, перпендикулярном направлению периодичности сверхрешетки, но определяются временем прохождения электроном с холловской дрейфовой скоростью $E c / H$ периода d .

Очевидны принципиальная общность явлений и выводы, касающиеся возможности подобных осцилляций макроскопического электрического тока или потока частиц, если речь идет о когерентном движении незаряженных частиц или квазичастиц. Хотя приведенные выше примеры относились к блоховским осцилляциям электронов под действием электрического поля, электрические свойства упомянутых систем проявлялись в том, что действующая на квазичастицу внешняя сила определялась напряженностью электрического поля. Если в правой части уравнения (1) будет стоять не напряженность электрического поля, а постоянная сила любой другой природы, то все рассуждения, изложенные выше, остаются в силе, поэтому

а) когерентный поток (или ток) частиц должен периодическим образом зависеть от фазы системы (в случае электронов и блоховских осцилляций таковой является одинаковый импульс электронов);

б) скорость изменения фазы должна возникать под действием однородно распределенной некоторой внешней силы;

в) при выполнении а) возможны осцилляции иного типа, а именно: если поперечная однородная внешняя сила создает градиент фазы, то могут возникнуть чисто пространственные продольные осцилляции плотности постоянного тока (роль времени как бы передается одной пространственной координате).

Ситуация, изложенная в последнем выводе, была использована при описании и экспериментальном наблюдении блоховских осцилляций в оптике [11,12]. Оптические блоховские осцилляции сводятся к пространственным осцилляциям узкого лазерного луча, распространяющегося вдоль периодической системы параллельных световодов под действием однородного градиента коэффициента преломления материала световодов. Отдельные световоды слабо оптически связаны друг с другом и образуют своеобразную оптическую периодическую среду, а действующая на лазерный луч внешняя сила в виде градиента коэффициента преломления создавалась в экспериментах [11,12] неоднородным нагревом системы световодов.

Обсуждение и экспериментальное наблюдение оптических блоховских осцилляций подтверждает общезначимый характер рассматриваемого явления и возможность его проявления при движении любого объекта под действием постоянной силы, если его кинетическая энергия периодически зависит от импульса. Подобным объектом может быть, например, частицеподобное образование в нелинейной классической либо квантовой динамике дискретных систем, где наличие периодической структуры обеспечивает упомянутую периодичность энергии возбуждения. Типичным частицеподобным объектом такого типа является динамический солитон. Блоховские осцилляции солитона в дискретной молекулярной цепочке, описываемой нелинейным уравнением Шредингера, проанализированы в [13].

Особый класс систем, в которых существует обсуждаемое когерентное явление, составляют магнитные системы, рассмотрение которых подводит нас к основному предмету настоящей работы. Малоамплитудные магнитные динамические солитоны описываются нелинейным уравнением Шредингера. Поэтому наш анализ блоховских осцилляций солитонов начинается с динамики солитона этого уравнения.

Осцилляционное движение простейшего магнитного солитона — доменной стенки — в реали-

стической модели, а именно в ферромагнетике с двухосной анизотропией, впервые было предсказано в работе [14]. Специфика уравнений динамики намагниченности ферромагнетиков такова, что даже в континуальном приближении доменная стенка совершает блоховские осцилляции в однородном магнитном поле. В сравнительно недавних теоретических работах была подтверждена возможность существования блоховских осцилляций доменных стенок с солитоноподобным поведением [15] и выполнен их расчет как на уровне квазиклассической динамики доменных стенок, движущихся в периодическом потенциале [16], так и при использовании квантовомеханической динамики спиновых солитонов [17]. Блоховские осцилляции динамического магнитного солитона в одноосном $1D$ ферромагнетике под действием градиента магнитного поля были предсказаны в [18] и детально изучены (включая численные расчеты на основе уравнений Ландау—Лифшица) в [19]. Влияние диссипативных процессов на затухание блоховских осцилляций магнитного солитона проанализировано в [20].

Перечисленные публикации, касающиеся осцилляций магнитных солитонов под действием постоянной силы, — это лишь некоторые из положенных в основу настоящего обзора. Тем не менее они демонстрируют, что интерес к проблеме возник в нелинейной динамике намагниченности магнитоупорядоченных систем уже давно и заметно возрастает в последние годы.

1. Блоховские осцилляции и динамическая локализация

1.1. Квантовая теория «лестницы Ванье—Штарка» и осцилляции частицы в однородном внешнем поле

Рассмотрим $1D$ дискретную систему, в которой движение частицы сводится к перескокам между соседними узлами цепочки. В модели сильной связи уравнение динамики свободной частицы в узельном представлении имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = \alpha (2\Psi_n - \Psi_{n+1} - \Psi_{n-1}) + \Omega_0 \Psi_n, \quad (5)$$

где n — номер узла; α — частота перехода частицы между ближайшими соседними узлами, определяющая кинетическую энергию квантовой частицы; Ω_0 — потенциальная энергия покоящейся частицы, не зависящая от номера узла (планковская постоянная принята равной единице).

Волновая функция, удовлетворяющая (5), имеет очевидную форму:

$$\Psi_n = \Psi_0 \exp(ikn - i\omega t), \quad (6)$$

k — волновое число (расстояние между узлами принято равным единице), связанное с энергией (частотой ω) законом дисперсии

$$\omega = \Omega_0 + \varepsilon(k) \equiv \Omega_0 + 2\alpha(1 - \cos k). \quad (7)$$

Спектр стационарно движущихся состояний частицы непрерывен и обладает одной зоной ограниченной ширины ($\Omega_0 < \omega < \Omega_0 + 4\alpha$).

В дальнейшем ограничимся анализом только однозонных моделей. Конечно, используя лишь такие модели, мы оставляем вне обсуждения многие особенности блоховских осцилляций, в частности всё, что связано с межзонными переходами. Некоторые явления «за пределами однозонных моделей» рассмотрены в работах [21]. Однако в интересующих нас случаях спектр элементарных возбуждений обладает одной зоной, и мы ограничимся анализом однозонных моделей.

Рассмотрим волновой пакет, гармонические составляющие которого (6) локализованы в k -пространстве вблизи некоторого значения k :

$$\Psi(n, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(k, t) \exp(ikn) dk. \quad (8)$$

Как известно, скорость перемещения огибающей волнового пакета (8) равна групповой скорости частицы-волны:

$$v = \frac{d\omega}{dk} = 2\alpha \sin k. \quad (9)$$

Замечательным свойством соотношения (9) есть периодическая зависимость скорости от волнового числа (или вектора в 3D случае). Это свойство находит интересное проявление при движении частицы под действием внешних сил.

Рассмотрим динамику той же частицы во внешнем поле. Из электронной теории известно [2–4], что в квазиклассическом приближении потенциальное поле, создающее действующую на частицу однородно распределенную силу F , определяет изменение волнового числа (квазиимпульса) частицы-пакета:

$$\frac{dk}{dt} = F. \quad (10)$$

Следовательно, в однородном и постоянном поле волновое число k монотонно изменяется со временем

$$k = Ft. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9), видим, что скорость частицы осциллирует со временем, обладая частотой

$$\omega_B = F. \quad (12)$$

В размерных единицах эта частота равна $\omega_B = Fa/\hbar$, где a — период изучаемой цепочки (расстояние между ближайшими узлами). Это есть частота блоховских осцилляций.

Однородному силовому полю напряженности F в сплошной среде отвечает потенциал $U = -Fx$, чему в узельном представлении можно сопоставить потенциал

$$\Omega_n = -Fn. \quad (13)$$

Естественно выяснить, к чему приводит включение потенциала (9) непосредственно в уравнение (5). Заменим Ω_0 в (5) на (9):

$$i \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = \alpha(2\Psi_n - \Psi_{n+1} - \Psi_{n-1}) - Fn\Psi_n. \quad (14)$$

Заметим, что стационарные решения уравнения (14) типа $\Psi_n(t) = \Psi_n^\omega \exp(-i\omega t)$ обладают неким типичным для динамики частицы в однородном поле свойством. Ясно, что решение уравнения стационарных колебаний

$$(\omega + Fn)\Psi_n = \alpha(2\Psi_n - \Psi_{n+1} - \Psi_{n-1}) \quad (15)$$

является функцией переменной $z = n + \omega/F$, поэтому оно будет одним и тем же при разных парах номера n и частоты ω , связанных соотношением $z = \text{const}$:

$$\Psi_{u-v/F}^{\omega+v} = \Psi_n^\omega. \quad (16)$$

Но поскольку номер узла n есть целое число, указанное свойство справедливо лишь для волнового параметра v , определяемого требованием

$$v = mF, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17)$$

Таким образом, не используя явного вида стационарных решений уравнения (15), можно сделать заключение о присутствии в спектре этого уравнения выделенного бесконечного эквидистантного ряда частот (энергий) с расстоянием между уровнями

$$\Delta\omega = F = \omega_B . \quad (18)$$

Именно этот ряд частот связывают с «лестницей Ванье–Штарка».

Совпадение разности частот, определяющей «высоту ступеней» в «лестнице Ванье–Штарка» (18), с частотой блоховских осцилляций (12) не случайно, поскольку это отражение двух сторон одного и того же физического явления. Соотношение между «лестницей Ванье–Штарка» и блоховскими осцилляциями неоднократно обсуждалось в литературе, в частности в недавней публикации [22].

Но вернемся к последовательному анализу уравнения (10) и перепишем его в k -представлении:

$$\Phi(k) = \sum_n \Psi_n \exp(-ikn) . \quad (19)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial k} = -i \sum_n n \Psi_n \exp(-ikn) , \quad (20)$$

поэтому уравнение (14) переписывается в виде

$$i \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \varepsilon(k)\Phi - iF \frac{\partial\Phi}{\partial k} . \quad (21)$$

Обратим внимание на то, что последнее слагаемое в (21) возникло из соотношения (20), где под знаком суммы в правой части содержится возрастающий на бесконечности множитель n . Поэтому запись (20) имеет смысл (бесконечная сумма в правой части сходится) только при условии, что волновая функция Ψ_n достаточно быстро исчезает при $|n| \rightarrow \infty$. Возможно ли это? Выше было отмечено, что в изучаемой системе существует ряд выделенных дискретных частот. Известно, что дискретным уровням отвечают локализованные состояния, обладающие очевидным свойством: $\Psi_n \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$. Поскольку соотношение (20) имеет смысл только для таких состояний, дальнейший анализ решений уравнения (20) относится к изучению множества решений выделенной совокупности частот (энергий).

Приступая к анализу этих решений, сделаем два замечания. Первое. Поскольку волновая функция $\Phi(k)$ в безразмерных единицах периодична с периодом 2π , квазиволновое число k эквивалентно угловой переменной φ ($0 < \varphi < 2\pi$), определяющей состояние «планарного ротора». Поэтому изучаемое нами уравнение Шредингера (5) эквивалентно уравнению движения планарного рото-

ра, особенности динамики которого имеют отношение к теории блоховских осцилляций [23].

Второе. Слагаемому $n\Psi_n$ в уравнении (14), учитывающему наличие однородного силового поля, отвечает слагаемое $i(\partial\Phi/\partial k)$ в (21), и это соответствует представлению о том, что оператор $n = i\partial/\partial k$ имеет смысл оператора номера узла (дискретной координаты) в однозонной модели. Используя операторы номера узла n и квазиволнового числа k в k -представлении, нетрудно сформулировать обсуждаемую проблему на строгом квантовом уровне.

Придадим уравнению Шредингера (5) стандартную форму записи:

$$i \frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathcal{H}\Psi , \quad (22)$$

где оператор Гамильтона в k -представлении равен

$$\mathcal{H} = \varepsilon(k) - iF \frac{\partial}{\partial k} . \quad (23)$$

Роль граничного условия или условия квантования в k -пространстве играет условие периодичности волновой функции $\Phi(k)$ с периодом 2π (в размерных единицах — с периодом обратной решетки $2\pi/\alpha$). Эта периодичность следует непосредственно из определения (19).

По обычным правилам получаем уравнения для производных по времени от операторов k и n :

$$\frac{dk}{dt} = i [\mathcal{H}, k] = F , \quad v = \frac{dn}{dt} = i [\mathcal{H}, n] = \frac{d\varepsilon}{dk} , \quad (24)$$

где использовано обычное определение коммутатора: $[A, B] = AB - BA$.

Естественно, квантовомеханические соотношения (24) совпадают с квазиклассическими результатами электронной теории (9) и (10), и остается только наполнить эти соотношения конкретным содержанием в координатном представлении.

Очевидно, что общее решение (21) или (22) можно представить как

$$\Phi(k, t) = Q(k - Ft) \exp \left\{ -i \frac{E(k)}{F} \right\} , \quad (25)$$

где $Q(k)$ — произвольная дифференцируемая функция и для сокращения записи введены обозначения

$$E(k) = \int_0^k \varepsilon(q) dq = 2\alpha k - W(k) , \quad W(k) = 2\alpha \sin k . \quad (26)$$

Формула (25) позволяет описать эволюцию произвольного начального распределения фурье-компоненты $\Phi_0(k)$ (при $t = 0$):

$$\Phi(k, t) = \Phi_0(k - Ft) \exp \left\{ \frac{i}{F} [E(k - Ft) - E(k)] \right\}. \quad (27)$$

Заметим, что при $F = 0$ формула (27) превращается в очевидное соотношение

$$\Phi(k, t) = \Phi_0(k) \exp(-i\omega t),$$

где частота ω связана с волновым числом k законом дисперсии (7) при $\Omega_0 = 0$ ($\omega = \varepsilon(k)$).

Мы видим, что действительно центр тяжести пакета (27) перемещается в k -пространстве со скоростью $dk/dt = F$ в соответствии с квазиклассическим результатом (10).

Подтвердим особенности дискретного спектра собственных значений стационарных динамических состояний. Выполним временное преобразование Фурье решения (25):

$$\begin{aligned} \Phi^{\omega}(k) &= \int \Phi(k, t) \exp(i\omega t) dt = \\ &= \exp \left\{ \frac{i}{F} [(\omega - 2\alpha)k + W(k)] \right\} \times \\ &\times \int Q(z) \exp \left\{ -i \frac{\omega z}{F} \right\} \frac{dz}{F}. \end{aligned} \quad (28)$$

Поскольку, как отмечалось, $\Phi(k) = \Phi(k + 2\pi)$, собственное значение ω имеет следующий спектр:

$$\omega = 2\alpha + mF, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (29)$$

Видим, что спектр стационарных состояний изучаемого уравнения дискретен и неограничен ($-\infty < m < \infty$). Именно он составляет «лестницу Ванье-Штарка». Расстояние между уровнями энергии (29), равное $\Delta\omega = F = \omega_B$, совпадает с частотой блоховских осцилляций (12), и это подтверждает предсказание (18).

Запишем выражения для собственных функций «лестницы Ванье-Штарка»:

$$\Phi^m(k) = A \exp \left\{ i \frac{W(k)}{F} \right\} \exp(imk), \quad (30)$$

где нормировочный коэффициент A удобно выбрать равным единице.

В узелном представлении эти состояния имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_n^m &= \frac{1}{2\pi} \int \Phi^m(k) \exp(ikn) dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left(i \frac{W(k)}{F} \right) \exp[i(m+n)k] dk. \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда следует, что разные состояния Ванье-Штарка обладают идентичными профилями, сдвинутыми на величину m вдоль цепочки: $\Psi_n^m = \Psi_{n+m}^0$. Для явного описания профиля подобных состояний положим $m = 0$. Тогда

$$\Psi_n^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left(\frac{2\alpha i}{F} \sin k + ikn \right) dk = J_{-n} \frac{2\alpha}{F}, \quad (32)$$

где J_n — функция Бесселя первого рода. Функция J_{-n} описывает амплитуду стационарного состояния, локализованного в окрестности узла $m = 0$. На рис. 2 представлен график этой функции при $F = 0,5\alpha$ в произвольном масштабе. Поскольку в соответствии с (13) потенциал линейно спадает с ростом n , левая часть рисунка изображает полное внутреннее отражение частицы, связанное с невозможностью проникновения в область $n = -\infty$, а правая — эффект брэгговского отражения от границы зоны Бриллюэна, при достижении которой скорость частицы изменяет знак.

При изучении блоховских осцилляций волновых пакетов оказывается существенной ширина пакета. Это требует детального рассмотрения эволюции волновых пакетов разных типов во внешних полях. Вначале рассмотрим волновой пакет, который имеет достаточно узкий фурье-спектр, локализованный (при $t = 0$) вблизи $k = 0$. Используя это обстоятельство, запишем $k - Ft = \xi$ и разложим показатель экспоненты в (27) в ряд по

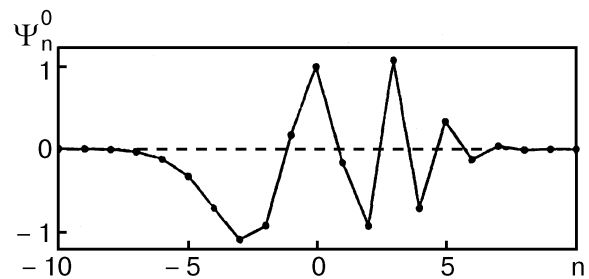


Рис. 2. Амплитуда волновой функции стационарного состояния, локализованного вблизи узла $m = 0$ ($F = 0,5\alpha$).

степеням ξ , ограничиваясь первым неисчезающим членом:

$$E(k - Ft) - E(k) = -E(Ft) - \varepsilon(Ft)\xi. \quad (33)$$

Используя это разложение, перепишем (27)

$$\Phi(k, t) = \Phi_0(\xi) \exp \left\{ -i \frac{\varepsilon(Ft)}{F} \xi \right\} \exp \left\{ -i \frac{E(Ft)}{F} \right\}. \quad (34)$$

Теперь вернемся к узельному представлению. Будем считать номер узла n непрерывной переменной (для узкого в k -пространстве пакета это допустимо, поскольку такой пакет в координатном представлении захватывает большой интервал узлов). Тогда из (8) следует

$$\Psi_n(t) = \exp(iFnt) \Psi_{n-\delta n}(0) \exp \left\{ -i \frac{E(Ft)}{F} \right\}, \quad (35)$$

где сдвиг номера узла δn , отвечающего максимальной амплитуде волнового пакета, определяется выражением

$$\delta n = \frac{\varepsilon(Ft)}{F}. \quad (36)$$

Именно эта зависимость описывает блоховские осцилляции координаты центра волнового пакета:

$$n(t) = n(0) + \varepsilon(Ft)/F. \quad (37)$$

Проследим за распределением плотности в волновом пакете

$$\rho_n(t) = |\Psi_n(t)|^2. \quad (38)$$

В соответствии с (28) эволюция $\rho_n(t)$ сводится к смещению центра распределения плотности

$$\rho_n(t) = \rho_{n-\delta n}(0). \quad (39)$$

При малых временах ($Ft \ll 1$) частица-пакет движется равноускоренно:

$$\delta n = \alpha Ft^2.$$

При больших временах скорость перемещения пакета равна

$$v = \frac{dn}{dt} = 2\alpha \sin(Ft). \quad (40)$$

Выражение (40), естественно, совпадает с квазиклассической формулой (9) при $k = Ft$.

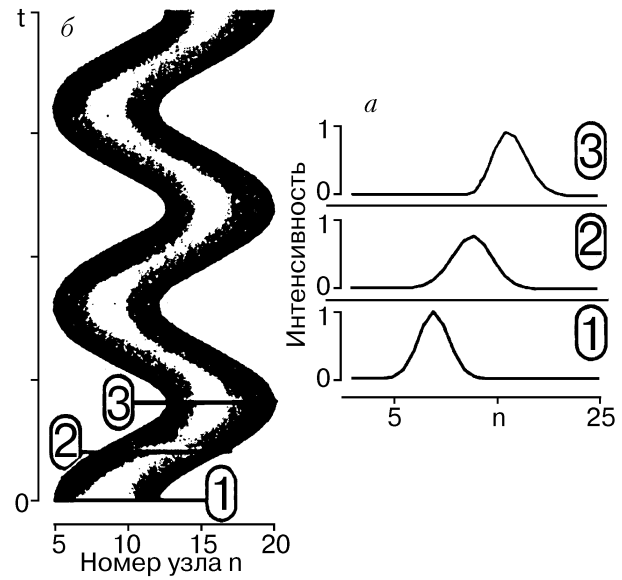


Рис. 3. Блоховские осцилляции достаточно широкого волнового пакета в однородном поле (а). Распределение интенсивностей в пакете в три различных момента времени (б).

Численно найденное [23] распределение плотности $\rho_n(t)$ при стационарном движении пакета явно демонстрирует его блоховские осцилляции, не сопровождающиеся никаким излучением (рис. 3).

Ясно, что приведенные результаты основаны на разложении (33), в котором отброшены все степени ξ , кроме первой. Следовательно, они тем точнее, чем уже k -спектр пакета, т.е. чем ближе состояние частицы к чистому состоянию, отвечающему определенному k .

В другом предельном случае, когда в начальный момент времени частица локализована на одном узле ($n = 0$) и фурье-спектр плоский ($\Phi_0(k) = 1$), динамика блоховских осцилляций иная.

Воспользуемся выражением (27) и вернемся с помощью (8) к узельному представлению:

$$\begin{aligned} \Psi(n, t) &= \frac{1}{2\pi} \exp(-2i\alpha t) \times \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ \frac{2\alpha i}{F} [\sin k - \sin(k - Ft)] \right\} \exp(ikn) dk = \\ &= \exp(-2i\alpha t) J_{-n} \left[\frac{4\alpha}{F} \sin \frac{Ft}{2} \right] \exp \left\{ i \frac{n}{2} (Ft - \pi) \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Используя свойства функций Бесселя, легко убедиться, что если функция $\Psi(n)$ есть решение уравнения (14), то функция $(-1)^n \Psi^*(-n)$ также

является решением с тем же профилем (с той же огибающей), но она описывает возбуждение, отличающееся скачком фазы, равным π , в соседних узлах. Следовательно, плотность, создаваемая решением (41), есть четная функция узла с номером n , отсчитываемого от центра локализации:

$$\rho_n(t) = J_n^2\left(\frac{4\alpha}{F} \sin \frac{Ft}{2}\right). \quad (42)$$

Значит, возбуждение симметрично распространяется как в направлении возрастания ($n > 0$), так и в направлении убывания ($n < 0$) потенциала. Вспомним вид функции Бесселя при малых аргументах: $J_n(z) = (1/n!)(z/2)^n$ для $z \ll n$ ($n > 0$). Величина функции монотонно увеличивается с ростом аргумента z и достигает максимума при $z \approx n$, если $n \gg 1$. При $z \gg n$ функция Бесселя осциллирует, убывая пропорционально $z^{-1/2}$. В формуле (41) аргумент $z = (4\alpha/F) \sin(Ft/2)$ гармонически зависит от времени, достигая максимального значения $z_m = 4\alpha/F$ при $t = t_m = \pi/F$. Поэтому эволюция волнового пакета происходит следующим образом: при $t = 0$ частица локализована ($\Psi_n(0) = \delta_{n0}$), и с течением времени возбуждение распространяется на ближайшие узлы цепочки (вправо и влево), причем до далекого узла $n \gg 1$ максимум возбуждения реально доходит при $z \approx n$ (к этому времени возбуждение в центральной части цепочки осцилляционным образом убывает как $z^{-1/2}$). Но поскольку $z \leq z_m$, волна может распространиться лишь на расстояние $n \approx z_m$, достигая максимального удаления при $t = t_m$; в этот момент времени рост аргумента z прекращается (точка остановки), в дальнейшем волна «откатывается» обратно, собираясь в первоначальный импульс на узле $n = 0$ в момент времени $t = 2\pi/F$.

Порядок величины размаха осцилляций можно определить, вычислив среднеквадратичное отклонение номера узла от центра в процессе осцилляций. Достаточно произвести расчет для $m = 0$, воспользовавшись формулой (41) и тождеством [24]

$$\sum_n n^2 J_n^2(z) = \frac{1}{2} z^2, \quad (43)$$

тогда тривиальные вычисления приводят к

$$\langle n^2 \rangle = \sum_n n^2 \rho_n(t) = 8 \left(\frac{\alpha}{F}\right)^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}Ft\right). \quad (43a)$$

Усреднение по времени дает $\langle n^2 \rangle = (2\alpha/F)^2$. Таким образом, действительно, $\langle n^2 \rangle^{1/2} = z_m/2$. На рис. 4 представлены результаты численного интегрирования уравнения (14), иллюстрирующие осцилляционную эволюцию волнового пакета*.

В заключение настоящего раздела заметим, что формулы (42) и (43a) допускают предельный переход $F \rightarrow 0$, соответствующий рассмотрению квантовой частицы в отсутствие внешнего поля. Такой предельный переход позволяет записать следующие равенства:

$$\rho_n = J_n^2(2\alpha t), \quad \langle n^2 \rangle = 2\alpha^2 t^2. \quad (44)$$

Мы видим, что свободная частица, локализованная в начальный момент времени в узле $n = 0$, со временем уходит на бесконечность. Используя упомянутые выше свойства функций Бесселя, можно определить, что максимум плотности ρ_n наблюдается в узле n ($n \gg 1$) в момент времени $t_n \approx n/(2\alpha)$. Это означает, что скорость перемещения максимума распределения $n/t_n = 2\alpha$ совпадает с максимальной групповой скоростью частицы (см. формулу (9)).

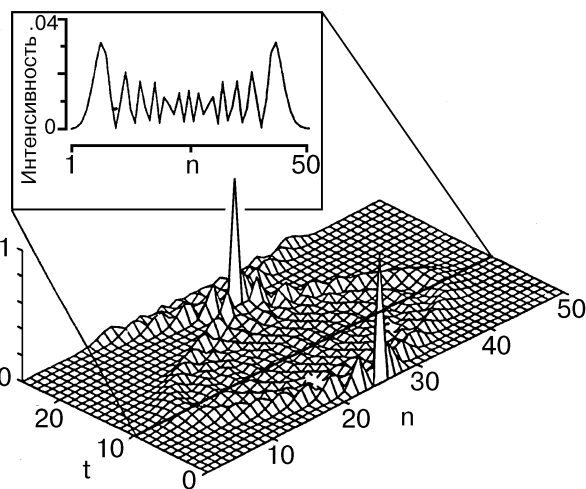


Рис. 4. Эволюция узкого волнового пакета, демонстрирующая поочередное расхождение и фокусировку пакета. Вставка – распределение интенсивности поля в моменты остановки и поворота.

* Приведенные на рис. 3 и 4 результаты численных расчетов согласуются с полученным недавно [25] полным аналитическим описанием аналогичной динамики гауссового волнового пакета в полупроводниковой сверхрешетке.

1.2. Динамическая локализация частицы в переменном поле

Наличие серии дискретных частот Ванье-Штарка в спектре частицы в однородном поле сил должно проявляться в резонансных явлениях при воздействии периодической во времени силы на такую частицу. Допустим, что внешняя однородная сила F включает гармоническую составляющую, зависящую от времени:

$$F \rightarrow F(t) = F_0 + F_1 g(t), \quad F_0, F_1 = \text{const}, \quad (45)$$

где в простейшем случае

$$g(t) = \cos(\omega t + \theta). \quad (46)$$

Ясно, что при этом уравнение (21) остается в силе:

$$\frac{\partial \Phi(k)}{\partial t} + i\varepsilon(k)\Phi(k) = F(t) \frac{\partial \Phi(k)}{\partial k} \quad (47)$$

и волновое число k по-прежнему подчиняется квазиклассическому уравнению движения (11). Следовательно,

$$k(t) = k_0 + \int_0^t F(s) ds = k_0 + F_0 t + F_1 \int_0^t g(s) ds.$$

Приступая к квазиклассическому анализу динамики частицы, заметим, что скорость волнового пакета определяется выражением $v = 2\alpha \sin k$. Имея в виду простейший случай, свяжем константы интегрирования k_0 и θ условием $\omega k_0 = F_1 \sin \theta$. Тогда

$$v = 2\alpha \sin [F_0 t + (F_1/\omega) \sin(\omega t + \theta)]. \quad (48)$$

Используя свойства рядов функций Бесселя, запишем

$$\begin{aligned} v &= 2\alpha \left\{ \sin F_0 t \cos \left[\frac{F_1}{\omega} \sin(\omega t + \theta) \right] + \cos F_0 t \sin \left[\frac{F_1}{\omega} \sin(\omega t + \theta) \right] \right\} = \\ &= 2\alpha \left\{ J_0 \left(\frac{F_1}{\omega} \right) \sin F_0 t + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p} \left(\frac{F_1}{\omega} \right) \cos [2p(\omega t + \theta)] \sin(F_0 t) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p-1} \left(\frac{F_1}{\omega} \right) \sin [(2p-1)(\omega t + \theta)] \cos(F_0 t) \right\}. \end{aligned} \quad (49)$$

Поскольку

$$\cos \theta_1 \sin \theta_2 = \frac{1}{2} [\sin(\theta_1 + \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_2)],$$

при всех $\omega \neq F_0$ частица испытывает периодические блоховские осцилляции с основной блоховской частотой $\omega_B = F_0$, которой сопутствует бесконечная серия сателлитов с частотами $\omega_B \pm m\omega$ и $m = 1, 2, 3, \dots$

При частоте $\omega = \omega_B$, равной расстоянию между ступенями «лестницы Ванье-Штарка», возникает любопытный резонанс: появляется постоянная составляющая скорости частицы (слагаемое с $m = 1$), величина которой определяется начальными условиями:

$$v_0 = \alpha J_1(F_1/F_0) \sin \theta, \quad (50)$$

а осциллирующая компонента приобретает набор высших гармоник с частотами $m\omega_B$.

Если $F_1 \ll F_0$, то скорость частицы в резонансе ($\omega = \omega_B = F_0$)

$$\begin{aligned} v &= \alpha (F_1/F_0) \sin \theta + 2\alpha \sin(\omega_B t) + \\ &\quad + \alpha (F_1/F_0) \sin(2\omega_B t + \theta). \end{aligned} \quad (51)$$

Аналогичное явление в физике джозефсоновских сверхпроводящих систем называется эффектом Шапиро [3].

Описанный эффект означает, что синусоидально зависящая от времени сила, действующая на частицу, совершающую блоховские осцилляции, при резонансных условиях $\omega = \omega_B$ вызывает дрейф частицы с некоторой постоянной скоростью v_0 . Следовательно, блоховские осцилляции

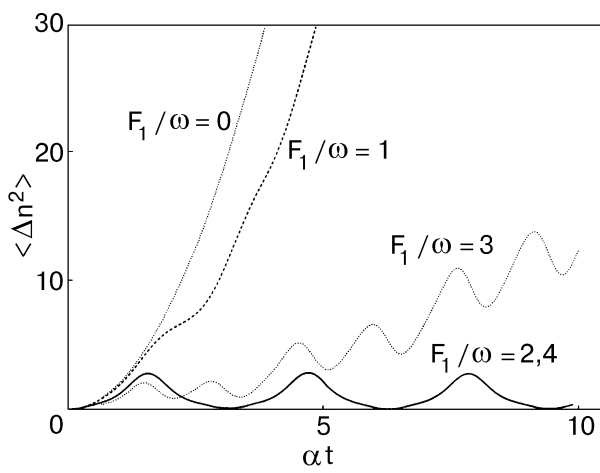


Рис. 5. Зависимость среднеекватичного смещения центра пакета от времени для различных отношений F_1/ω .

происходят в системе отсчета, движущейся с некоторой постоянной скоростью v_0 .

Рассмотрим теперь воздействие чисто синусоидальной переменной силы (46) на изучаемую частицу, положив $F_0 = 0$. Для удобства расчета выберем $\theta = 0$ и $k_0 = \pi/2$. Тогда вместо (48) и (49) получим

$$v = 2\alpha \cos \left[\frac{F_1}{\omega} \sin(\omega t + \theta) \right] = 2\alpha J_0 \left(\frac{F_1}{\omega} \right) + 4\alpha \sum_p J_{2p} \left(\frac{F_1}{\omega} \right) \cos(2p\omega t). \quad (52)$$

Соотношение (52) относится к ситуации, в некотором смысле обратной описываемой формулой (51), а именно: при произвольном отношении F_1/ω у скорости частицы есть постоянная составляющая, равная $2\alpha J_0(F_1/\omega)$. Однако если отношение F_1/ω совпадает с каким-либо нулем функции $J_0(z)$, то постоянная составляющая исчезает. Говорят, что происходит *динамическая локализация* частицы переменным полем [26]. Необычность этого резонансного явления заключается в том, что его условием служит совпадение частоты и амплитуды переменной во времени (но однородной в пространстве) силы.

Временные зависимости среднеекватичного смещения центра пакета (рис. 5) и вероятности найти возбуждение в исходном узле локализации (рис. 6) прекрасно иллюстрируют зависимость динамики пакета от величины отношения F_1/ω и показывают выделенность условия, при котором F_1/ω совпадает с корнем функции $J_0(z)$.

Естественно, эффект динамической локализации можно описать строго, анализируя распреде-

ление плотности ρ_n и среднеекватичное отклонение частицы $\langle u^2 \rangle$ от первоначального положения в узле $n = 0$. Для этого удобно записать решение уравнения (47) подобно (27), но в других независимых переменных. Введем наряду со временем t переменную

$$q = k + \int_0^t F(s) ds,$$

определив новую функцию $C(q, t) = \Phi(k, t)$. Тогда уравнение (47) превратится в

$$i \frac{\partial C}{\partial t} = \varepsilon [q - \eta(t)] C, \quad (53)$$

$$\eta(t) = \int F(s) ds. \quad (54)$$

Решение уравнения (53), аналогичное (25), имеет вид

$$C(q, t) = Q(q) \exp \left\{ -i \int_0^t \varepsilon [q - \eta(s)] ds \right\}. \quad (55)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем аналог формулы (27):

$$\Phi(k, t) = \Phi_0[k + \eta(t)] \times$$

$$\times \exp \left\{ -i \int_0^t \varepsilon [k + \eta(t) - \eta(s)] ds \right\}, \quad (56)$$

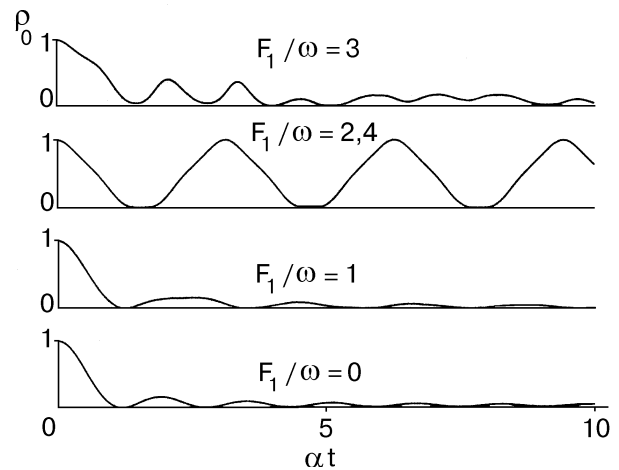


Рис. 6. Вероятность найти возбуждение в исходном узле локализации как функция времени при различных F_1/ω .

где $\Phi_0(k)$ — начальная фурье-компонента (при $t = 0$).

Представим явную запись (56), используя определение ϵ в (7):

$$\Phi(k, t) = \Phi_0[k + \eta(t)] \exp(-2i\alpha t) \times \exp\left\{-2i\alpha \int_0^t \cos[k + \eta(t) - \eta(s)] ds\right\}. \quad (57)$$

Далее следует перейти к узельному представлению и построить плотность $\rho_n(t)$. Процедура эта весьма громоздкая и требует использования некоторых теорем, определяющих свойства рядов функций Бесселя. Она изложена в *Приложении* к работе [27], и мы приведем ее результаты:

$$\rho_n(t) = J_m^2 \{2\alpha [u^2(t) + w^2(t)]^{1/2}\}, \quad (58)$$

где величины $u(t)$ и $w(t)$ даются соотношениями

$$u(t) = \int_0^t \cos[\eta(s)] ds, \quad w(t) = \int_0^t \sin[\eta(s)] ds. \quad (59)$$

Используя (43), получаем среднеквадратичное смещение частицы в процессе осцилляций

$$\langle n^2 \rangle = 2\alpha^2 [u^2(t) + w^2(t)]. \quad (60)$$

Формулы (59) справедливы при любой зависимости внешней силы от времени. Однако нас в первую очередь будет интересовать простейший случай синусоидальной силы (46). При $F = 0$ соотношения (59) дают

$$u(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega t} \cos\left[\left(\frac{F_1}{\omega}\right) \sin \tau\right] d\tau; \quad (61)$$

$$w(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega t} \sin\left[\left(\frac{F_1}{\omega}\right) \sin \tau\right] d\tau.$$

Проследим за поведением функций $u(t)$ и $w(t)$. Всякий раз, когда $\omega t = 2\pi m$, где m — целое число, оказывается

$$u_m = (2\pi m/\omega) J_0(F_1/\omega) = t_m J_0(F_1/\omega), \quad w(t_m) = 0.$$

Таким образом, осциллирующая функция $w(t)$ ограничена при всех t , а функция $u(t)$ в среднем

возрастает со временем при $t \gg 2\pi/\omega$, совершая осцилляции конечной амплитуды относительно среднего значения $\delta u = u - \langle u \rangle$. При больших временах в формулах (58) и (60) можно оставить только монотонно возрастающую функцию $u(t) \approx t J_0(F_1/\omega)$, тогда окажется, что

$$\rho_n(t) = J_n^2 [2\alpha t J_0(F_1/\omega)], \quad \langle n^2 \rangle = 2 [\alpha J_0(F_1/\omega)]^2, \quad (62)$$

$$t \gg 2\pi/\omega.$$

Заметим, что выражения (62) аналогичны формулам (43а), описывающим эволюцию состояния свободной частицы (в отсутствие внешнего поля). Если ввести эффективный параметр междуузельных переходов для частицы в синусоидальном переменном поле $\alpha_{\text{eff}} = \alpha J_0(F_1/\omega)$, то формулы (62) могут быть переписаны подобно (43а):

$$\rho_n = J_n^2(2\alpha_{\text{eff}} t), \quad \langle n^2 \rangle = 2\alpha_{\text{eff}}^2 t^2, \quad t \gg 2\pi/\omega. \quad (63)$$

В результате мы пришли к заключению, что синусоидальное внешнее поле не влияет на процесс делокализации свободной частицы, перенормируя лишь скорость делокализации. Однако этот вывод справедлив только «вообще говоря», т.е. при произвольном значении F_1/ω . Если же это отношение совпадает с нулем функции $J_0(z)$, то формулы (62) и (63) теряют смысл. Функции $u(t)$ и $w(t)$ в этом случае — периодические ограниченные, а ограниченность $\langle n^2 \rangle$ означает динамическую локализацию частицы.

1.3. Гамильтонова динамика солитона нелинейного уравнения Шредингера на решетке

В контексте нашего рассмотрения естественно перейти к изучению динамики частицеподобных решений (солитонов) нелинейных дискретных уравнений. Одно из простейших хорошо изученных с точки зрения солитонной динамики уравнений — нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) в частных производных. Это полностью интегрируемое уравнение, и динамика солитона НУШ подробно описана как при его свободном движении (см., например, [28]), так и во внешнем поле [29]. Переход от континуального нелинейного уравнения Шредингера к дискретному (решеточному) неоднозначен. Если стартовать от модели типа сильной связи, то в уравнении (5) следует добавить нелинейное слагаемое $g|\Psi_n|^2\Psi_n$. Тогда, положив $\alpha = 1$ и приняв $\beta = 0$, будем иметь следующее уравнение:

$$i \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = 2\Psi_n - \Psi_{n+1} - \Psi_{n-1} - 2g|\Psi_n|^2\Psi_n. \quad (64)$$

Именно его аналог эксплуатируется в нелинейной оптике системы параллельных световодов [29]. К сожалению, уравнение (64) не является полностью интегрируемым и не имеет точных солитонных решений типа солитона континуального НУШ. Однако существует точно интегрируемая версия нелинейного уравнения Шредингера на решетке [31,32]:

$$i \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = (\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) (1 + |\Psi_n|^2) + \Omega\Psi_n. \quad (65)$$

Использованный в записи (65) сдвиг частоты $\Omega = \Omega_0 + 2$ несуществен, и мы выполним его для удобства ссылок на публикацию [32], в которой это уравнение обсуждается с интересной для нас точки зрения.

Если $\Omega = \text{const}$, то линеаризованное уравнение характеризуется законом дисперсии типа (8)

$$\omega = \Omega + \varepsilon(k), \quad \varepsilon(k) = -2 \cos k. \quad (66)$$

Уравнение (65) имеет два аддитивных интеграла движения:

$$N = \sum_n \ln (1 + |\Psi_n|^2), \quad (67)$$

играющий роль нормы волновой функции, и

$$\mathcal{H} = E + \Omega N, \quad E = - \sum_n (\Psi_n \Psi_{n+1}^* + \Psi_n^* \Psi_{n+1}). \quad (68)$$

Последний может рассматриваться как энергия, или гамильтониан, системы. Однако гамильтониан (68) порождает уравнение (65) согласно обычному определению

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = \left\{ \mathcal{H}, \Psi_n \right\}$$

со скобками Пуассона, определяемыми нестандартным образом:

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi_m, \Psi_n^* \right\} &= i (1 + |\Psi_n|^2) \delta_{mn}, \\ \left\{ \Psi_m, \Psi_n \right\} &= \left\{ \Psi_m^*, \Psi_n^* \right\} = 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Естественно, что в однородной цепочке благодаря трансляционной периодичности существует очевидная симметрия, связанная со смещением на

период решетки, т.е. с переходом $n \rightarrow n + 1$. Обозначим через T оператор такого смещения:

$$T\Psi_n = \Psi_{n+1}.$$

Его собственные функции $\exp(ikn)$ отвечают собственным значениям $\exp(ik)$ ($-\pi < k < \pi$, где k — квазиволновое число).

Оператор T порождает дополнительный аддитивный интеграл движения $\sum_n \Psi_n^* T\Psi_n$, который удобно представить в виде

$$\begin{aligned} S &= -i \sum_n [\Psi_n^*(\Psi_{n+1} - \Psi_n) - \Psi_n(\Psi_{n+1}^* - \Psi_n^*)] = \\ &= -i \sum_n \Psi_n^* \Psi_{n+1} - \Psi_n \Psi_{n+1}^* = -i \sum_n \Psi_n^*(\Psi_{n+1} - \Psi_{n-1}). \end{aligned} \quad (70)$$

Величина $j_n = -i [\Psi_n^*(\Psi_{n+1} - \Psi_n) - \Psi_n(\Psi_{n+1}^* - \Psi_n^*)]$ в дискретной цепочке есть аналог плотности потока частиц в сплошной среде. Поэтому S имеет смысл полного количества движения в возбужденной цепочке. Рассмотрим стационарное решение уравнения (65) типа $\Psi_n(t) = \Phi_n^\omega(t) \exp(ikn - i\omega t - i\theta)$, где $\Phi_n^\omega(t)$ — вещественная функция; θ — постоянная произвольная фаза. Функция Φ_n и соотношение между ω и k определяются двумя вещественными уравнениями:

$$(\Omega_0 - \omega)\Phi_n = \cos k (\Phi_{n+1} + \Phi_{n-1})(1 + \Phi_n^2), \quad (71)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln (1 + \Phi_n^2) = -2 \sin k \Phi_n (\Phi_{n+1} - \Phi_{n-1}). \quad (72)$$

Солитонным решениям отвечает функция Φ_n , исчезающая на бесконечности: $\Phi_n = 0$ при $n \rightarrow \pm \infty$.

Интегралы движения N , E и S зависят как от вида функции Φ_n , так и от величины k :

$$N = \sum_n \ln [1 + \Phi_n^2], \quad (73)$$

$$E = -2 \cos k \sum_n \Phi_n \Phi_{n+1}, \quad (74)$$

$$S = 2 \sin k \sum_n \Phi_n \Phi_{n+1}. \quad (75)$$

Рассмотрим малые изменения интегралов движения, связанные с малыми вариациями волновой функции Ψ , т.е. с малыми вариациями Φ_n и малыми изменениями волнового числа k . Из (71) и (73) следует

$$(\Omega - \omega)\delta N = \cos k \sum_n (\Phi_{n+1} + \Phi_{n-1})\delta\Phi_n. \quad (76)$$

Аналогично из (74)–(76), а также из (68) получаем

$$\delta\mathcal{H} = \omega\delta N + S\delta k. \quad (77)$$

Видим, что параметры решения ω и k связаны двумя динамическими уравнениями Гамильтона:

$$\omega = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial N} = \Omega + \frac{\partial E}{\partial N}, \quad S = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial k} = \frac{\partial E}{\partial k}, \quad (78)$$

если рассматривать гамильтониан как функцию независимых переменных N и k : $\mathcal{H} = \mathcal{H}(N, k)$.

Если уравнение (65) имеет стационарное локализованное решение, перемещающееся вдоль цепочки со скоростью V , то следует ожидать, что аналогично ситуации с континуальным нелинейным уравнением Шредингера его вещественная амплитуда имеет вид

$$\Phi_n(t) = \Phi(n - Vt). \quad (79)$$

На этой основе в работе [33] предложено следующее решение:

$$\Phi(x) = A \operatorname{cn} [\beta (x - x_0, \kappa)], \quad (80)$$

где $A = \text{const}$, а $\operatorname{cn}(z, \kappa)$ — эллиптический косинус Якоби, параметр которого κ лежит в интервале $(0 < \kappa < 1)$. При $\kappa \ll 1$ эллиптический косинус переходит в тригонометрический косинус и (80) превращается в решение линейного уравнения. В обратном предельном случае ($\kappa \rightarrow 0$) происходит переход $\operatorname{cn}(z, \kappa) \rightarrow 1/\operatorname{ch}(z) = \operatorname{sech}(z)$ и мы получаем решение

$$\Psi_n(t) = \operatorname{sh}(\beta) \operatorname{sech}[\beta(n - Vt - x_0)] \times \exp(ikn - i\omega t + i\theta), \quad (81)$$

где $x_0, \theta = \text{const}$, а параметры β, V, ω и k связаны формулами:

$$\omega = \Omega - 2 \operatorname{ch}(\beta) \cos k. \quad (82)$$

и

$$V = (2/\beta) \operatorname{sh}(\beta) \sin k. \quad (83)$$

Если солитонное решение действительно имеет вид (81), то интегралы движения инвариантны относительно непрерывных трансляций, поэтому их можно вычислить, заменив в (73)–(75) суммы интегралами: $\sum_n \dots = \int dn \dots$. Тогда окажется, что

$$N = 2\beta, \quad E = -4 \operatorname{sh}(\beta) \cos k, \quad S = 4 \operatorname{sh}(\beta) \sin k. \quad (84)$$

Следовательно, три из четырех параметров β, V, ω и k определяются фиксированными интегралами движения, а четвертый (квазиволновое число k) остается свободным. Мы видим, что ширина солитона $\lambda = 1/\beta$ определяется только величиной N , а энергия солитона и его скорость являются периодическими функциями k (как и положено в однородной периодической структуре).

Ясно, что соотношение (82) следует из первого уравнения Гамильтона (78), а второе уравнение Гамильтона вместе с (83) приводит к выводу, что

$$S = NV. \quad (85)$$

Результат (85) вполне согласуется с представлением об S как о полном количестве движения.

Наличие соотношения (85) позволяет придать гамильтоновым формулам (77) и (78) более привычный вид. Введем вместо k новую независимую переменную $P = Nk$ (полный квазиимпульс возбужденной цепочки) и будем считать, что новый гамильтониан \mathcal{E} есть функция независимых переменных P и N [$\mathcal{E}(N, P) = \mathcal{H}(N, P/N)$]. Тогда формулы (77) и (78) заменятся на

$$\delta\mathcal{E} = (\omega - kV)\delta N + V\delta P, \quad (86)$$

$$\omega - kV = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial N}, \quad V = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial P},$$

где $\omega - kV$ есть частота солитона в системе координат, движущейся со скоростью V .

Вернемся к периодической зависимости скорости солитона от k , которая может стать причиной блоховских осцилляций солитона в неоднородной цепочке, где не сохраняется квазиволновое число k . Предположим, что нижняя граница спектра малых колебаний, т.е. величина Ω , слабо меняется вдоль цепочки: $\Omega = \Omega_n$. На малых интервалах длины цепочки эту зависимость можно считать линейной:

$$\Omega = \Omega_n \equiv \Omega_0 + \eta n, \quad (87)$$

вводя малый градиент η функции Ω_n . Гамильтониан, порождающий уравнение типа (65) с $\Omega = \Omega_n$, имеет вид [33]

$$\mathcal{H} = E + \sum_n \Omega_n \ln(1 + |\Psi_n|^2) =$$

$$= E + \Omega_0 N + \eta \sum_n n \ln(1 + |\Psi_n|^2), \quad (88)$$

где последнее слагаемое описывает неоднородный потенциал, в поле которого движется солитон.

Используя представление $\Psi_n = \Phi_n^\omega \exp[i(kn - \omega t - \Omega_0 t)]$, записываем уравнение, обобщающее (71):

$$(\eta n - \omega) \Phi_n^\omega = \cos k (\Phi_{n+1}^\omega + \Phi_{n-1}^\omega) [1 + (\Phi_n^\omega)^2]. \quad (89)$$

По поводу решений уравнения (89) можно повторить то, что было сказано в случае (11): решение уравнения (89) является функцией одной переменной $z = n - \omega/\eta$, поэтому оно будет одним и тем же при разных парах n и ω , удовлетворяющих требованию $z = \text{const}$. Но последнее возможно при условии, аналогичном (13):

$$\omega = m\eta, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2. \quad (90)$$

Следовательно, среди решений уравнений (72) и (89) существует система осциллирующих стационарных солитонов — серия решений, отвечающих «лестнице Ванье–Штарка» (90). Такие решения можно представить как

$$\Psi_n^m = \Phi_{n-m} \exp[ik(n-m) - i(\Omega_0 + m\eta)t]. \quad (91)$$

Солитоны этой серии с различными номерами m имеют одинаковые профили со смещенными на m узлов центрами.

Дальнейшие аналитические вычисления требуют знания явного решения уравнений (72) и (89). В работе [33] приведены точные решения для конкретного случая (87). Однако нам хотелось бы изложить приближенный метод анализа ситуации, который может быть использован и при более сложных потенциалах Ω_n .

Итак, если градиент η мал, то подобное решение можно найти в так называемом адиабатическом приближении, которое хорошо оправдало себя в случае континуальных систем. Если $\eta \ll \Omega_0$, то солитон чувствует только локальное постоянное значение Ω_n в точке нахождения его центра. Поэтому можно считать, что его форма по-прежнему описывается решением типа (81), в котором параметры k и V слабо зависят от времени. Положив в (91) $m = 0$, запишем

$$\Psi_n^0 = \Phi(n - X(t)) \exp[i(kn - \varphi(t) - \Omega_0 t)], \quad (92)$$

где $X(t)$ — координата центра солитона, а определение его скорости V и частоты ω очевидны:

$$V = dX/dt, \quad \omega = d\varphi/dt.$$

Убедимся прежде всего в том, что неоднородный потенциал (последнее слагаемое в (88)) приводит к несохранению полного количества движения S и определяет уравнение движения квазиволнового числа k . Исходя из (75), вычислим производную по времени от S :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = \{ \mathcal{H}, S \} = \eta \sum_n n [\Psi_n^* (\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) + \\ + \Psi_n (\Psi_{n+1}^* + \Psi_{n-1}^*)]. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (91) и переходя от суммирования к интегрированию, получаем

$$\frac{dS}{dt} = 2\eta \cos k \int_{-\infty}^{+\infty} n \Phi(n) [\Phi(n+1) - \Phi(n-1)] dn. \quad (93)$$

Оставляя главные члены в разложении по η , можем в правой части (93) использовать решение уравнений (72) и (89), где $\Omega = \Omega_0 = \text{const}$. Учитывая (72) и замечая, что $\partial\Phi/\partial t = -V(d\Phi/dn)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = \eta \operatorname{ctg}(kV) \int_{-\infty}^{+\infty} n \frac{d}{dn} \ln(1 + \Phi_n^2) dn = \\ = -\eta \operatorname{ctg}(kVN). \end{aligned} \quad (94)$$

В правой части (94) в соответствии с (85) имеем $VN = S$. Кроме того, ясно, что неоднородность величины Ω_n не влияет на факт сохранения N как интеграла движения, поэтому уравнение (94) упрощается:

$$\frac{dV}{dt} = -\eta \operatorname{ctg}(kV).$$

Наконец, воспользуемся связью скорости с волновым числом (83) и приходим к окончательному уравнению

$$\frac{dk}{dt} = -\eta. \quad (95)$$

Следовательно, как и в предыдущих разделах, квазиволновое число солитона в однородном внешнем поле линейно зависит от времени, а скорость солитона испытывает осцилляции с частотой $\omega_B = \eta$.

Амплитуда осцилляций определяется непосредственно из закона сохранения энергии (88) в адиабатическом приближении. Преобразуем неоднородный потенциал в (88):

$$U(X) = \eta \int n \ln [1 + \Phi^2(n - X)] dn, \quad (96)$$

где функция $\Phi(n)$ в принятом приближении определена формулой (80) или (81). Если учесть, что в указанном приближении $\Phi(\xi) = \Phi(-\xi)$, то

$$U(X) = \eta NX(t). \quad (97)$$

Таким образом, оказывается, что полная энергия (88) представима в виде

$$\mathcal{E} = E(N, P/N) + \Omega_0 N + \eta N \quad (98)$$

и может рассматриваться как функция трех независимых переменных N , P и X . Поскольку в сумме (98) от времени зависят только $P = Nk$ и X , производная от волнового числа по времени (95) играет роль одного из канонических уравнений Гамильтона

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X}, \quad \frac{dX}{dt} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P}. \quad (99)$$

Позже мы увидим, что динамические уравнения Гамильтона типа (99) возникают также в теории магнитных солитонов [18,19].

Используя явное выражение (84) для $E(N, k)$ и (97), из условия $\mathcal{H} = \text{const}$ находим зависимость координаты солитона от времени:

$$X(t) = X(0) + \frac{4 \operatorname{sh}(N/2)}{\eta N} [\cos k(t) - \cos k(0)], \quad (100)$$

где зависимость k от времени определяется уравнением (90):

$$k(t) = k(0) - \omega_H t, \quad \omega_H = \eta. \quad (101)$$

Амплитуда пространственных осцилляций солитона равна

$$\Delta X = 4 \operatorname{sh}(N/2)/(\eta N). \quad (102)$$

Она обратно пропорциональна η и резко увеличивается с ростом N . Осцилляции скорости солитона могут быть определены непосредственно с помощью (99) либо путем дифференцирования (100) по времени:

$$V = \frac{dX}{dt} = \frac{4 \operatorname{sh}(N/2)}{N} \sin k(t). \quad (103)$$

Амплитуда скорости солитона (103) не зависит от η .

Любопытно рассмотреть последние формулы в линейном пределе $N \rightarrow 0$. В случае $k(0) = 0$ формула (99) сводится к

$$X(t) = X(0) + (2/\eta) \cos \eta t = X(0) - \varepsilon(\eta t)/\eta, \quad (104)$$

где зависимость $\varepsilon(k)$ определена формулой (66). Легко убедиться, что (104) аналогично (37) (заметим, что F и η , по определению, имеют разные знаки).

Формула (103) преобразуется в выражение $V = -2 \sin(\eta t)$, аналогичное (40) при $\alpha = 1$.

Используя (98) и (86), мы могли бы найти осцилляции частоты солитона ω . Однако проще привести полученное в [33] выражение для фазы $\varphi(t)$, определяющей явный вид обсуждаемого осциллирующего солитона:

$$\Psi_n^0 = \operatorname{sh} \beta \operatorname{sech} [\beta(n - x(t))] \exp(-i\varphi(t) - \Omega_n t), \quad (105)$$

$$\varphi(t) = -(4/\eta) \operatorname{ch}(N/2) \sin k(t). \quad (106)$$

Естественно, существует бесконечная серия осциллирующих солитонов, отвечающая «лестнице Ванье-Штарка» ($m \neq 0$). Действительно, подставляя (106) в (91), получаем вместо (92) общее выражение

$$\Psi_n^m = \Phi[n - m - X(t)] \exp\{i[kn - \varphi(t) - \Omega_0 t]\}, \quad (107)$$

демонстрирующее наличие серии одинаковых солитонных решений со смещенными центрами.

Выполненное в [33] численное интегрирование уравнения (64) в случае однородного поля (87) прекрасно иллюстрирует блоховские осцилляции солитона. На рис. 7 показаны осцилляции солитона при противоположных по знаку начальных скоростях движения. Для сравнения приведены расчеты эволюции солитона стандартного дискретного НУШ (64) в однородном поле (рис. 8). Хотя можно говорить о колебательном движении солитона, замечен довольно быстрый его распад — следствие отсутствия полной интегрируемости уравнения (64).

Наконец, в той же работе [32] численно изучена эволюция двухсолитонной динамики (рис. 9), напоминающая процесс периодического расщеп-

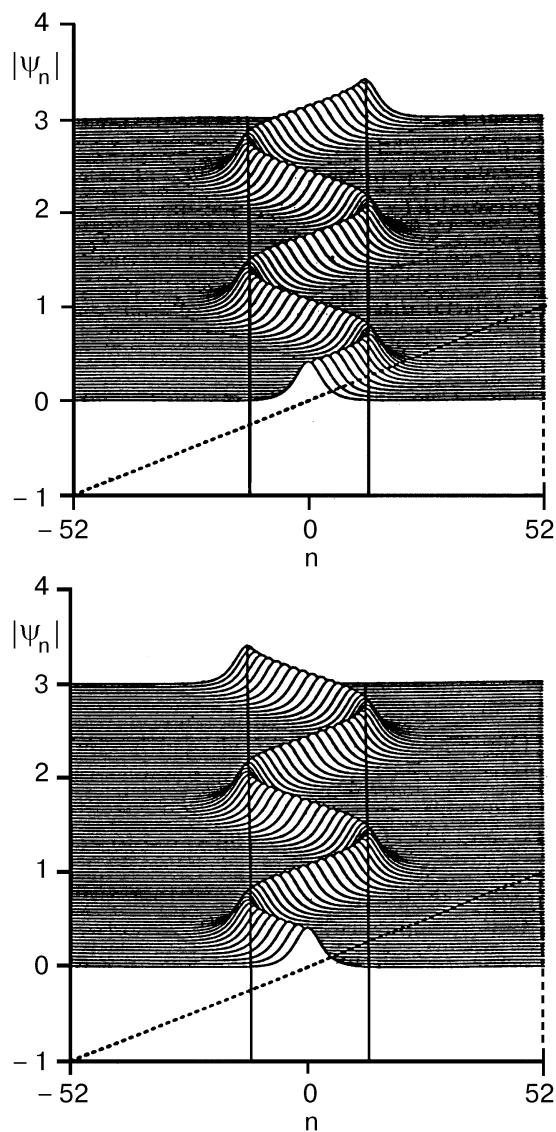


Рис. 7. Блоховские осцилляции солитона в однородном поле при противоположных по знаку начальных скоростях движения (штриховая линия — график потенциала). Вертикальные линии указывают положения точек поворота.

ления и последующего схлопывания волнового пакета линейного дискретного уравнения (см. рис.4).

Специфика поведения изучаемого солитона под действием внешней силы проявляется в его своеобразном поведении в сильно неоднородном поле. Движение солитона в широкой потенциальной яме напоминает колебательное движение обычной частицы в потенциальной яме — это естественное финитное движение с двумя точками поворота. Необычность динамики солитона проявляется в том, что такой же характер имеет его движение на потенциальном «горбе», с которого обычная частица скатывается с ускорением, а солитон совершает вблизи его вершины колебатель-

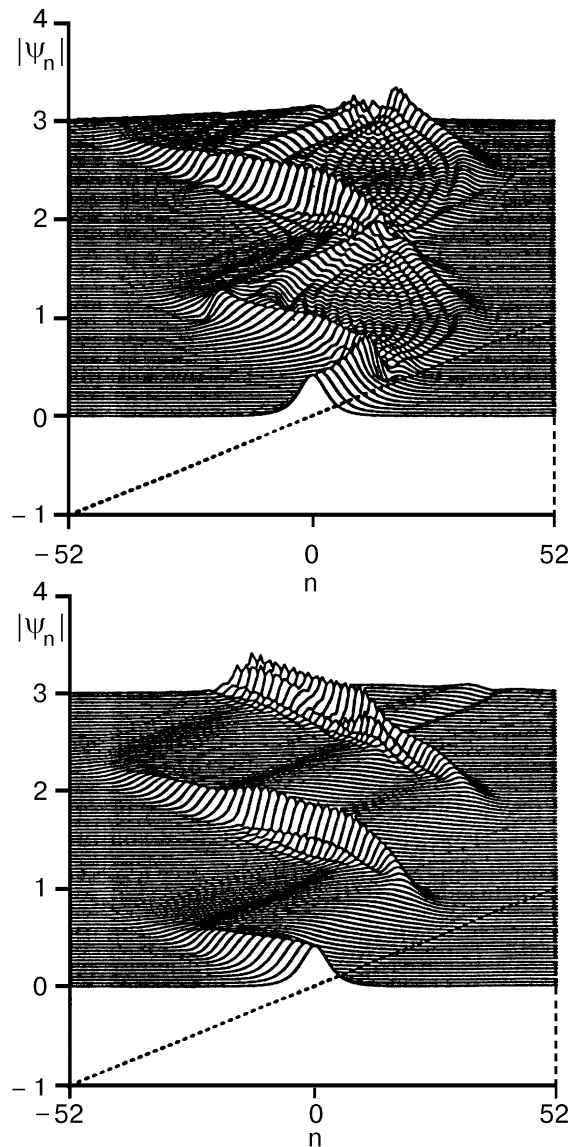


Рис. 8. Стадии распада локализованного (солитоноподобного) возбуждения при неинтегрируемой динамике в однородном поле, график потенциала которого изображен штриховой линией.

ное движение (рис. 10). Последнее есть проявление необычных свойств частицы с периодическим законом дисперсии (в k -пространстве), движущейся в сильно неоднородном внешнем поле (см. Приложение).

Теория блоховских осцилляций солитона дискретного НУШ в постоянном однородном поле (87) может быть обобщена на случай гармонически зависящего от времени однородного поля типа (46), когда временная зависимость градиента η в формуле (87) имеет вид

$$\eta = \eta_1 \cos \omega t, \quad \eta_1 = \text{const}. \quad (108)$$

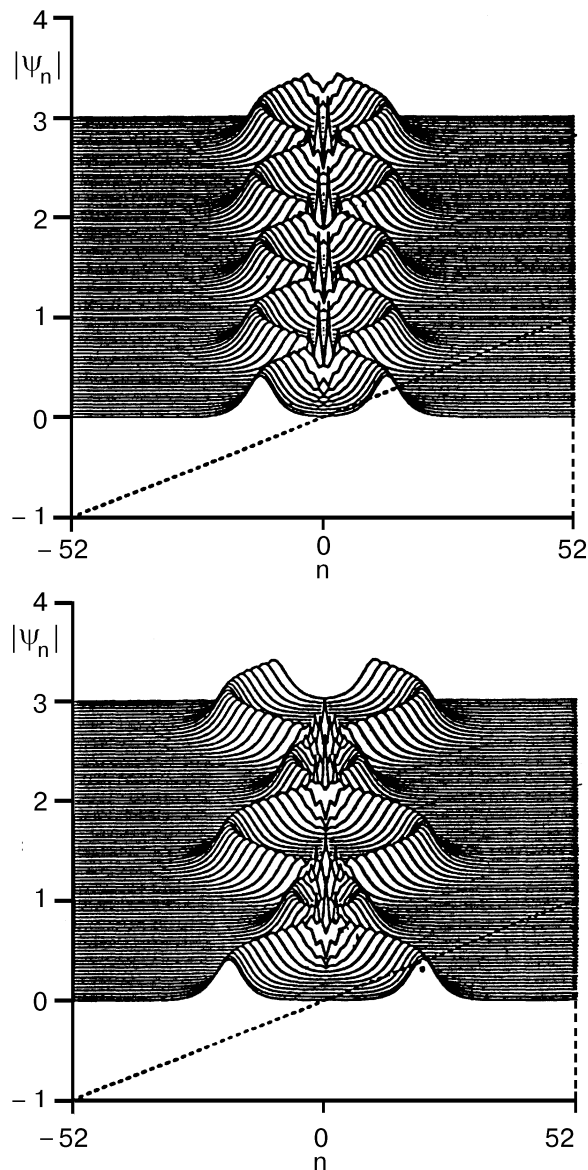


Рис. 9. Возвратно-поступательное движение пары солитонов в однородном поле (штриховая линия – график потенциала), напоминающее движение пакета волн линейного уравнения (см. рис. 4).

Результаты обобщения изложенной выше теории на случай гармонически зависящего от времени однородного поля оказались аналогичными обобщению, приведшему нас к динамической локализации волнового пакета линейного уравнения Шредингера. Конечно, соответствующие формулы для блоховских осцилляций в этом случае будут более сложными, тем не менее ситуация качественно оказалась такой же, как в линейной теории. Отсылая читателя за деталями к [13], изложим резюме этой работы.

Динамические характеристики солитона, включая координату его центра, по-прежнему выражаются в виде рядов функций Бесселя типа (52) с

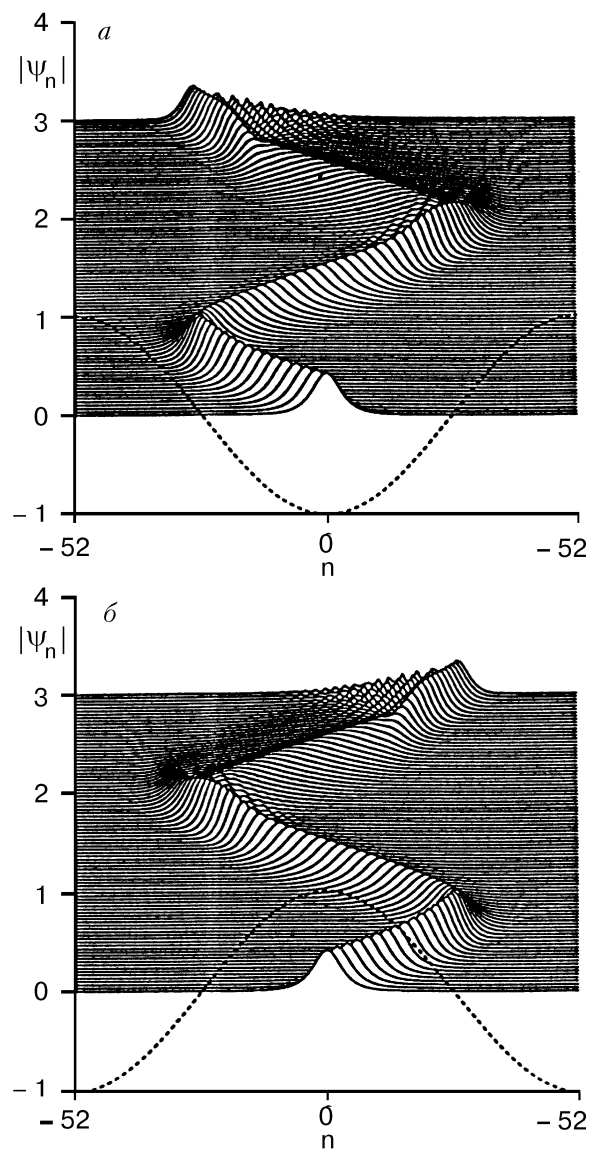


Рис. 10. Осцилляционное движение солитона: в потенциальной яме (штриховая кривая) (а), вблизи потенциального горба (штриховая кривая) (б).

заменой F_1 на η_1 . Если отношение η_1/ω совпадает с нулем функции Бесселя $J_0(z)$, т.е. в определенном смысле выполняются условия параметрического резонанса, то происходит *динамическая локализация* солитона в точности такая же, как рассмотренная выше локализация волнового пакета в дискретной линейной цепочке.

Пример эволюции изучаемой системы в резонансных условиях показан на рис. 11 из работы [13]. Волновая функция в начальный момент времени ($t = 0$) взята в виде комбинации предельно узкого волнового пакета, пропорционального символу Кренекера δ_{n0} , и солитонного пакета, локализованного вблизи узла $n = n_0 = 50$, причем ширина солитона Δn принята малой по сравнению с расстоянием до δ -образного пакета ($\Delta \ll n_0$). С

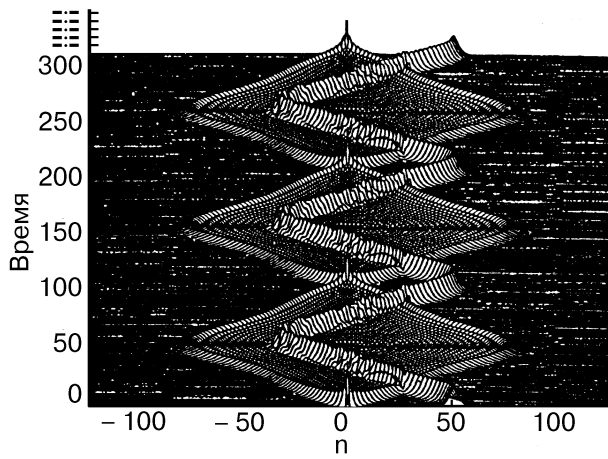


Рис. 11. Взаимодействие предельно узкого пакета, расположенного при $t=0$ в узле $n=0$, и солитона в однородном поле в резонансных условиях.

течением времени узкий пакет, как и в линейной задаче, расщеплялся на два, движущихся в начале цикла в противоположные стороны и создающих хвосты малоамплитудного излучения. Достигнув некоторого максимального размаха колебаний, пара узких волновых пакетов «откатывалась» обратно, собираясь к концу периода в δ -функцию. Солитон заметно взаимодействует с радиацией, находясь в области ее существования, но полностью восстанавливает свою форму, покидая эту область, и совершает регулярные периодические осцилляции.

Если условия резонанса не выполнены ($\eta_0 \neq \omega$), то наблюдается отклонение от строго циклического режима, нарастающее линейно со временем (как должно быть при отходе от условия параметрического резонанса) (рис. 12). Отклонение от резонансной картины проявляется в том, что со временем пара узких волновых пакетов расходится и они затухают, порождая рябь малоамплитудных колебаний. Однако солитон «выживает» и совершает блоховские осцилляции как частица.

2. Блоховские осцилляции магнитных солитонов

2.1. Основные положения теории ферромагнетизма и квазиклассическое квантование магнитных солитонов

Основное положение макроскопической теории ферромагнетизма заключается в утверждении, что состояние магнетика однозначно характеризуется вектором намагниченности \mathbf{M} . Таким образом, динамика и кинетика ферромагнетика диктуются изменениями его намагниченности.

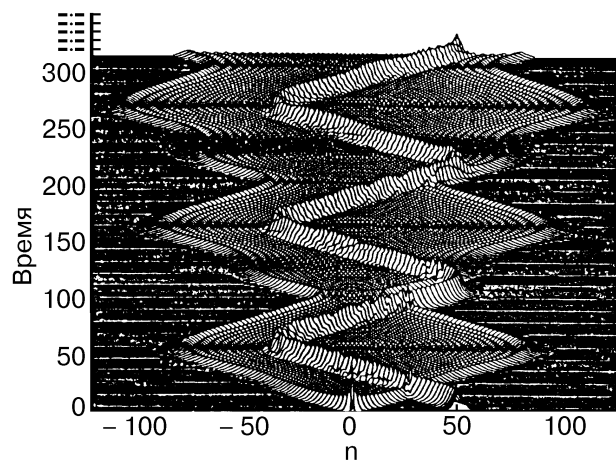


Рис. 12. Нарастание амплитуды колебаний узкого пакета в однородном поле, если условие резонанса не соблюдается ($\eta_0 \neq \omega$). Солитон совершает блоховские осцилляции.

Намагниченность как функция координат и времени $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ есть решение феноменологического уравнения Ландау–Лифшица [34,35]:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{2\mu_0}{\hbar} \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} - \gamma \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}), \quad (109)$$

где μ_0 — магнетон Бора, γ — постоянная релаксации, определяющая прецессионное затухание вектора \mathbf{M} . Эффективное магнитное поле \mathbf{H}_{eff} определяется как вариационная производная энергии ферромагнетика по вектору \mathbf{M} :

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\delta E / \delta \mathbf{M}. \quad (110)$$

Предполагается, что энергия магнетика есть функционал намагниченности \mathbf{M} и ее пространственных производных:

$$E = \int w \{ \mathbf{M}, \partial \mathbf{M} / \partial x_k \} d^3x, \quad (111)$$

где i, k — координатные индексы ($i, k = 1, 2, 3$).

Предложенный в (109) учет диссипации энергии вполне достаточен в случае однородного или слабо неоднородного распределения намагниченности. При описании потерь энергии сильно неоднородных динамических состояний необходим учет эффектов, аналогичных вязкости в гидродинамике и зависящих от градиентов намагниченности. В простейшем случае в правую часть уравнения (109) следует добавить слагаемое, обусловленное диссипативной функцией вида [36,37]

$$F = \frac{1}{2} \gamma_e \int \frac{\partial \mathbf{H}_{\text{eff}}}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{H}_{\text{eff}}}{\partial x_k} d^3x, \quad (112)$$

если вычислять диссипативную силу как вариационную производную от F по аргументу $\partial \mathbf{H}_{\text{eff}} / \partial x_k$. Здесь γ_e — релаксационная константа обменного происхождения.

В случае длинных волн при низких температурах диссипация мала, потому в основном приближении мы будем пренебрегать ею, ограничиваясь уравнением Ландау–Лифшица в форме

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \frac{2\mu_0}{\hbar} \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}. \quad (113)$$

Уравнение (113) обладает интегралом движения $M^2 = \text{const}$, что согласуется с представлением о \mathbf{M} как о равновесной характеристике ферромагнетика. В основном состоянии величина \mathbf{M} совпадает с так называемой спонтанной намагниченностью $M = 2\mu_0 s / a^3$, где s — спин атома; a — межатомное расстояние.

Выражение для плотности энергии w зависит от величины магнитной анизотропии. Мы будем исходить из следующей модели учета анизотропии ферромагнетика:

$$w = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k} + w_{\text{ан}} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}, \quad (114)$$

где первое слагаемое — плотность энергии неоднородного обмена; \mathbf{H} — внешнее магнитное поле; энергия анизотропии $w_{\text{ан}}$ имеет вид

$$w_{\text{ан}} = -\frac{1}{2} \beta_1 \mathbf{M}_x^2 - \frac{1}{2} \beta_3 \mathbf{M}_z^2. \quad (115)$$

Если энергия анизотропии определяется соотношением (115), то соответствующий ферромагнетик называется *двухосным*. Случай $\beta_1 = 0$ соответствует одноосному ферромагнетнику, ось анизотропии которого совпадает с осью z . Анизотропия типа *легкой* оси имеет место, когда $\beta_1 = 0$ и $\beta_3 > 0$. В основном состоянии легкоосного ферромагнетика его вектор намагниченности направлен вдоль оси z .

В квантовой теории ферромагнетизма при рассмотрении магнитных систем данного класса исходным является выражение для спинового гамильтониана. В качестве квантовой модели можем взять систему локализованных электронных спинов с обменным взаимодействием, определяемым моделью Гейзенберга со взаимодействием только ближайших соседей [2]:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{n, n_0} (J_1 S_n^x S_{n+n_0}^x + J_2 S_n^y S_{n+n_0}^y + J_3 S_n^z S_{n+n_0}^z), \quad (116)$$

где \mathbf{S}_n — оператор спина для n -го узла; J_i ($i = 1, 2, 3$) — так называемые *обменные интегралы*; индекс n_0 нумерует ближайших соседей каждого узла решетки.

Переходя к непрерывному описанию намагниченности, определим магнитный момент единицы объема \mathbf{M} через средний спин узла решетки:

$$\mathbf{M} = -\frac{2\mu_0}{a^3} \langle \mathbf{S}_n \rangle = -\frac{2\mu_0}{a^3} \mathbf{S}(x_n), \quad (117)$$

$$\mathbf{S}_n \rightarrow -\frac{a^3}{2\mu_0} \mathbf{M}(x_n).$$

В длинноволновом приближении

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{n+n_0} &= \mathbf{M}(x_n) + x_i(n_0) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{1}{2} x_i(n_0) x_k(n_0) \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x_i \partial x_k} + \dots \end{aligned} \quad (118)$$

Записывая плотность энергии, следует помнить, что обменное взаимодействие изотропно по своей природе, а величины J_1 , J_2 и J_3 принимают близкие значения. Можно положить

$$J_k = J_0 + a^2 j_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (119)$$

где $a^2 j_k$ — малые добавки. Тогда с точностью до a^2 мы получим уравнения (114) и (115), где

$$\alpha = J_0 a^5 / (2\mu_0)^2, \quad (120)$$

и постоянные анизотропии β_1 и β_3 , которые для кубической решетки имеют вид

$$\beta_1 = z \left(\frac{a^3}{2\mu_0} \right)^2 \frac{j_1 - j_2}{a}, \quad \beta_3 = z \left(\frac{a^3}{2\mu_0} \right)^2 \frac{j_3 - j_2}{a}, \quad (121)$$

где z — число ближайших соседей.

Перейдем к угловым переменным θ и φ (рис. 13):

$$M_x + iM_y = M_0 \sin \theta e^{i\varphi}, \quad M_z = M_0 \cos \theta. \quad (122)$$

Уравнения динамики намагниченности в переменных θ и φ имеют вид

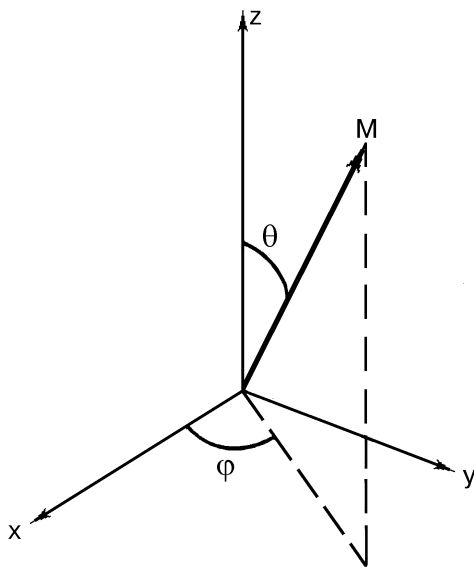


Рис. 13. Угловые переменные φ и θ , определяющие ориентацию вектора намагниченности \mathbf{M} .

$$\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{2\mu_0}{\hbar M_0} \frac{\delta E}{\delta \varphi}, \quad (123)$$

$$\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2\mu_0}{\hbar M_0} \frac{\delta E}{\delta \theta},$$

где в правых частях появляются вариационные производные энергии (111).

Запишем плотность энергии двухосного ферромагнетика в тех же переменных:

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{1}{2} \alpha M_0^2 [(\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2] - \\ & - \frac{1}{2} \beta_1 M_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \beta_3 M_0^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (124)$$

Рассматривая (123) как уравнения для поля (θ, φ) , определим для него функцию Лагранжа, плотность которой есть [38–40]

$$L = \frac{\hbar M_0}{2\mu_0} (1 - \cos \theta) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \omega. \quad (125)$$

При обсуждении свойств динамических солитонов уравнения (123) будут использоваться для изучения динамики локализованных магнитных возбуждений, для которых $\theta = 0$ и $|\nabla \varphi| < \infty$ на бесконечности (рис. 14).

Однородное внешнее магнитное поле \mathbf{H} предполагается направленным вдоль оси z . Тогда

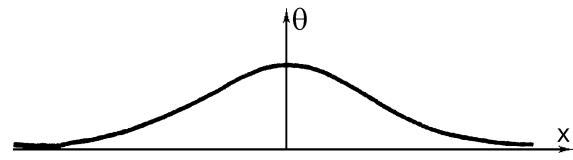


Рис. 14. Распределение угла θ в динамическом магнитном солитоне.

уравнения (123) обладают, очевидно, двумя интегралами движения: полной энергией (111) и полным импульсом поля намагниченности

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & - \int \frac{\partial L}{\partial(\partial \varphi / \partial t)} \nabla \varphi d^3 x = \\ = & - \frac{\hbar M_0}{2\mu_0} \int (1 - \cos \theta) \nabla \varphi d^3 x. \end{aligned} \quad (126)$$

При описании динамики доменных границ, когда может оказаться, что $\nabla \varphi = 0$, удобно использовать несколько иное определение полевого импульса:

$$\mathbf{P} = - \frac{\hbar M_0}{2\mu_0} \int \varphi \sin \theta \nabla \theta d^3 x. \quad (127)$$

В легкоосном ферромагнетике ($\beta_1 \equiv 0$), плотность энергии которого не зависит от угловой переменной φ , существует дополнительный интеграл движения — z -проекция полного магнитного момента

$$N = \frac{\hbar M_0}{2\mu_0} \int (1 - \cos \theta) d^3 x, \quad (128)$$

имеющая смысл среднего числа спиновых отклонений от основного состояния $\theta = 0$ в локализованном магнитном возбуждении. Если $N \gg 1$, то его можно положить равным целому числу. Требование целочисленности N в классическом соотношении (128) эквивалентно полуклассическому квантованию соответствующего решения рассматриваемых динамических уравнений. При этом N будем называть *числом магнонов* в возбужденном состоянии магнетика [41]. Можно ввести плотность магнонов $n = (M_0/2\mu_0)(1 - \cos \theta)$.

Начнем с анализа динамики магнитного солитона в легкоосном ферромагнетике. Прежде всего заметим, что однородное магнитное поле \mathbf{H} можно исключить из уравнений Ландау–Лифшица путем введения новой угловой переменной $\varphi = \varphi - \omega_{\mathbf{H}} t$,

где $\omega_H = 2\mu_0 H/\hbar$. Поскольку плотность энергии в легкоосном ферромагнетике не зависит от Φ , подобная замена действительно исключает магнитное поле из уравнений. Это позволяет нам рассмотреть сначала случай $H = 0$.

Предположим, что намагниченность зависит от одной пространственной координаты x . Тогда решение уравнений Ландау–Лифшица, описывающее возбуждение, распространяющееся вдоль оси x с некоторой стационарной скоростью, имеет вид

$$\theta = \theta(r - Vt), \quad \varphi = \Omega t + \psi(r - Vt), \quad (129)$$

где \mathbf{V} — скорость солитона; Ω — частота прецессии в системе отсчета, связанной с движущимся солитоном. Если график $\theta(x)$ подобен показанному на рис. 14, то такое решение описывает двухпараметрический динамический солитон. Учитывая, что в этом случае рассматриваемые уравнения обладают дополнительными интегралами движения P и N , можно найти их точное решение в одномерной ситуации и вычислить энергию магнитного солитона [40,41]:

$$E = 4a^2 M_0^2 \sqrt{\alpha\beta} \operatorname{th} \frac{N}{N_1} \left\{ 1 + \frac{\sin^2(\pi P/2P_0)}{\operatorname{sh}^2(N/N_1)} \right\}, \quad (130)$$

где $P_0 = \pi\hbar a^2 M_0/\mu_0$; $N_1 = 2a^2 l_0 M_0/\mu_0$.

Рассматривая изменение энергии (111) при малых вариациях функций θ и φ , мы можем связать такое изменение с вариациями интегралов движения \mathbf{P} и N [40]:

$$\delta E = \hbar\Omega\delta N + \mathbf{V}\delta\mathbf{P}, \quad (131)$$

$$\mathbf{V} = (\partial E/\partial\mathbf{P})_N, \quad \hbar\Omega = (\partial E/\partial N)_{\mathbf{P}}. \quad (132)$$

Первое соотношение в (132) есть каноническое уравнение движения, второе показывает, что $\hbar\Omega$ — это энергия возбуждения одного перевернутого спина в связанном состоянии магнонов.

Наиболее неожиданным следствием (130) является периодическая зависимость энергии солитона от полного импульса \mathbf{P} . В теории твердого тела такая зависимость обычно связывается с дискретностью кристаллической решетки и с существованием квазиимпульса вместо импульса в непрерывной среде. Но мы сформулировали динамические уравнения для непрерывной среды, и в этом неожиданность полученного результата*.

* В работе [42] показано, что отмеченная периодичность закона дисперсии солитона имеет топологическую природу.

Допуская периодическую зависимость энергии от импульса, мы можем ожидать возникновения *блховских осцилляций* при движении магнитного солитона под действием некоторой вынуждающей силы.

2.2. Осцилляционное движение магнитного солитона в легкоосном ферромагнетике

Сохранение полного импульса \mathbf{P} связано с предположением об однородности магнитного поля. Проанализируем теперь ситуацию, когда одномерный динамический солитон движется в магнитном поле с малым градиентом. Если магнитное поле имеет слабую зависимость от координаты, то можно написать

$$H(x) = H_0 + \eta x, \quad \eta = (dH/dx)_0. \quad (133)$$

Тогда производная по времени от уравнения (126) дает

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\hbar M_0}{2\mu_0} \int \left[\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{\partial\theta}{\partial x} - \sin\theta \frac{\partial\theta}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right] dx. \quad (134)$$

После простых вычислений с использованием уравнений движения (123) приходим к уравнению

$$\frac{dP}{dt} = -2\mu_0 \frac{dH}{dx} \int n(x) dx = -2\mu_0 \eta N, \quad (135)$$

где N — интеграл движения, равный числу магнонов в связанном состоянии. Таким образом, квазиимпульс линейно зависит от времени:

$$P(t) = P(0) - 2\eta\mu_0 Nt, \quad P(0) = \text{const.} \quad (136)$$

Найдем теперь полную энергию солитона, движущегося в магнитном поле с малым градиентом η . Присутствие малого градиента может быть учтено как слабое возмущение исходной системы в однородном магнитном поле. В адиабатическом приближении можно считать, что солитон сохраняет свою форму:

$$\theta = \theta[x - X(t)], \quad \varphi = \varphi_0(t) + \psi[x - X(t)], \quad (137)$$

где основные динамические параметры солитона V и Ω имеют вид

$$V = dX/dt, \quad \Omega = d\varphi_0/dt. \quad (138)$$

В этом случае представим полную энергию следующим образом:

$$E = E_0(P, N) + 2\mu_0 (NH_0 + \eta \int n(x)xdx), \quad (139)$$

где $E_0(P, N)$ определяется формулой (130) и

$$\begin{aligned} \int n(x)x dx &= \frac{M_0}{2\mu_0} \int [1 - \cos \theta [x - x(t)]] X dx = \\ &= \frac{M_0 X}{2\mu_0} \int [1 - \cos \theta(\xi)] d\xi = NX. \end{aligned} \quad (140)$$

В последнем преобразовании, как и при рассмотрении случая однородного магнитного поля, $\theta(\xi) = \theta(-\xi)$, где $\xi \equiv x - Vt$. Комбинируя (139) и (140), получаем

$$E = E_0(P, N) + 2\mu_0 NH_0 + 2\mu_0 \eta NX. \quad (141)$$

Энергию E можно рассматривать теперь как функцию трех динамических переменных: P , X и N . Соотношение для производной импульса по времени играет роль одного из канонических гамильтоновых уравнений [18,19]

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial X} \quad \text{и} \quad \frac{dX}{dt} \equiv V = \frac{\partial E}{\partial P}. \quad (142)$$

Запишем выражение для частоты солитона:

$$\hbar\Omega = \frac{\partial E}{\partial N} = \frac{\partial E_0}{\partial N} + 2\mu_0 H_0 + 2\mu_0 \eta X, \quad (143)$$

первое слагаемое в правой части определяется соотношением

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E_0(P, N)}{\partial N} = \\ &= \hbar\omega \left[\frac{\cos^2(\pi P(t)/2P_0)}{\text{ch}^2(N/N_1)} - \frac{\sin^2(\pi P(t)/2P_0)}{\text{sh}^2(N/N_1)} \right], \end{aligned} \quad (144)$$

где $\omega_0 = 2\mu_0\beta M_0/\hbar$ — частота однородного ферромагнитного резонанса.

С другой стороны, выбирая подходящим способом начальную координату солитона, мы можем на основании постоянства полной энергии консервативной системы и формулы (136) найти явную зависимость координаты центра тяжести солитона от времени:

$$X(t) = X(0) + \frac{W_0 [\cos(\pi P(t)/P_0) - \cos(\pi P(0)/P_0)]}{\eta\mu_0 N \text{sh}(2N/N_1)}, \quad (145)$$

где зависимость $P(t)$ от времени задана выражением (136). Если $P(0) \neq 0$, то на малых временах, пока $\eta\mu_0 N t \ll P_0$, имеем равномерное движение солитона:

$$X(t) = X(0) + \frac{2\pi W_0 \sin(\pi P(0)/P_0)}{P_0 \text{sh}(2N/N_1)} t. \quad (146)$$

При больших временах ($\eta\mu_0 N t > P_0$) наблюдается осцилляционное движение солитона. Амплитуда пространственных осцилляций, как следует из (145), равна

$$\Delta X = W_0 / [\eta\mu_0 N \text{sh}(2N/N_1)] \quad (147)$$

и, естественно, обратно пропорциональна градиенту магнитного поля и резко уменьшается с ростом N , т.е. размеров солитона. Скорость солитона

$$V(t) \equiv \frac{dX(0)}{dt} = V_m \frac{\sin(\pi P(t)/P_0)}{\text{sh}(2N/N_1)}, \quad (148)$$

где $V_m = 2gM_0\sqrt{\alpha\beta}$ — минимальная фазовая скорость спиновых волн ($g = 2\mu_0/\hbar$).

Поскольку полный импульс солитона есть линейная функция времени (136), должны наблюдаться гармонические колебания солитона под действием постоянного градиента магнитного поля с частотой $\omega_B = 4\mu_0\eta l_0 N / (\hbar N_1)$.

Периодическая зависимость скорости и частоты солитона от времени представляет собой специальный тип блоховских осцилляций в динамике намагниченности.

Численное моделирование движения солитона, описываемое уравнениями Ландау–Лифшица при наличии малого градиента магнитного поля [19], результаты которого представлены на рис. 15, демонстрирует достаточно хорошее согласие с расчетами по формулам адиабатического приближения. Однако более точные расчеты показывают, что вблизи правой точки поворота солитон излучает спиновую волну малой амплитуды, частота которой соответствует частоте прецессии намагниченности в солитоне. Это явление связано с нарушением адиабатичности и описывается поправками более высокого порядка по градиенту магнитного поля.

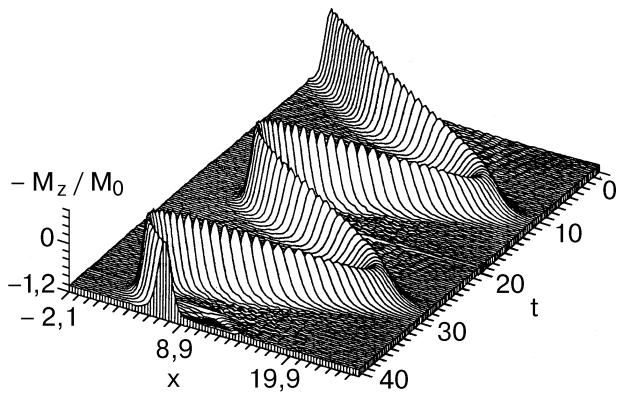


Рис. 15. Блоховские осцилляции магнитного солитона в поле градиента магнитного поля.

Мы проанализировали колебательное движение магнитного солитона при условии малости градиента η магнитного поля. Движение магнитного солитона остается колебательным и при произвольном η . Исследования, касающиеся квазиклассического движения солитона в неоднородном внешнем поле, показывают [19], что ситуация с динамикой солитона аналогична таковой при рассмотрении квазиклассического движения обычной частицы в неоднородном потенциальном поле.

При учете диссипации картина блоховских осцилляций, безусловно, будет отличной от рассмотренной. Если учесть одновременно и наличие градиента магнитного поля, и диссипации, то, как мы увидим ниже, появляется возможность трансляционного движения магнитного солитона со стационарной скоростью.

2.3. Влияние диссипации на блоховские осцилляции магнитного солитона

Приступая к описанию релаксации блоховских осцилляций магнитного солитона в слабо неоднородном магнитном поле, следует отметить, что торможение двухпараметрического солитона в однородном магнитном поле успешно изучалось в работе [37] на основе уравнений Ландау–Лифшица с диссипацией.

Предполагая релаксацию слабой и, соответственно, релаксационные константы малыми, можно описать эволюцию солитона при наличии затухания с помощью адиабатической теории возмущений. Чтобы упростить изложение, ограничимся учетом релаксационных процессов релятивистского происхождения, т.е. будем исходить из уравнения (1). Полный учет диссипативных процессов как релятивистского, так и обменного характера и детали задачи описаны в [20]. При этом не только P , но и величины E и N перестают быть

интегралами движения. Записывая производные от них по времени с учетом их определений и диссипации, можно вычислить скорости изменения со временем всех этих величин.

Из вида формулы (130), а также основных соотношений, определяющих осцилляционную динамику солитона, следует, что энергия и импульс солитона, а также число магнонов входят лишь как безразмерные отношения E/E_0 , $\pi P/2P_0$ и N/N_1 , где $E_0 = 4a^2 M_0^2(\alpha\beta)^{1/2}$, $P_0 = \pi\hbar a^2 M_0/\mu_0$ и $N_1 = 2a^2 l_0 M_0/\mu_0$. В дальнейшем будем обозначать буквами E , P и N именно эти отношения. Более того, используем безразмерные переменные: координату, измеренную в единицах магнитной длины l_0 , и частоту, измеренную в единицах $1/\omega_0$. Наконец, под безразмерным градиентом магнитного поля η будем понимать величину $2\mu_0 l_0 \eta/\hbar\omega_0$.

С учетом определений (111), (114), (125) и (127), а также основного уравнения (109) несложно найти следующие производные по времени:

$$\frac{dP}{dt} = -\eta N - 2\gamma (VQ_{\text{ex}} - \tilde{\omega}R), \quad (149)$$

$$\frac{dN}{dt} = -2\gamma (\tilde{\omega}Q_{\text{an}} - VR), \quad (150)$$

$$\frac{dE}{dt} = -2\gamma (V^2Q_{\text{ex}} - 2V\tilde{\omega}R + \tilde{\omega}^2Q_{\text{an}}), \quad (151)$$

где $\tilde{\omega}$ — частота солитона, сдвинутая за счет однородного магнитного поля; $\tilde{\omega} = \omega + H_0/(\beta M_0)$, и введены следующие функции:

$$R = \frac{1}{8} \int \sin^2 \theta \frac{\partial \psi}{\partial x} dx, \quad (152)$$

$$Q_{\text{an}} = \frac{1}{8} \int \sin^2 \theta dx, \quad (153)$$

$$Q_{\text{ex}} = \frac{1}{8} \int \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (154)$$

Определения (153) и (154) согласованы с выражениями для энергии анизотропии и обменной энергии

$$E_{\text{an}} = \beta Q_{\text{an}}, \quad E_{\text{ex}} = \beta Q_{\text{ex}}.$$

Поскольку в адиабатическом приближении солитонное решение сохраняет свою функциональную форму, в полученные выражения следует подставить точное солитонное решение уравнений

Ландау–Лифшица при $\eta = 0$ и $\gamma = 0$, считая его параметры плавно зависящими от времени. Соответствующее двухпараметрическое решение уравнений (109) имеет вид [41]

$$\varphi = \tilde{\omega}t + \psi(x - Vt); \quad \frac{d\psi}{dx} = -\frac{C}{\cos^2(\theta/2)}; \quad (155)$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{A + B}{\operatorname{ch}^2[\kappa(x - V)] - B}.$$

Параметрами решения являются величины ω и V , которые в адиабатическом приближении могут быть выражены через интегралы движения P и N :

$$\omega = \frac{\cos^2 P}{\operatorname{ch}^2 N} - \frac{\sin^2 P}{\operatorname{sh}^2 N}; \quad V = 2 \frac{\sin 2P}{\operatorname{sh} 2N}. \quad (156)$$

Постоянные A , D , C и параметр κ являются функциями ω и V . Однако в дальнейшем их удобно выразить через сохраняющиеся (при $\eta = 0$ и $\gamma = 0$) величины N и P :

$$A = \operatorname{sh}^2 N, \quad B = \sin^2 P, \quad C = \frac{\sin 2P}{\operatorname{sh} 2N}, \quad (157)$$

$$\kappa = \left(1 + \frac{B}{A}\right) \operatorname{th} N. \quad (158)$$

Форма записи уравнений (149)–(154) чрезвычайно удобна для изучения динамики солитона больших размеров ($N \gg 1$) с исчезающе малыми V и ω . При этом возможно описать релаксацию такого солитона, даже не имея явного решения в общем случае. Считая, что вынесенные множителями V и ω в (149)–(151) уже дают основную зависимость от этих параметров, можно вычислить (152)–(154) при $V \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow 0$, т.е. фактически в статическом режиме. Но тогда, как известно [41], $\psi = 0$ и функция $\theta = \theta(x)$ описывает профиль широкого одномерного домена с обратным направлением намагниченности на бесконечности ($\theta \approx \pi$ внутри домена и $\theta = 0$ на бесконечности). Ширина домена $\Delta x \approx 2N$, а его края представляют собой две доменные границы, в которых

$$\theta(x) = \theta_0(x) \equiv 2 \operatorname{arctg} \left\{ \exp [\pm (x \mp x_0)] \right\}, \quad (159)$$

где $\pm x_0$ — координаты центров двух доменных границ, $2x_0 = \Delta x$. Поскольку ширина доменной стенки l_0 ограничена и $l_0 \ll \Delta x$, вычисление параметров R , Q_{an} , Q_{ex} в основном приближении тривиально:

$$R = 0, \quad Q_{\text{an}} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \theta_0(x) dx, \quad (160)$$

$$Q_{\text{ex}} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Подставляя (159) в (160), находим $Q_{\text{ex}} = Q_{\text{an}} = 1/2$.

В случае малых ω и V запись уравнения (151) соответствует обычному определению изменения энергии в диссипативной среде

$$\frac{dE}{dt} = -2F, \quad (161)$$

где релятивистское слагаемое диссипативной функции имеет стандартный вид:

$$F = \gamma(\tilde{\omega}^2 + V^2),$$

который согласован с уравнениями движения (149), (150):

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial V}, \quad (162)$$

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{\omega}}. \quad (163)$$

Здесь E — выражение для энергии солитона в неоднородном магнитном поле [18,19], соответствующее формуле (141) в размерных величинах,

$$E = \kappa + hN + \tilde{\eta}XN, \quad (164)$$

где X — координата центра солитона, а $h = H_0/(\beta M_0)$.

Если условия малости V и ω не выполняются при вычислении R , Q_{ex} и Q_{an} , то необходимо использовать явный вид решения (155). После интегрирования получаем

$$R = -VN/2, \quad (165)$$

$$Q_{\text{an}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \Omega \operatorname{sh} 2N + N\omega \right), \quad (166)$$

$$Q_{\text{ex}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \Omega \operatorname{sh} 2N - N\omega \right), \quad (167)$$

где $\Omega^2 = \omega^2 + V^2$, а ω и V выражены через интегралы движения формулами (156). Уравнения (149), (150) с этими значениями R , Q_{an} и Q_{ex}

определяют плавные изменения параметров солитона P и N со временем, а формула (164) позволяет получить уравнения для координаты центра солитона $X(t)$.

Для нахождения $X(t)$ дифференцируем соотношение (164) по времени и используем уравнения (149)–(151). В итоге после несложных преобразований находим

$$\frac{1}{N} \frac{d(NX)}{dt} = 2 \frac{\sin(2P)}{\text{sh}(2N)}, \quad (168)$$

где правая часть совпадает с выражением (156) для V , но теперь P и N являются функциями времени. Отметим, что если положить в уравнениях (149), (150) и (164) $\gamma = 0$ (а значит, считать $N = \text{const}$), то мы приходим к описанию блоховских осцилляций магнитного солитона, полученному в работах [18,19]. В случае же $\gamma = 0$, но $\eta = 0$, уравнения (149)–(151) вместе с (165)–(167) совпадают с аналогичными в [37].

В общем случае произвольных значений параметров ω и V (или N , P) система уравнений (149)–(151), описывающая релаксацию солитона, может быть исследована только численно.

Однако при $N \gg 1$ и $H_0 = 0$ (что эквивалентно V , $\omega \ll 1$) можно продвинуть аналитические исследования далее. В этом случае уравнения (149), (150) и (168) в главном приближении приобретают вид

$$\frac{dP}{dt} = -\tilde{\eta}N - 4\gamma e^{-2N} \sin(2P), \quad (169)$$

$$\frac{dN}{dt} = -4\gamma e^{-2N} \cos(2P), \quad (170)$$

$$\frac{dX}{dt} = 4 e^{-2N} \sin(2P) + 4\gamma \frac{1}{N} e^{-2N} \cos(2P) X. \quad (171)$$

Нам представляется наиболее интересным рассмотрение случая слабой релаксации, в котором ожидается увидеть лишь слегка модифицированные блоховские осцилляции. Введем для сокращения записи параметр $\eta_c = 4\gamma \exp(-2N_0)/N_0$, где N_0 — начальное значение числа N , и назовем слабой релаксацией случай $\eta_c \ll \eta$. При этом можно найти решения уравнений (169) и (170) путем итераций и представить их в виде рядов по степеням параметра η_c/η :

$$P = P(0) - \frac{1}{2}v_0 t - \frac{2\gamma}{\eta N_0} \exp(-2N_0) [\cos(v_0 t) - 1], \quad (172)$$

$$N = N_0 - \frac{2\gamma}{\eta N_0} \sin(v_0 t),$$

где $v_0 = 2\eta N_0$ — частота блоховских осцилляций солитона. Естественно, безразмерная частота v_0 в точности соответствует введенной в предыдущем разделе частоте блоховских осцилляций солитона ω_B . Члены более высоких порядков по степеням параметра η_c/η пропорциональны высшим гармоникам относительно частоты v_0 .

Отметим, что в среднем за период блоховского колебания солитона ($T = 2\pi/v_0$) параметр N остается постоянным и практически равным своему начальному значению N_0 . Используя полученные результаты для P и N и уравнение (171), несложно найти также два первых члена разложения $X(t)$ по параметру ($\gamma \exp(-2N_0)/N_0$):

$$X(t) = \frac{4}{v_0} e^{-2N_0} \cos(v_0 t) - \frac{4\gamma}{\eta v_0 N_0} \exp(-4N_0) \sin(2v_0 t) - \frac{8\gamma}{\eta N_0} \exp(-4N_0) t, \quad (173)$$

где в последнем члене мы опять не учитываем вклад, имеющий дополнительную малость по $1/N_0$. Первое слагаемое в этом выражении совпадает с результатом, полученным в [18,19], и описывает блоховские колебания магнитного солитона.

Учет затухания, как показывает формула (173), приводит к двум эффектам. Во-первых, колебания центра солитона, оставаясь периодическими с частотой $2v_0$, перестают быть гармоническими: в $X(t)$ появляются высшие гармоники. Во-вторых, возникает дрейф центра солитона с постоянной скоростью, пропорциональной затуханию:

$$V_{\text{dr}} = -\frac{8\gamma}{\eta N_0} e^{-N_0}. \quad (174)$$

Описанное поведение солитона напоминает упомянутый выше эффект Шапиро в теории джозефсоновских переходов [3].

Поскольку все характеристики солитона периодически зависят от P , а N , как уже отмечалось, есть периодическая функция времени, в рассматриваемом случае $\eta \gg \eta_c$ затухания солитона вообще не происходит. Согласно формуле (161), уменьшение его энергии пропорционально лишь квадрату Ω и точно совпадает с изменением энергии, связанным с дрейфом центра солитона в

область более слабых магнитных полей. Однако необходимо помнить, что по мере дрейфа постепенно изменяется величина поля H_0 . Приближение $H_0 = 0$ справедливо лишь до тех пор, пока $h < \Omega$. Это приводит к следующей оценке времени дрейфа солитона, которое совпадает по порядку величины и со временем его жизни τ : $\tau \sim N_0/(\lambda\Omega)$. При этом изменение h на масштабе, сравнимом с амплитудой блоховских колебаний Ω/v_0 , относительно мало: $\Delta h \sim \Omega/N_0 \ll \Omega$, следовательно, формулы (172)–(174), а значит, и качественные выводы о характере блоховских осцилляций солитона останутся в силе.

Укажем теперь условия, при которых осуществляется рассмотренный режим слабого затухания. Для применимости адиабатической теории возмущений характерная частота в солитоне Ω должна быть значительно больше частоты блоховских колебаний $2v_0$, т.е. необходимо выполнение следующих неравенств:

$$1 \gg 4e^{-2N_0} \gg 2v_0.$$

Это ограничивает градиент магнитного поля сверху, поскольку $v_0 = \eta N_0$. Условие же $\eta \gg \eta_c$ дает

$$2v_0 \gg 8\gamma e^{-2N_0}.$$

Иными словами, если $\gamma \ll 1$, то имеется интервал значений η , в котором должны наблюдаться слабо затухающие блоховские колебания солитона. Интересно, что даже если $\eta \geq \eta_c$, то солитон успеет совершить много колебаний ($N_0\eta/\eta_c$), прежде чем он исчезнет. Наконец, отметим, что за время своей жизни солитон сместится из-за дрейфа на расстояние порядка $\exp(-2N_0)/\eta \ll 1$, которое значительно превосходит как размер солитона N_0 , так и амплитуду его блоховских колебаний $2 \exp(-2N_0)/(N_0\eta)$.

В случае, когда $\Omega \ll 1$, но $H_0 \neq 0$ ($h > \Omega$), все перечисленные выше качественные результаты сохраняются. Изменяются лишь некоторые количественные характеристики. В частности, условие адиабатичности станет более слабым ($\omega \sim h \gg v_0$), и солитон успеет совершить лишь $N_0(\eta/\eta_c)(\Omega/h)$ блоховских колебаний до своего исчезновения.

Итак, если градиент магнитного поля превосходит критическое значение (но при этом достаточно мал для применимости адиабатического приближения), то блоховские осцилляции солитона существуют и при наличии затухания. Однако эти осцилляции перестают быть гармоническими и, кроме того, появляется дрейф центра

солитона с постоянной скоростью. За время жизни солитон успевает совершить большое число блоховских колебаний, а величина дрейфа значительно превосходит амплитуду этих колебаний.

Если градиент магнитного поля меньше критического, то блоховские колебания полностью исчезают и солитон движется только поступательно, постепенно затухая.

2.4. Макроскопическая теория блоховских осцилляций солитона в двухосном ферромагнетике

В двухосном ферромагнетике плотность энергии явно зависит от угловой переменной Φ , поэтому N перестает быть интегралом движения. Очень важно, что даже в случае одноосного ферромагнетика зависимость плотности энергии от Φ появляется при учете магнитно-дипольного взаимодействия.

Рассмотрим магнетик очень больших размеров и ограничимся решениями, зависящими только от одной пространственной координаты x . Предположим, что образец имеет форму пластины, перпендикулярной оси x , и вне его ($x = \pm \infty$) магнитное поле отсутствует. Тогда граничные условия для нормальной составляющей вектора индукции ($B_x(\pm \infty) = 0$) выделяют единственную отличную от нуля компоненту вектора $\mathbf{H}^{(m)}$, являющуюся решением уравнений магнитостатики

$$H_x^{(m)} = -4\pi M_x. \quad (175)$$

Следовательно, получаем

$$W_m = 2\pi M_x^2. \quad (176)$$

Даже в случае одноосного ферромагнетика энергия (176) обуславливает некоторую эффективную анизотропию в плоскости, перпендикулярной оси анизотропии, если ось x не совпадает с выделенной осью. В частности, если z — ось анизотропии, то для полной магнитной энергии одноосного ферромагнетика получаем

$$W = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 - \frac{\beta}{2} M_z^2 + 2\pi M_x^2. \quad (177)$$

Формально энергия (177) относится к двухосному ферромагнетiku с $\beta_1 = -4\pi$.

Другая особенность двухосного ферромагнетика связана с тем, что внешнее магнитное поле не может быть исключено из уравнений. Поэтому в присутствии магнитного поля и при его отсутствии магнитная система ведет себя совершенно по-

разному. Начнем со случая, когда внешнее магнитное поле равно нулю.

Для упрощения записи динамических уравнений поля намагниченности введем магнитную длину $l_0 = \sqrt{\alpha/\beta_3}$ и частоту однородного ферромагнитного резонанса $\omega_0 = 2\mu_0 M_0 \beta_3 / \hbar$, координату будем измерять в единицах l_0 , а время — в единицах $1/\omega_0$. Тогда уравнения (123) с учетом (124) примут вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \left\{ 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \cos^2 \varphi \right\} \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (178)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \varepsilon \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi - \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0,$$

где $\varepsilon = -\beta_1/\beta_3$ — отношение констант анизотропии.

Простейшим динамическим солитоном в двухосном ферромагнетике является топологический солитон (доменная граница). Решение для доменной границы в двухосном ферромагнетике впервые найдено Уокером [40,44] (см. также [45]). Для границы, перемещающейся со скоростью V , оно имеет вид

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \exp [s (1 + Q \cos^2 \varphi)^{1/2} (x - Vt)], \quad (179)$$

$$\varphi = \text{const},$$

где Q — топологический заряд доменной границы ($Q = \pm 1$) и

$$V = - \frac{Q \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{1 + Q \cos^2 \varphi}}. \quad (180)$$

Если энергия анизотропии (176) связана с учетом магнитно-дипольного взаимодействия в легкоосном ферромагнетике ($\varepsilon = 4\pi/\beta_3$), то доменную границу с $\varphi = \pi/2$ называют блоховской, а неподвижную границу с $\varphi = 0$ — неелевой.

Нетрудно вычислить энергию E и полевой импульс P , приходящиеся на одну элементарную кристаллическую ячейку в плоскости доменной границы. В результате получаем

$$E = E(P) \equiv E_B \sqrt{1 + Q \cos^2 (\pi P / 2P_B)}, \quad (181)$$

где $E_B = 2\beta_3 M_0^2 a^2 \sqrt{\alpha\beta_3}$ — энергия, а $P_B = \pi \hbar M_0 a^2 / (2\mu_0)$ — импульс неподвижной (покоящейся) блоховской границы.

Мы получили периодическую зависимость энергии топологического солитона от его импульса, что является необходимым условием возникновения блоховских осцилляций солитона в однородном поле внешней силы.

После доказательства периодичности зависимости энергии и скорости топологического солитона от полевого импульса при отсутствии магнитного поля следует убедиться, что при включении магнитного поля полевой импульс P перестает быть интегралом движения.

Первое из уравнений (178) при наличии магнитного поля, параллельного оси $0z$, слегка видоизменяется:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \left\{ 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \cos^2 \varphi \right\} \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = h \sin \theta, \quad (182)$$

где $h = H/(\beta_3 M_0)$, а второе уравнение остается неизменным.

Если магнитное поле мало ($H \ll \beta_3 M_0$), то его можно рассматривать как малое возмущение. В адиабатическом приближении решение для доменной стенки по-прежнему имеет вид типа (179), т.е. решения первого уравнения (152) при $\partial\varphi/\partial t = 0$ или уравнения (156) при $\partial\varphi/\partial t = h = 0$:

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \exp [(1 + \varepsilon \cos^2 \varphi)^{1/2} (x - X)] \quad (183)$$

(для определенности примем $Q = 1$). Но теперь координата центра солитона X , а также угол φ зависят от времени. Однако функциональная зависимость полного импульса от φ может быть взята такой же, как и в отсутствие магнитного поля (когда $\varphi = \text{const}$). Поэтому, используя выражение (127), будем считать справедливой формулу

$$P = (\hbar M_0 a^2 / \mu_0) \varphi = (2P_B / \pi) \varphi. \quad (184)$$

Это означает, что зависимость P от времени определяется временной зависимостью угла φ .

В основном приближении из (156) вытекает, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = h. \quad (185)$$

Следовательно, $\varphi = ht$, и в соответствии с формулой (180) скорость солитона $V = dX/dt$ испытывает осцилляции с блоховской частотой $2h$, где в

размерных единицах $h = 2\mu_0 H/\hbar$. С такой же частотой будет осциллировать кинетическая энергия солитона (181), причем эта частота в два раза превышает частоту прецессии вектора намагниченности.

Действительно, пара уравнений (180) и (185) тривиально интегрируется и дает следующий закон осцилляций центра доменной границы:

$$X = \frac{1}{h} \sqrt{1 + \varepsilon \cos^2 ht}, \quad \varphi = ht. \quad (186)$$

Амплитуда осцилляций $\Delta X = (1/h)(\sqrt{1 + \varepsilon} - 1)$. В одной точке остановки доменная граница является чисто блоховской, а в другой — чисто неелевской. Разность энергий этих двух границ $\Delta E = E_B(\sqrt{1 + \varepsilon} - \varepsilon)$ в точности соответствует работе внешней силы $2HM_0a^2$ на длине, равной амплитуде колебания $l_0\Delta X$.

Таким образом, средняя по периоду колебания стенки энергия магнетика сохраняется. Изложенный анализ движения доменной стенки приведен в работах [40,46]. Впервые задача движения доменной границы в магнитном поле рассмотрена Слончевским [14], ограничившим свой анализ случаем $\varepsilon \ll 1$, но при произвольных H . В этом пределе решение динамических уравнений Ландау—Лифшица упрощается:

$$\theta = 2 \arctg \exp(x - X), \quad (187)$$

где

$$\frac{dX}{dt} = -\varepsilon \cos \varphi \sin \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = h. \quad (188)$$

Таким образом, колебательный характер движения доменной границы в однородном магнитном поле сохраняется.

Осцилляторный характер движения доменной границы в постоянном магнитном поле всецело обусловлен периодической зависимостью энергии (181) от импульса границы. Однако при изучении осцилляций динамического солитона в легкоосном ферромагнетике мы уже убедились, что включение в анализ диссипативных процессов разрушает это колебательное движение и приводит к возможности в среднем равномерного движения электрона в постоянном электрическом поле. Подобная ситуация наблюдается и в динамике доменной границы. В работе Слончевского [14] подтверждено, что учет торможения доменной границы, движущейся под действием внешнего магнитного поля, меньшего некоторого критического значения, приводит к возможности стационарного движения доменной границы с по-

стоянной скоростью, т.е. к движению, впервые описанному Уокером [44]. При больших значениях поля может реализоваться либо осциллирующее движение [14], либо усложнение структуры границы [47].

2.5. Динамика солитонов дискретной спиновой системы (квантовое описание)

Результаты изложенной выше теории блоховских осцилляций магнитных солитонов применимы к анализу динамических магнитных явлений в ферромагнетиках, где собственная магнитная длина значительно превышает межатомное расстояние ($l_0 = \sqrt{\alpha/\beta} \gg a$). Наличие указанного неравенства позволяет использовать длинноволновое (континуальное) приближение для описания изучаемых эффектов, поскольку магнитный солитон в такой теории охватывает большое число узлов $1D$ решетки. Однако существуют сильно анизотропные магнитные материалы, в которых распределение неоднородной намагниченности, связанное с изолированным солитоном, распространяется всего на несколько межатомных расстояний. Например, в магнетиках с предельно сильной одноосной обменной анизотропией, так называемых изинговских магнетиках, простейший топологический солитон (доменная стенка) реализуется на одном межатомном расстоянии. Описание солитонов в подобных системах требует явного учета дискретности структуры и квантового характера динамики намагниченности.

Для того чтобы представить результаты в более или менее замкнутом виде, рассмотрим модель, получающуюся путем определенного непрерывного усложнения модели Изинга. Если исходить из гамильтониана Гейзенберга (116), то модель Изинга соответствует учету взаимодействия только ближайших соседей и $J^x = J^y = 0$, а именно, гамильтониану

$$\mathcal{H}_I = -J^z \sum_n S_n^z S_{n+1}^z. \quad (189)$$

Положительный обменный интеграл ($J^z > 0$) отвечает ферромагнетику (ФМ), а отрицательный ($J^z < 0$) — антиферромагнетику (АФМ). Основным состоянием является ферромагнитное упорядочение для ФМ и неелевское упорядочение для АФМ.

Возбуждение изинговской цепочки представляет собой неподвижные доменные стенки. Как известно, возможны два типа доменных стенок, отличающихся эффективным зарядом Q ($Q = \pm 1$). В ФМ в базисе собственных состояний оператора S^z их волновые функции $|m, Q\rangle$ определяются как

$$\Psi_n(m, 1) \equiv |m, 1\rangle = |\dots \overset{m}{\uparrow \uparrow \downarrow \downarrow} \dots\rangle$$

и (190)

$$\Psi_n(m, -1) \equiv |m, -1\rangle = |\dots \overset{m}{\downarrow \downarrow \uparrow \uparrow} \dots\rangle,$$

где узел $n = m$ является левой стороной доменной стенки, т.е. доменная стенка расположена между узлами $n = m$ и $n = m + 1$.

В отсутствие магнитного поля спектр возбуждений состоит из дискретных уровней энергии, причем каждый уровень отвечает фиксированному числу доменных стенок и степень его вырождения равна числу возможных распределений в цепочке этого числа доменных стенок.

Если учесть дополнительное малое обменное взаимодействие поперечных компонент спина ($J^x \neq 0$ или $J^y \neq 0$), то вырождение уровней снимается. Спектр представляет собой серию полос с непрерывным распределением энергии, разделенных значительными щелями. Каждая полоса по-прежнему соответствует фиксированному числу подвижных (!) доменных стенок. Наиболее низколежащая энергетическая полоса отвечает односолитонному возбуждению.

Поскольку в предыдущих разделах мы использовали однозонное приближение, исключая межзонные переходы или пренебрегая ними, в обсуждаемой ситуации нам следует ограничиться односолитонными возбуждениями спиновой системы.

Впервые односолитонная модель серьезно обсуждалась в работе Виллейна [48], посвященной динамике солитона в изингоподобной АФМ цепочке $1/2$ -спинов. Была описана дисперсионная солитонная мода (иногда — мода Виллейна), расположенная ниже непрерывного спектра двухсолитонных возбуждений. Обоснованность результатов работы [48] подтверждается как в теоретических исследованиях (их обзор можно найти в публикации [49]), так и численными расчетами [50]. Также показано, что подобная мода существует в изингоподобной ФМ цепочке $1/2$ -спинов [51].

Итак, интересующая нас модель $1D$ магнетика, с одной стороны, должна быть близкой к чисто изинговской, обладая сильной легкоосной анизотропией обменного взаимодействия, а с другой — должна допускать динамику доменной стенки, т.е. обязательно отличаться от чисто изинговской (иметь отличные от нуля J^x и J^y).

Предлагая модель магнетика, удобную для наших целей, запишем гамильтониан системы в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_I + \mathcal{H}_{xy} - 2\mu_0 H \sum_n S_n^z, \quad (191)$$

$$\mathcal{H}_{xy} = - \sum_n (J^x S_n^x S_{n+1}^x + J^y S_n^y S_{n+1}^y). \quad (192)$$

В базисе из собственных функций оператора S^z матрицы, входящие в \mathcal{H}_{xy} , имеют лишь диагональные элементы. Поэтому член (192) в гамильтониане, воздействуя на солитонную волновую функцию (190), неизбежно приводит к рождению двухсолитонных состояний. И только слагаемые $S_{m-1} S_m$ и $S_{m+1} S_{m+2}$, сохраняя односолитонный характер возбуждений, приводят к смещению солитона из положения $n = m$ в положение $n = m \pm 2$. Желая оставаться только в односолитонном секторе, следует учитывать только эти слагаемые в (192), пренебрегая остальными. Оправданием этой операции может служить большая величина энергетической щели, отделяющей односолитонную полосу от лежащих выше. Не обсуждая условия применимости такого описания динамики отдельного солитона, согласимся с авторами [17] и определим эффективный гамильтониан как проекцию (191) и на подпространство односолитонных состояний. Тогда эффективный гамильтониан односолитонного возбуждения во внешнем магнитном поле H может быть представлен как

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} J^2 + \Delta (T^2 + T^{-2}) - F Q \hat{m}, \quad (193)$$

где $F = 2\mu_0 H$; T — оператор трансляции на одномежузельное расстояние; \hat{m} — оператор номера узла, определяющего положение солитона. Интенсивность «перескоков» между узлами, следующими за ближайшими соседями, определяется величиной [17]

$$\Delta = -\frac{1}{4} (J^y - J^x). \quad (194)$$

Из (194) следует, что движение солитона (доменной стенки) возможно лишь при условии $J^x \neq J^y$, т.е. только в ферромагнетике с двухосной обменной анизотропией. Этот вывод согласуется с результатами феноменологической теории магнитных солитонов.

Аналогичная эффективная модель может быть предложена также и для одноосного ферромагне-

тика ($J^x = J^y$) во внешнем магнитном поле, имеющем H_x - и H_z -компоненты [17]:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}J^z - \mu_0 H_x [T + T^{-1}] - 2\mu_0 H Q m .$$

Однако в такой модели существенны скачки между ближайшими узлами цепочки.

Но вернемся к уравнению (193). Поскольку заряд солитона Q входит в это уравнение как параметр, достаточно рассмотреть динамику солитона одного знака (например, $Q = -1$). Тогда (193) становится формально эквивалентным гамильтониану однозонной модели сильной связи для частицы во внешнем однородном поле и приводит к уравнению для стационарных состояний, аналогичному уравнению (14):

$$i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{1}{2}J^z \psi_n + \Delta (\psi_{n-2} + \psi_{n+2}) - FQ_n \psi_n . \quad (195)$$

Специфика спиновой задачи проявляется в эффективном взаимодействии лишь соседей, следующих за ближайшими, что приводит к очевидно-му отличию уравнения (195) от (14).

В отсутствие внешнего магнитного поля гамильтониан (193) или уравнение (195) порождают закон дисперсии

$$\epsilon(k) = \frac{1}{2}J^z + 2\Delta \cos(2k) , \quad (196)$$

отличающийся от (66) главным образом уменьшенным вдвое периодом в k -пространстве.

Естественно, возникает периодическая зависимость энергии солитона $\epsilon(k)$ от квазиволнового вектора, которая обуславливает блоховские осцилляции при наличии магнитного поля. Поскольку оператор номера узла в k -представлении равен $n = i\partial/\partial k$, полевое слагаемое в (193) приводит к очевидному уравнению движения

$$\frac{dk}{dt} = FQ = -F . \quad (197)$$

Отсюда следует, что в квазиклассическом приближении скорость солитона гармонически зависит от времени:

$$v = \frac{\partial \epsilon}{\partial k} = 4\Delta \sin(2Ft) \quad (198)$$

с блоховской частотой $\omega_B = 2F = (4\mu_0 H)/\hbar$. Интегрируя (198) по времени и определяя положе-

ние солитона в каждый момент времени, легко найти амплитуду блоховских осцилляций:

$$m(t) = \text{const} - \left(\frac{2\Delta}{F}\right) \cos(\omega_B t) . \quad (199)$$

Любопытно, что частота блоховских осцилляций равна удвоенной частоте прецессии вектора намагниченности в магнитном поле $2\mu_0 H/\hbar$. Естественно, эта частота согласуется с частотой блоховских осцилляций доменной стенки в двухосном ФМ, описанных в предыдущем разделе на основе уравнений Ландау–Лифшица.

Нетрудно подтвердить результаты квазиклассического анализа строгим квантовым расчетом на основе гамильтониана (193).

Прежде всего можно утверждать на основании соотношения, аналогичного (29), что существует выделенный дискретный спектр энергий доменной границы*

$$E = 2\Delta - mF , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots , \quad (200)$$

отвечающий «лестнице Ванье–Штарка». Характерно, что расстояние между ступенями лестницы $\delta E = F$ не зависит от Δ . Но в данном случае δE отличается от частоты блоховских осцилляций $\omega_B = 2F$.

Повторяя рассуждения, изложенные в разд. 1.1, можем записать собственные функции «лестницы Ванье–Штарка» по аналогии с (30) в виде

$$\Phi^m(k) = \exp\left(i\frac{\Delta}{F}\sin 2k\right) \exp(-imk) . \quad (201)$$

В узельном представлении

$$\Psi_n^m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(i\frac{\Delta}{F}\sin k\right) \exp\left(i\frac{(n-m)}{2}k\right) dk . \quad (202)$$

Если разность $n - m$ есть четное число, то Ψ_n^m имеет вид функций Бесселя первого рода

$$\Psi_n^m = J_{(m-n)/2}\left(\frac{\Delta}{F}\right) \quad (203)$$

и описывает амплитуду стационарного состояния, локализованного в окрестности узла $n = m$. Именно эти решения получены и проанализированы в работе [17].

Убедимся теперь, что эволюция солитона во внешнем поле при условии, что в начальный момент времени он занимал определенный узел, сво-

* При выбранном знаке заряда солитона Q «сила» F в (200) отличается знаком от F в (29).

дится к осцилляциям с блоховской частотой $\omega_B = 2F$. Запишем аналог решения (41) для случая, когда при $t = 0$ солитон находился в узле $n = m$:

$$\Psi(n - m, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-2i\Delta t} \times \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ \frac{2\Delta i}{2F} [\sin k - \sin(k - 2Ft)] \right\} e^{ik \frac{n-m}{2}} dk. \quad (204)$$

Для четных $n - m$ получается результат, аналогичный приведенному в (41):

$$\Psi(n - m, t) = iJ_{(n-m)/2} \left(\frac{2\Delta}{F} \sin 2Ft \right) e^{i(n-m)Ft}. \quad (205)$$

Чтобы увидеть период осцилляций, описываемых формулой (205), можно вычислить среднеквадратичное отклонение номера узла n от начального. Положим $n - m = 2p$ и произведем расчет, который приведет нас к выражению, аналогичному (41):

$$\langle (n - m)^2 \rangle = 4 \sum p^2 J_p^2 \left(\frac{2\Delta}{F} \sin Ft \right) = 8 \left(\frac{2\Delta}{F} \right)^2 \sin^2 Ft. \quad (206)$$

Действительно, блоховские осцилляции солитона, локализованного в начальный момент времени в некотором узле, имеют характер «дыхания» с частотой $\omega_B = 2F$. Отличие частоты ω_B от разности энергий в «лестнице Ванье–Штарка» связано со специфическим правилом отбора $\Delta m = \pm 2$, обусловленным тем, что в динамике эффективно «работают» скачки на два межузельных расстояния.

Заканчивая изложение основного материала, отметим, что мы анализировали блоховские осцилляции динамических и топологических солитонов в $1D$ ферромагнетиках. Несомненно, также заслуживает внимания динамика солитонов в антиферромагнетиках. И существует основание для этого, так как уравнения движения намагниченности в антиферромагнетиках хорошо изучены. Однако макроскопическая (феноменологическая) динамика в антиферромагнетиках более сложна, чем в ферромагнетиках, и автору неизвестно последовательное описание уравнений движения отдельных солитонов в антиферромагнетиках, основанных на уравнениях Ландау–Лифшица.

В то же время квантовомеханическое описание движения солитонообразных возбуждений в спиновой цепочке с антиферромагнитным взаимодей-

ствием соседей возможно в схеме, аналогичной изложенной выше, т.е. в эффективной модели, учитывающей только односолитонный сектор возбуждений. Действительно, для антиферромагнитной спиновой цепочки в продольном внешнем магнитном поле, линейно возрастающем вдоль цепочки (с постоянным градиентом магнитного поля), может быть предложен эффективный гамильтониан [17]

$$\mathcal{H}^{AFM} = \frac{|J^z|^2}{2} + \Delta^{AFM}(T^2 + T^{-2}) - \mu_0 H Q (-1)^m \left(m + \frac{1}{2} \right),$$

где

$$\Delta^{AFM} = (J^x + J^y)/4.$$

Этот гамильтониан подобен изученному (193). Следовательно, многое, описанное выше, путем переобозначений может быть использовано для анализа осцилляционной динамики солитонов в антиферромагнитной спиновой цепочке.

Замечание о солитонной динамике в антиферромагнитных цепочках особенно актуально в связи с тем, что существование так называемых «дисперсионных солитонов» (мод Вилльена) было экспериментально подтверждено в изинговских антиферромагнетиках [52–57].

2.6. Обсуждение возможностей наблюдения проявлений блоховских осцилляций магнитного солитона

Теоретический анализ блоховских осцилляций магнитных солитонов следует сопроводить оценкой условий и возможности наблюдать блоховские осцилляции в магнитных системах. Говоря об общих условиях, следует заметить, что они подобны тем, которые существуют при изучении мезоскопических эффектов в электронике (см., например, [58]).

Прежде всего следует помнить, что блоховские осцилляции — это однозонный эффект. Поэтому в физических системах, где энергетический спектр солитона многозонный, должны обеспечиваться условия, исключающие межзонные переходы (обсуждаемый эффект есть следствие отражения солитона от границы зоны, приводящего к возвратно-поступательному движению). Внешняя сила, действующая на солитон, должна быть в определенном смысле не очень большой, чтобы солитон, достигнув границы зоны, не мог туннелировать в более высокую зону. Такими переходами можно пренебречь, если частота блоховских

осцилляций значительно превосходит частоту туннельных межзонных переходов. В контексте последнего раздела настоящего обзора это означает, что обменный интеграл вдоль легкой оси J^z должен быть значительно больше магнитного поля ($J^z \gg \mu_0 H$).

Далее, неупругое рассеяние солитона должно практически отсутствовать. Неупругое рассеяние разрушает фазовую когерентность движения, без которой блоховские осцилляции невозможны. Такое рассеяние в первую очередь связано с взаимодействием солитона с фононами, а также с солитон-солитонным взаимодействием. Ясно, что это рассеяние минимально при низких температурах, когда фононы «вымерзают» и плотность солитонов мала. Последнее реализуется в спиновых цепочках Изинга при температурах, значительно меньших J^z .

В меньшей степени, но тем не менее важно, чтобы упругое рассеяние на примесях не вызывало так называемой андерсеновской локализации солитона в неупорядоченной цепочке, которое будет маскировать его блоховские осцилляции. Для этого следует создать условия, при которых амплитуда блоховских осцилляций была бы меньше длины андерсеновской локализации. Поскольку упомянутая амплитуда обратно пропорциональна напряженности магнитного поля, возникает ограничение на магнитное поле снизу.

Два последних соображения приводят к заключению, что наиболее подходящими для обнаружения блоховских осцилляций следует считать одномерные или квазиодномерные магнитные системы, в которых существуют солитоны малых размеров и блоховские осцилляции имеют малую амплитуду. Но прежде всего необходимо убедиться в существовании систем, в которых в принципе могут наблюдаться магнитные солитоны. В обзоре [49] перечислены и описаны вещества, кристаллическая структура которых состоит из систем одномерных цепочек, слабо взаимодействующих друг с другом и допускающих возбуждения типа топологических или динамических солитонов. Поскольку такие возбуждения создают динамические искажения магнитной структуры, они, возможно, доступны наблюдению в нейтронных экспериментах при изучении неупругого рассеяния нейтронов. Величины, измеряемые в нейтронных экспериментах, выражаются через структурный фактор исследуемого магнетика.

Но прежде чем говорить о расчете структурного фактора, повторим, что наиболее пристально следует рассматривать ситуации с солитонами малых размеров, совершающими блоховские осцил-

ляции с малыми амплитудами. Такие ситуации типичны для динамических доменных границ, проанализированных в разд. 2.5. Поэтому мы приведем выражение для структурного фактора ферромагнитной спиновой цепочки с доменной границей, динамика которой описывается гамильтонианом (193). Будем исходить из следующего определения структурного фактора:

$$S^{zz}(q, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \delta S_{-q}^{z'}(0) \delta S_q^{z'}(t) \rangle, \quad (207)$$

где $\delta S_q^z = S_q^z - \langle S_q^z \rangle$ и фурье-преобразование спиновых операторов производится стандартным образом: $S_q = \sum_n \exp(iqn) S_n$ (период цепочки принят равным единице). Расчет в [17] приводит к окончательному общему выражению:

$$S^{zz}(q, \omega) = \frac{1}{2} \sum_n G_n(q) \delta(\omega - n\omega_B), \quad (208)$$

$$G_0 = \frac{J_0^2(\zeta)}{\text{ch}(\beta\omega_B/2) - \cos q}, \quad (209)$$

$$G_n = \frac{J_n^2(\zeta)}{2 \sin^2(q/2)} \times \begin{cases} 1, & n > 0, \\ e^{n\beta\omega_B}, & n < 0, \end{cases} \quad (210)$$

где ω_B — частота блоховских осцилляций; β , как обычно, — обратная абсолютная температура, а параметр $\zeta = (\Delta/\mu_0 H) |\sin q|$. Заметим, что соотношение (208) непосредственно указывает на возможность отобразить «лестницу Ванье–Штарка». Солитон, первоначально находящийся в состоянии с фиксированным значением n , может быть переброшен в другое состояние. Интенсивность возбуждения n -го уровня пропорциональна J_n^2 и контролируется величиной параметра ζ .

Интересно проанализировать соотношение (208) в пределе исчезающе малого волнового числа q [17]:

$$S_b^{zz}(q \rightarrow 0, \omega) \rightarrow \frac{\partial(\omega)}{4 \text{sh}(\beta\mu_0 H)} + \left(\frac{\Delta}{2\mu_0 H} \right)^2 [\delta(\omega - \omega_B) + e^{\beta\omega} \delta(\omega + \omega_B)]. \quad (211)$$

Выражение (211) позволяет довольно просто вычислить мнимую часть однородной магнитной восприимчивости изучаемой системы [17]:

$$\chi''(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{\mu_0 H} \right)^2 (1 - e^{-\beta \omega_B}) \times [\delta(\omega - \omega_B) - \delta(\omega + \omega_B)]. \quad (212)$$

Формулы (211) и (212) описывают отклик одной цепочки, содержащей единственный солитон. В образце с большим числом цепочек, каждая из которых может содержать много нескоррелированных солитонов, полный результат получается умножением приведенных выражений на полное число солитонов. В результате сигнал станет вполне измеримым.

Желая получить некоторые количественные оценки, приведем характеристики магнитных материалов, которые в последнее время являются безусловными кандидатами для изучения на предмет обсуждаемых измерений. Довольно полный набор экспериментально полученных магнитных параметров, описанных в работах [59], имеется для вещества $\text{CoCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ (характеристику магнитных свойств этой соли и соответствующих параметров см. в [17]). $\text{CoCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ — это ферромагнетик изинговского типа со спином $1/2$, и его магнитная структура состоит из цепочек, образованных магнитными ионами Co с ферромагнитным взаимодействием вдоль цепочек и антиферромагнитным межцепочечным взаимодействием. Параметры обменного взаимодействия вдоль цепочек таковы: обменный интеграл изинговского взаимодействия равен $J^z = 18,3$ К, а двухосность обменного взаимодействия характеризуется величинами $J^y - J^x = 3,7$ К и $J^x + J^y = 5,6$ К. Наличие слабого антиферромагнитного межцепочечного взаимодействия приводит к тому, что при температуре 17 К происходит $3D$ упорядочение, в результате чего при более низкой температуре и в слабом продольном магнитном поле половина цепочек оказывается поляризованной вдоль поля, а половина — против поля. С ростом напряженности поля система сначала переходит в ферримагнитное состояние, а потом — в $3D$ ферромагнитное состояние (сами цепочки ферромагнитно упорядочены в любом магнитном поле).

Пренебрежем межцепочечным взаимодействием и рассмотрим изолированную цепочку в постоянном и однородном внешнем магнитном поле H_{ext}^z . Мы отмечали, что односолитонное описание возможно, если выполнено условие $\mu_0 H < J^z$. Для указанных величин параметров это означает,

что напряженность магнитного поля не должна превышать 4 Тл. Для оценок авторы работы [17] предлагают принять напряженность магнитного поля равной 1,8 Тл. Тогда на основании формулы (206) легко получить, что амплитуда осцилляций имеет порядок величины межатомного расстояния, а частота блоховских осцилляций оказывается примерно равной 150 ГГц. Первая оценка позволяет надеяться на возможность избежать различного рассеяния, а вторая — попадает в диапазон возможностей нейтронных экспериментов. Для определения межцепочечных эффектов достаточно воспользоваться приближением среднего поля, что и было сделано в работе [60]. Возникающее при таком рассмотрении действующее на отдельную цепочку эффективное поле складывается из внешнего и самосогласованного внутреннего полей. Поэтому требующееся для возбуждения блоховских осцилляций с амплитудой порядка межатомного расстояния магнитное поле перенормируется во всех фазах: в $3D$ антиферромагнитной фазе требуется напряженность магнитного поля в 2,8 Тл, в ферримагнитной фазе — 3,6 Тл и в ферромагнитной фазе — 5,2 Тл. Приведенные оценки показывают, что описываемое соединение вполне может быть использовано для наблюдения в нем блоховских осцилляций магнитных солитонов.

Материалами, близкими по структуре к описанной соли, являются следующие сложные соединения: $[(\text{CH}_3)_3\text{NH}]\text{CoCl}_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, $\text{CoCl}_2 \cdot 2\text{NC}_5\text{H}_5$ и $[(\text{CH}_3)_3\text{NH}]\text{FeCl}_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. Эти вещества описаны соответственно в работах [60,62]; они являются ферромагнетиками изинговского типа, одномерность магнитной структуры которых выражена значительно ярче, чем у $\text{CoCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. Последнее связано с тем, что спиновые магнитные цепочки в этих материалах разделены более крупными молекулами, а потому можно ожидать, что межцепочечное взаимодействие в них слабее. Однако их магнитные параметры изучены пока менее детально (непонятна, например, степень двухосности магнитной анизотропии, без которой для наблюдения блоховских осцилляций требуется более сложная комбинация магнитных полей).

Помимо квазиодномерных ферромагнетиков изинговского типа с предельно анизотропным обменом, существуют $1D$ ферромагнетики с изотропным обменным взаимодействием, но сильной одноионной анизотропией [63,64]. Они относятся к семейству изоструктурных орторомбических квазиодномерных соединений типа упомянутого выше с общей формулой $[(\text{CH}_3)_3\text{NH}]\text{MCl}_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, где магнитным ионом M является Ni со спином

$S = 1$. Это кристаллы, магнитные цепочки Ni в которых разделены органическими молекулами. Типичным представителем этого класса магнетиков является соединение TMANC. В этом соединении магнитная анизотропия оказывается существенно двухосной с константой анизотропии вдоль наименьшей оси того же порядка, что и константа обменного взаимодействия. Квазиодномерному ферромагнетику TMANC может быть сопоставлена дискретная квантовая гейзенберговская модель с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = J \sum_n S_n S_{n+1} - D_1 \sum_n (S_n^z)^2 - D_2 \sum_n (S_n^x)^2.$$

Оценочные данные для параметров J , D_1 и D_2 можно найти в [64]. Существенно, что соотношения между параметрами $D_1/J = 0,7$ и $D_2/D_1 = 0,3$ подтверждают большую величину энергии одноионной анизотропии. Ориентируясь на определение магнитной длины в уравнениях Ландау-Лифшица ($l_0 = \sqrt{\alpha/\beta}$), можно оценить ширину доменной границы в обсуждаемых магнетиках как $l_0 = a \sqrt{J/D_1}$, где a — постоянная решетки. Из приведенных оценок следует, что в обсуждаемых магнитных цепочках возможны «дискретные» доменные границы с шириной порядка постоянной решетки. Поэтому такие материалы можно рассматривать как кандидаты, подходящие для изучения в них динамики доменных границ и блоховских осцилляций в однородном магнитном поле.

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую признательность моим соавторам тех работ, которые использовались при написании обзора. Я благодарен Михаилу Богдану за полезные обсуждения возможностей наблюдения блоховских осцилляций. Я сердечно благодарен Марине Мамалуй за огромную помощь при подготовке рукописи. Работа была частично поддержана грантом INTAS за 1999 г.

Приложение

Особенности квазиклассического движения частицы с периодическим законом дисперсии в сильно неоднородном потенциальном поле

Рассмотрим $1D$ динамику квазичастицы с законом дисперсии типа $\mathcal{E} = \mathcal{E}(p) = \mathcal{E}(p + p_0)$, где p_0 — период в p -пространстве, считаем, что $\mathcal{E}_{\min} = 0$. Например, можно принять $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin^2(\pi p/p_0)$, где \mathcal{E}_0 — ширина энергетической полосы. Предположим, что частица движется в поле сильно неоднородного потенциала $U(x)$, который не влияет на ее «кинетическую энергию» $\mathcal{E}(p)$. Допус-

тим, что частица подчиняется классическому уравнению движения, которое неоднократно упоминалось в основном тексте:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p}.$$

Для определенности будем ориентироваться на зависимость $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin^2(\pi p/p_0)$ и предположим, что на полупериоде $0 < p < p_0/2$ функция $\mathcal{E}(p)$ монотонна и, следовательно, скорость $v = \partial \mathcal{E}/\partial p$ обращается в нуль при $p = 0$ и $p = p_0/2$. Удобно также считать, что $\mathcal{E}_{\min} = \mathcal{E}(0)$. Тогда, основываясь на законе сохранения энергии

$$\mathcal{E}(p) + U(x) = E = \text{const},$$

можно дать довольно полный качественный анализ динамики такой частицы. Не излагая совершенно очевидных рассуждений, позволяющих понять динамику $1D$ движения, отметим наиболее интересные (иногда необычные) свойства движения изучаемой частицы.

1. Если «перепад» потенциального рельефа на расстояниях Δx порядка амплитуды блоховских осцилляций превышает ширину энергетической зоны частицы, то она будет совершать осцилляционное движение при любой крутизне потенциального рельефа и любом знаке $\text{grad } U$. На рис. 16 область возвратно-поступательного движения частицы соответствует интервалу (x_1, x_2) .

2. У дна потенциальной ямы частица совершает осцилляции, напоминающие колебательное движение обычной частицы в такой яме (на рис. 17, а область колебаний — это интервал (x_1, x_2)).

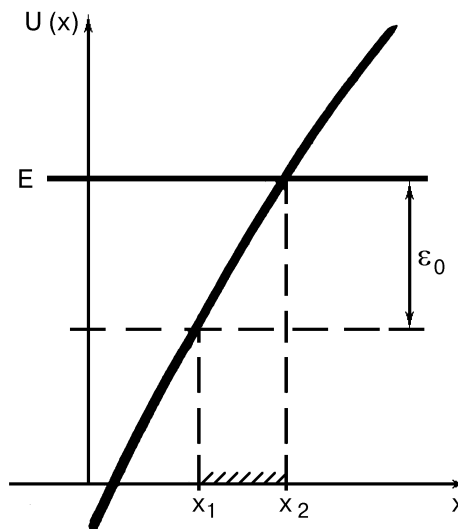


Рис. 16. Область разрешенного движения (x_1, x_2) зонной квазичастицы в потенциале с большим градиентом.

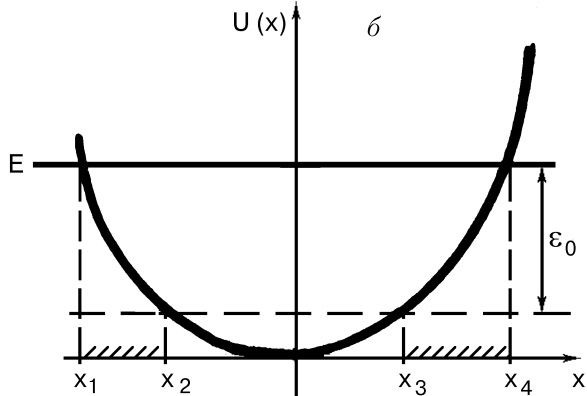
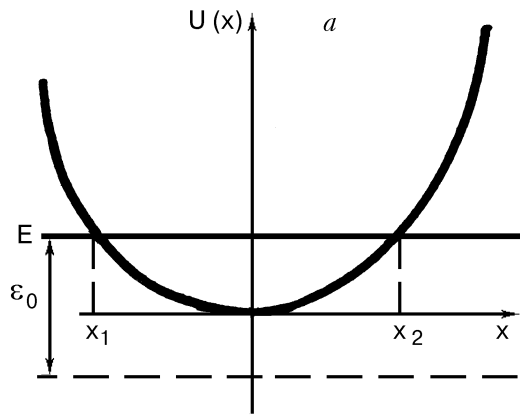


Рис. 17. Колебательное движение квазичастицы вблизи дна потенциальной ямы при малой энергии E (а); вблизи стенок потенциальной ямы при большой энергии E (б).

Но если окажется, что $E - \epsilon_0 > U_{\min}$, как показано на рис. 17,б, то колебательное движение приобретет характер блоховских осцилляций в однородном поле и будет происходить либо в

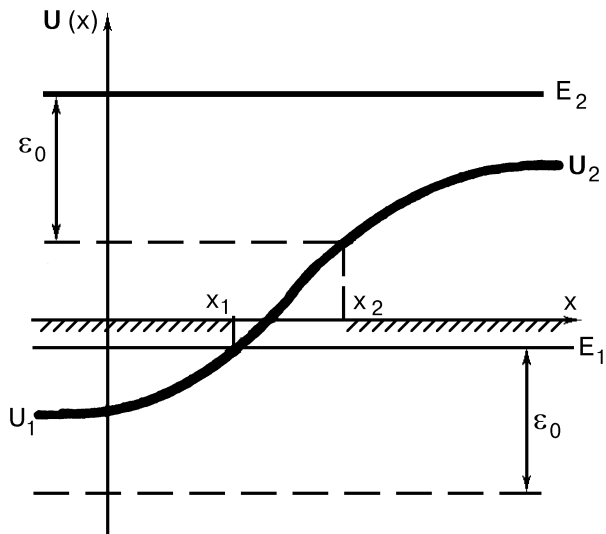


Рис. 18. «Надбарьерное» отталкивание квазичастицы неоднородным потенциалом.

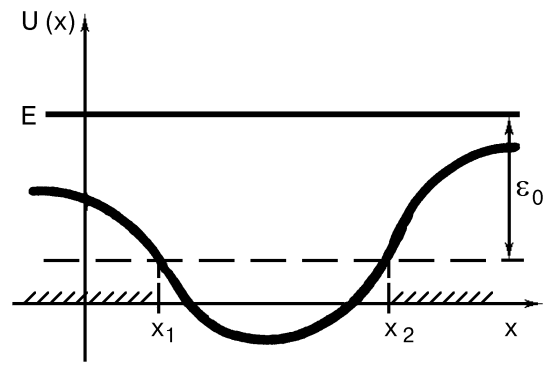


Рис. 19. Потенциальная яма отталкивает частицу, энергия которой изначально выше потенциала на бесконечности.

интервале (x_1, x_2) , либо в (x_3, x_4) в зависимости от начальных условий.

3. Ступенька потенциального рельефа может привести к инфинитному движению частицы на одной полуоси по обе стороны от ступеньки. Для ступени на рис. 18 это возможно как при энергии $U_1 < E_1 < U_2$, когда движение происходит на полуоси $-\infty < x < x_1$, так и при энергии $E_2 > U_2$, когда область инфинитного движения $x_2 < x < \infty$. Если ступенька достаточно высокая ($U_2 - U_1 > \epsilon_0$), то она может вызвать локализацию частицы, вынудив ее совершать блоховские осцилляции в области перегиба.

4. Аналогичное рассмотрение приводит к заключению, что потенциальная яма конечной глубины может оказаться непреодолимым препятствием для частицы подобно потенциальному барьеру для обычных частиц (рис. 19). Из приведенного рисунка следует, что если $E - \epsilon_0 < U(\infty)$, то потенциальная яма отражает частицу, вынуждая ее двигаться либо в интервале $-\infty < x < x_1$, либо в интервале $x_2 < x < \infty$.

5. Наконец, относительно «надбарьерного движения» частицы в случае потенциального барьера конечной высоты (рис. 20). Если $E - \epsilon_0 < U_{\max}$,

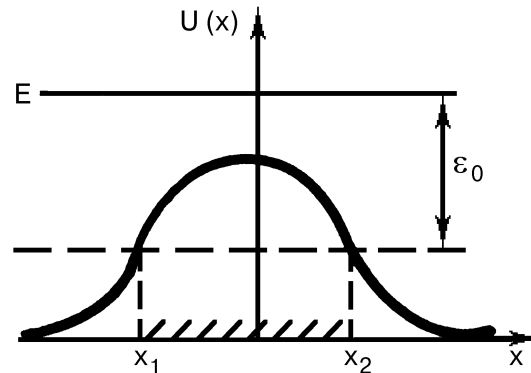


Рис. 20. Захват квазичастицы потенциальным горбом.

то частица «захватывается» потенциальным горбом и совершает колебательное движение вокруг его вершины.

Изменение роли потенциальной ямы и потенциального барьера в описанных ситуациях легко понять, вводя вместо частицы с энергией $\mathcal{E}(p)$ аналог «дырки» в электронной теории, т.е. квазичастицу с энергией $\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}(p)$ и отсчитывая энергию от верхнего края энергетической полосы. При этом эффективный потенциал как бы изменит знак, и потому потенциальная яма и потенциальный барьер поменяются местами.

1. F. Bloch, *Z. Phys.* **52**, 555 (1928); C. Zener, *Proc. R. Soc. London* **A145**, 523, (1934).
2. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
3. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
4. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
5. L. Esaki and R. Tsu, *IBM J. Res. Dev.* **14**, 61 (1970).
6. С. Wannier, *Phys. Rev.* **117**, 432 (1960); T. Mendes, F. Agullo-Rueda, and J. Hong, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2426 (1988); P. Voisin, J. Bleuse, C. Bouche, S. Gaillard, C. Albert, and A. Regreny, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1639 (1988).
7. J. Feldman, K. Leo, J. Shah, D. A. Miller, J. E. Conningham, T. Meier, G. von Plessen, A. Shulze, P. Thomas, and S. Schmitt-Rink, *Phys. Rev.* **B46**, 7952 (1992); K. Leo, P. Haring Bolivar, F. Brueggemann, R. Schwedler, and K. Koehler, *Solid State Commun.* **84**, 943 (1992).
8. С. Waschke, Н. Roskos, R. Schwidler, K. Leo, Н. Kurz, and K. Koeler, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3319 (1993).
9. А. Н. Омелянчук, Г. А. Гогадзе, И. О. Кулик, *ФНТ* **12**, 640 (1980).
10. А. М. Косевич, И. Д. Вагнер, *ФНТ* **25**, 868 (1999).
11. N. Pertsch, P. Dannberg, W. Elflein, and A. Brauer, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4752 (1999).
12. R. Morandotti, U. Perschel, and J. S. Aitchison, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4756 (1999).
13. David Cai, A. R. Bishop, Niels Cronbech-Jensen, and M. Salerno, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1186 (1995).
14. J. C. Slonczewski, *Int. J. Magn.* **2**, 85 (1972).
15. Daniel Loss, *Quantum Dynamics in Mesoscopic Magnetism*, in: *Quantum Tunneling in Magnetism. Proc. NATO Conathtyce*, Kluwer, Dordrecht, the Netherlands (1995).
16. Н. -В. Braun and D. Loss, *J. Appl. Phys.* **76**, 6177 (1994).
17. Jordan Kyriakidis and D. Loss, *Phys. Rev.* **B58**, 5568 (1998).
18. А. М. Косевич, *Physica* **D119**, 134 (1998).
19. А. М. Косевич, В. В. Ганн, Ф. И. Жуков, В. П. Воронов, *ЖЭТФ* **114**, 735 (1998).
20. И. М. Бабич, А. М. Косевич, *ФНТ* **27**, 46 (2001).
21. M. Gluck, A. R. Kolovski and H. J. Korsch, *Phys. Lett.* **A249**, 483 (1998); *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1534 (1999).
22. Marshal Luban, *J. Math. Phys.* **26**, 2386 (1985).
23. U. Peschel, T. Pertsch, and F. Lederer, *Optics Lett.* **23**, 1701 (1998).
24. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Гостехиздат, Москва (1963).
25. W. I. Puller, N. J. M. Horing, L. G. Mouroukh, and A. Yu. Smirnov, *Phys. Lett.* **A281**, 70 (2001).
26. D. H. Dunlap and V. M. Kenkre, *Phys. Rev.* **B34**, 3625 (1986).
27. D. H. Dunlap and V. M. Kenkre, *Phys. Lett.* **A127**, 438 (1988).
28. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
29. Arnold M. Kosevich, *Physica* **D41**, 253, (1990).
30. A. Hasegawa, *Optical Solitons in Fibers*, Springer-Verlag, Berlin (1989).
31. M. A. Ablowitz and J. F. Ladik, *J. Math. Phys.* **17**, 1011 (1976).
32. L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer, Berlin (1987).
33. Reiner Schart and A. Bishop, *Phys. Rev.* **A43**, 6535 (1991).
34. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Phys. Z. Sowjetunion* **8**, 153 (1935); Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *К теории магнитной восприимчивости ферромагнитных тел*, в кн.: *Ландау Л. Д. Собр. тр.*, Наука, Москва (1978), Т. 1, с. 128.
35. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2. Наука, Москва (1978).
36. В. Г. Барьяхтар, *ЖЭТФ* **87**, 1501 (1984).
37. В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, Т. К. Соболева, А. Л. Сукстанский, *ЖЭТФ* **91**, 1454 (1986).
38. К. Б. Власов, Л. Г. Оноприенко, *ФММ* **15**, 47 (1963).
39. В. М. Цукерник, *ФТТ* **10**, 1006 (1968).
40. А. Хуберт, *Теория доменных стенок в упорядоченных средах*, Мир, Москва (1977).
41. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Киев, Наукова Думка (1983), А. М. Косевич, В. А. Иванов, and A. S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
42. Е. А. Галкина, Б. А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **71**, 372 (2000).
43. А. М. Косевич, *Dynamical and Topological Solitons in Ferromagnets and Antiferromagnets*, in: *Solitons*, S. E. Trullinger, V. E. Zakharov, and V. L. Pokrovsky (eds.), Elsevier, Amsterdam (1986).
44. L. R. Walker, Quoted by Dillon F. *Dynamics of Domain Walls*, in: *Magnetism*, G. T. Rado and H. Suhl (eds.), New York: Pergamon Press (1963), vol. 3, p. 321.
45. И. А. Ахизер, А. Е. Боровик, *ЖЭТФ* **52**, 508 (1967); И. А. Ахизер, А. Е. Боровик, *ЖЭТФ* **52**, 1332 (1967).
46. А. Малоземов, Дж. Слочевски, *Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами*, Мир, Москва (1982).
47. В. Н. Елеонский, Н. Н. Кирова, Е. Н. Кулагин, *ЖЭТФ* **76**, 705 (1979).
48. J. Villain, *Physica* **B79**, 1 (1975).
49. Н. -J. Mikeska and M. Steiner, *Adv. Phys.* **40**, 191 (1991).
50. N. Ishimura and H. Shiba, *Progr. Theor. Phys.* **63**, 743 (1980).
51. Н. -В. Braun and D. Loss, *Int. J. Mod. Phys.* **B10**, 219 (1996).
52. H. Yoshizawa, K. Hirakawa, S. K. Satija, and G. Shirane, *Phys. Rev.* **B23**, 2298 (1981).
53. J. P. Boucher, L. P. Regnault, J. Rossat-Mignot, and B. Briat, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 590 (1982).
54. S. E. Nagler, W. J. L. Buyer, R. L. Armstrong, and B. Briat, *Phys. Rev.* **B28**, 3873 (1983).
55. K. Adachi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50**, 3904 (1981); J. P. Boucher, G. Rius, and Y. Henry, *Europhys. Lett.* **4**, 1073

- (1987); H. Kikuchi and Y. Ajiro, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58**, 2531 (1989).
56. I. Mogi, N. Kojima, Y. Ajiro, H. Kikuchi, T. Ban, and I. Tsujikawa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **56**, 4592 (1987).
 57. Y. Ajiro, H. Kikuchi, T. Okita, M. Chiba, K. Adachi, M. Mekata, and T. Goto, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58**, 390 (1989); T. Kohmoto, T. Goto, S. Maegawa, N. Fudjiwara, Y. Fukuda, M. Kunitomo, and M. Mekata, *Phys. Rev.* **B57**, 2936 (1998).
 58. Y. Imry, *Introduction to Mesoscopic Physics*, Oxford University Press, Oxford (1997).
 59. J. B. Torrance, Jr. and M. Tinkham, *Phys. Rev.* **187**, 595 (1969); D. F. Nicoli and M. Tinkham, *Phys. Rev.* **B9**, 3126 (1974).
 60. K. Takeda, S. -I. Matsukawa, and T. Haseda, *J. Phys. Soc. Jpn.* **30**, 1330 (1971).
 61. K. Takeda and M. Wada, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50**, 3603 (1981).
 62. R. E. Greeney, C. P. Landee, J. H. Zang, and W. M. Reiff, *Phys. Rev.* **B39**, 12200 (1989).
 63. R. Hoogerbeets, S. A. J. Wieggers, A. I. van Duynveldt, R. D. Willett, and V. Geiser, *Physica B + C* **125**, 135 (1984).
 64. A. G. Anders, V. G. Borisenko, S. V. Volotzkii, and Yu. V. Pereverzev, *Fiz. Nizk. Temp.* **15**, 39 (1989).

Bloch oscillations of magnetic solitons as an
example of dynamic localization of
quasiparticles in a homogeneous external field
(Review Article)

A. M. Kosevich

The survey is devoted to the theory of oscillating motion of a band particle or particlelike excitation in a homogeneous external field, so-called Bloch oscillations. It is explained that the condition for such a motion is the presence of two facts: a classical equation of the motion determining the time dependence of the particle momentum under the action of

external fields ($dp/dt = F$), and a band character of the energy spectrum of the particle, supposing a periodic dependence of the particle energy on the momentum (or quasimomentum): $\varepsilon = \varepsilon(p) = \varepsilon(p + p_0)$, where p_0 is a period in the p -space which appears naturally when one describes the motion in a spatially periodical structure (lattice). Quasiclassical and quantum descriptions of the Bloch oscillations are proposed. Since there is no consistent exposition of the quantum theory of this phenomenon in the monographic literature, the first part of the survey adequately concerns the oscillatory dynamics of an elementary excitation in a 1D discrete chain including the theory of motion both in a constant homogeneous field and in a harmonically time-dependent homogeneous one. An interpretation of the relation between the frequency of quasiclassical Bloch oscillations and the equidistant energy level spectrum of the so-called *Wannier-Stark ladder* is given. The physical nature of the dynamic localization of the band particle in the homogeneous field dependent periodically on time is explained. It is shown that the main results of this dynamics can be extended to the motion of a dynamic soliton of the Schrödinger equation. The Bloch oscillations of topological and dynamical magnetic solitons are described in the second part of the survey. It is shown that the phenomenological Landau-Lifshits equations for the magnetization field in a magnetically ordered medium have striking soliton solutions. The soliton energy turns out to be a periodical function of its momentum though the motion takes place in a continuous medium. The presence of this periodical dependence is sufficient to explain the Bloch oscillations of magnetic solitons. The quantum mechanical oscillatory dynamics of the soliton in a discrete spin chain is described. The survey concludes with the discussion of conditions and possibilities of experimental observation of the oscillatory motion.