

## Об условиях существования $1D$ магнитных солитонов с частотными характеристиками, попадающими в сплошной спектр

А. М. Косевич, В. И. Гришаев

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины  
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина  
E-mail: kosevich@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 13 февраля 2002 г., после переработки 27 февраля 2002 г.

Исследованы решения модернизированного (с учетом высшей дисперсии) синусоидального уравнения Гордона в виде двойного солитона ( $4\pi$ -кинка) и пары пространственно разделенных связанных кинков. Сформулировано аналитическое условие отсутствия излучения солитона на больших расстояниях от него. Подтвержден полученный ранее результат о наличии дискретного набора безызлучательных составных солитонов. Физический смысл этого результата состоит в том, что при определенных расстояниях между кинками порождаемое излучение от одного из кинков полностью гасит вне солитона поле другого кинка в результате обычной интерференции находящихся в противофазе волн.

Досліджено рішення модернізованого (з урахуванням вищої дисперсії) синусоїдального рівняння Гордона у вигляді подвійного солітона ( $4\pi$ -кінка) і пари просторово розподілених зв'язаних кінків. Сформульовано аналітичну умову відсутності випромінювання солітона на великих відстанях від нього. Підтверджено отриманий раніше результат про наявність дискретного набору складних солітонів, що не випромінюють. Фізичний сенс цього результату полягає в тому, що за певними відстанями між кінками породжуване випромінювання від одного з кінків повністю гасить поза солітона поле іншого кінка як результат звичайної інтерференції хвиль, що знаходяться у протифазі.

PACS: 05.45.-a

1. Одним из основных уравнений, описывающих нелинейную динамику  $1D$  систем, является синусоидальное уравнение Гордона (СГ). Оно используется при анализе нелинейных возбуждений в квазиодномерных ферромагнетиках, антиферромагнетиках [1] и цепочках джозефсоновских переходов [2]. Нас будут интересовать солитонные решения несколько модифицированного уравнения СГ, содержащего высшую дисперсию:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \sin u, \quad \beta > 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) любопытно тем, что в отличие от обычного уравнения СГ, где среди нелинейных элементарных возбуждений присутствует набор движущихся  $2\pi$ -кинков, оно имеет точное реше-

ние в виде  $4\pi$ -кинка, движущегося с вполне определенной скоростью

$$V_0 = \pm \sqrt{1 - \sqrt{\frac{4}{3}}\beta}. \quad (2)$$

Это решение впервые получено в [3] и согласуется с численными результатами работ [4,5]. Однако в работе [5], кроме солитона, движущегося со скоростью (2), численно был получен спектр похожих солитонов с определенным дискретным набором скоростей. В [6] был разработан аналитический метод теории возмущений, позволивший показать, что солитоны уравнения (1) можно рассматривать как связанные состояния пары  $2\pi$ -кинков уравнения СГ.

Необычность динамических солитонов уравнения (1) заключается в том, что, будучи пространственно локализованными возмущениями 1D системы, они обладают частотными характеристиками, попадающими в сплошной спектр элементарных возмущений линеаризованного уравнения. Считается, что в подобных ситуациях локализованное возмущение невозможно, поскольку его присутствие в нелинейной среде порождает излучение волн малых (гармонических) колебаний изучаемой системы. Однако в работе [7] было показано, что такой строгий запрет справедлив только в том случае, когда линеаризованное уравнение является уравнением второго порядка относительно пространственных производных (волновое уравнение или уравнение Шредингера). Если же в линеаризованном уравнении присутствуют пространственные производные более высокого порядка (учтена высшая дисперсия), то ситуация меняется. В работе [7] сформулированы физические условия существования локализованных нелинейных возмущений с частотами, попадающими в сплошной спектр, и указана связь этих условий с видом линеаризованного уравнения. Легко понять качественную причину возникновения подобных условий.

Рассмотрим для простоты уравнение типа нелинейного уравнения Шредингера

$$-i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + g \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + F(|\Psi|^2)\Psi, \quad (3)$$

где  $g = -|g| < 0$ , а  $F(u)$  — некоторая нелинейная функция, для которой  $F(0) = 0$ . Линеаризованное уравнение имеет собственные решения вида

$$\Psi(x, t) = \exp(ikx - i\omega t), \quad (4)$$

отвечающие закону дисперсии

$$\omega = k^2 + |g|k^4, \quad (5)$$

все частоты которого положительны ( $\omega > 0$ ).

Предположим, что уравнение (3) обладает солитонным решением  $\Psi_s = f_s(x) e^{-i\omega t}$ , где  $f_s(x) = 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ . При каких частотах это возможно?

Убывание амплитуды  $f_s(x)$  на бесконечности означает, что на достаточно больших расстояниях она будет описываться линеаризованным уравнением, и ее вид будет соответствовать собственным решениям с законом дисперсии (5). Если  $g = 0$ , то из (5) следует, что фиксированной частоте  $\omega$  отвечает единственная пара значений  $k = \pm\sqrt{\omega}$ . Следовательно, при  $\omega > 0$  на бесконечности будут существовать волны (4) не нулевой амплитуды (локализованное при конечных  $x$  возмущение с

частотой  $\omega$  неизбежно порождает излучение с этой частотой). Однако при  $\omega < 0$  имеем  $k = \pm i\sqrt{|\omega|}$ , поэтому на бесконечности решение ведет себя следующим образом:  $f_s(x) = e^{-\sqrt{|\omega|}|x|}$ . Значит, динамические локализованные в пространстве солитоны возможны только в том случае, если их частоты находятся вне сплошного спектра закона дисперсии  $\omega = k^2$ . Аналогичные условия существования динамических магнитных солитонов уравнения Ландау–Лифшица обсуждены в публикациях [8].

Если  $g \neq 0$ , то ситуация кардинально меняется. Теперь фиксированной положительной частоте  $\omega$  отвечают две пары значений: пара вещественных  $k$

$$k^2 = \frac{1}{2|g|} (\sqrt{1 + 4|g|\omega} - 1) \quad (6)$$

и пара чисто мнимых  $k = ik$

$$k^2 = \frac{1}{2|g|} (\sqrt{1 + 4|g|\omega} + 1). \quad (7)$$

Это означает, что на больших расстояниях от центра солитона (где уравнение линейно) одновременно может существовать как спадающее с ростом координаты решение (за него ответствен параметр (7)), так и распространяющееся в виде волны решение с волновым вектором (6). Если первое отвечает локализованной (солитонной) части возмущения, то второе обусловлено излучением динамического солитона. Вообще говоря, излучение существует при наличии любого динамического локализованного возмущения в такой системе. Но в [7] показано, что излучение отсутствует при таких  $k = k(\omega)$ , когда пространственная компонента Фурье последнего слагаемого в (3), обусловленного солитонным решением, обращается в нуль:

$$\int e^{ikx} F(|f_s(x)|^2) f_s(x) dx = 0. \quad (8)$$

Ясно, что возможен только дискретный набор частот (и волновых чисел), при которых условие (8) может выполняться. Оказывается, что выяснение возможности такой ситуации связано с изучением свойств линеаризованной системы и ее волновых решений. В частности, в том случае, когда сложное солитонное решение аналогично связанному состоянию двух движущихся простых солитонов (в нашем случае кинков), было сделано любопытное наблюдение [9,10]. Излучение такого солитона отсутствует, если между двумя его «партнерами» укладывается нечетное число полуволн поля излучения линеаризованного

уравнения. Смысл этого условия физически прост: линейные волны, излученные каждым из «партнеров», при таком условии гасят друг друга за пределами солитона в результате интерференции.

Подтвердим высказанные выше утверждения и предположения на примере анализа условий существования безызлучательных солитонов уравнения (1).

2. Основываясь на результатах работы [3], ищем солитонное решение уравнения (1) при  $\beta > 0$  в безызлучательном виде:

$$u_s(x - Vt) = 2u_s^0(x - Vt). \quad (9)$$

Здесь  $u_s^0(x)$  — кинк-решение обычного уравнения СГ (в формуле (1) следует положить  $\beta = 0$ ):

$$u_s^0(x) = 4 \operatorname{arctg} \exp(-x/l), \quad (10)$$

где скорость солитона  $V$  удовлетворяет условию  $V < 1$ .

Чтобы понять физический смысл возникающих при таком выборе решения проблем, изобразим график закона дисперсии (см. рис. 1) линеаризованного уравнения (1), а именно соотношения

$$\omega^2 = 1 + k^2 - \beta k^4, \quad (11)$$

и представим (9) в виде пакета линейных волн («фононов»):

$$u_s(x - Vt) = \sum_k C(k) e^{ik(x-Vt)}, \quad (12)$$

где  $C(k)$  — компоненты Фурье изучаемой функции.

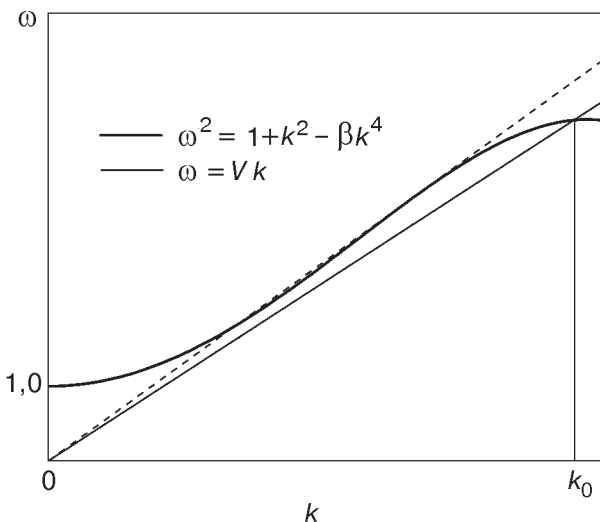


Рис. 1. График закона дисперсии линеаризованного уравнения (1).

Видно, что этот пакет образован «фононами» с законом дисперсии

$$\omega = kV, \quad (13)$$

график которого пересекает график закона дисперсии (11) в точке с волновым числом  $k_0$ .

Наличие такого пересечения означает, что взаимодействие солитона со спектром гармонических колебаний, описываемых линеаризованным уравнением (1), вызовет излучение волн с волновым числом  $k_0$ , т.е. будет происходить черенковское излучение реальных фононов. Следовательно, стационарное движение солитона (9) с постоянной скоростью  $V$  окажется невозможным при  $V < 1$ .

Однако в [7] утверждается, что существуют такие параметры решения (9), а именно величины  $V$  и  $l$ , при которых излучение отсутствует. Найдем эти параметры из условия отсутствия излучения линейных волн. Воспользуемся следующими соображениями:

1) при  $x \gg l$  имеем  $u_s^0(x) = 4 \exp(-x/l) \ll 1$ , поэтому связь параметров  $V$  и  $l$  можно найти из линеаризованного уравнения (1):

$$(1 - V^2)l^2 + l^4 - \beta = 0; \quad (14)$$

2) перепишем уравнение (1) в виде линейного уравнения с правой частью, равной  $\sin u$ , и подставим в правую часть  $u = u_s(x - Vt)$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u_s(x - Vt) = \sin 2u_s^0(x - Vt). \quad (15)$$

Рассмотрим функцию в правой части уравнения (15) как локализованную силу  $f_s(x - Vt)$ , которая является источником поля  $u(x)$  линейного уравнения:

$$f_s(x) = \frac{\operatorname{sh} x (1 - \operatorname{sh}^2 x)}{\operatorname{ch}^4 x}. \quad (16)$$

На больших расстояниях ( $x \gg Vt$ ) локализованная часть солитонного решения исчезает, и поле  $u(x)$  может быть отличным от нуля только за счет излучения, определяемого выражением

$$u(x, t) = \int G(x - x') f_s(x' - Vt) dx', \quad (17)$$

где  $G(x)$  — функция Грина уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (18)$$

Волновая (неубывающая с расстоянием) часть функции Грина уравнения (18) имеет очевидную форму

$$G_{\omega}(x) = A(\omega)e^{ikx}, \quad (19)$$

где  $k$  связано с частотой законом дисперсии

$$\omega^2 = k^2 - \beta k^4. \quad (20)$$

Подставляя (19) в (17), получаем

$$u(x, t) = 2A(\omega) e^{ik(x-Vt)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi} f_s^0(\xi) d\xi. \quad (21)$$

Видно, что роль частоты, как и следовало ожидать, играет  $\omega = kV$ , поэтому входящее в (19) волновое число  $k$  связано со скоростью соотношением, вытекающим из (20):

$$V^2 = 1 - \beta k^2. \quad (22)$$

Итак, поле излучения отсутствует, если

$$Q(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi} \sin u_s(\xi) d\xi = 0, \quad (23)$$

где подынтегральная функция в компоненте Фурье определяется формулой (16).

Интеграл (23) вычисляется в явном виде:

$$Q(k) = \frac{\pi(k^2 l^2 - 2)}{2 \operatorname{ch}\left(\frac{kl\pi}{2}\right)}. \quad (24)$$

Из требования (21) непосредственно следует равенство

$$k^2 l^2 = 2. \quad (25)$$

Уравнения (14), (22) и (25) позволяют найти основные параметры солитона  $V$  и  $l$ . В частности, оказывается, что скорость солитона  $V$  в точности равна полученному в [3] значению (2).

Таким образом, показано, что физическим условием отсутствия излучения солитона с определенными частотными характеристиками, попадающими в сплошной спектр гармонических колебаний, действительно является условие равенства нулю соответствующей фурье-компоненты вынуждающей силы  $f_s(x, t)$ .

**3.** Кроме солитонов (9) в виде двойного кинка уравнения СГ, нелинейное уравнение (1) обладает дискретной серией солитонов более сложной структуры, а именно солитонов типа двух пространственно разделенных связанных кинков [6,7]. Выясним, при каких условиях солитонное возмущений такого типа не вызывает излучения.

Следуя [6], запишем искомое решение уравнения (1) в виде

$$u_s(x - Vt) = u_s^0(x - \Delta - Vt) + u_s^0(x + \Delta - Vt), \quad (26)$$

где  $2\Delta$  — расстояние между центрами тяжести двух кинков, которое при интересующих нас частотах предполагается независимым от времени.

Повторяя рассуждения предыдущего пункта, приходим к тем же условиям (14), (22) и (23), но последнее соответствует компоненте функции Фурье

$$f_s(x) = f_s^0(x - \Delta) + f_s^0(x + \Delta), \quad (27)$$

где скорость солитона  $V$  удовлетворяет условию  $V < 1$ . Нахождение интересующей нас компоненты Фурье с учетом симметрии выражения (26) сводится к вычислению следующего интеграла:

$$Q(k) = \int [\sin u_s^0(x + \Delta) \cos u_s^0(x - \Delta) + \sin u_s^0(x - \Delta) \cos u_s^0(x + \Delta)] \sin kx dx. \quad (28)$$

Легко убедиться, что

$$\sin u_s(x) = -\frac{2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad \cos u_s(x) = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (29)$$

а  $Q(k)$  равно сумме двух интегралов:

$$Q(k) = I_1(\Delta) + I_2(\Delta), \quad (30)$$

где

$$I_1(\Delta) = 4 \int \frac{\operatorname{sh} \frac{\xi + \Delta}{l}}{\operatorname{ch}^2 \frac{(\xi + \Delta)}{l}} \sin k\xi d\xi = -\frac{4\pi l^2 \cos k\Delta}{\operatorname{ch} \frac{kl\pi}{2}}; \quad (31)$$

$$\begin{aligned} I_2(\Delta) &= -4 \int \frac{\operatorname{sh} \frac{\xi - \Delta}{l} + \sin \frac{\xi + \Delta}{l}}{\left[ \operatorname{ch}^2 \frac{\xi - \Delta}{l} \operatorname{ch}^2 \frac{\xi + \Delta}{l} \right]^2} \sin k\xi d\xi = \\ &= -16 \operatorname{ch} \frac{\Delta}{l} \int \frac{\operatorname{sh} \frac{\xi}{l} \sin k\xi d\xi}{\left[ \operatorname{ch} \frac{2\xi}{l} + \operatorname{ch} \frac{2\Delta}{l} \right]^2} = \\ &= \frac{4\pi l \operatorname{ch} \frac{\Delta}{l}}{\operatorname{ch} \frac{kl\pi}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{\Delta}{l}} \left[ \frac{\operatorname{ch} \frac{\Delta}{l} \sin k\Delta}{\operatorname{sh} \frac{\Delta}{l}} - kl \cos k\Delta \right]. \quad (32) \end{aligned}$$

Подставляя (31) и (32) в (30), получаем выражение для искомой компоненты Фурье

$$Q(k) = \frac{2\pi l \operatorname{ch}^2 \frac{\Delta}{l}}{\operatorname{ch} \frac{kl\pi}{2} \operatorname{sh}^3 \frac{\Delta}{l}} \left[ 2 \sin k\Delta - kl \operatorname{sh} \frac{2\Delta}{l} \cos k\Delta \right]. \quad (33)$$

Требование выполнения равенства  $Q(k) = 0$  приводит к соотношению

$$kl \cdot \operatorname{sh} \frac{2\Delta}{l} = 2 \operatorname{tg}(k\Delta), \quad (34)$$

которое вместе с (14) и (22) позволяет связать все параметры солитона: скорость  $V$ , расстояние между двумя его составляющими кинками  $2\Delta$ , эффективную ширину солитона  $l$  и значение волнового числа  $k$ , обеспечивающего безызлучательный режим динамики солитона при заданном значении параметра нелинейности  $\beta$ . Ясно, что трех соотношений недостаточно для определения этих четырех параметров. Однако, исключив два из них, мы можем установить связь оставшихся двух. Обсудим связь параметров  $k$  и  $\Delta$ . Подставляя (22) в (14), получаем уравнение, определяющее зависимость  $l$  от  $k$ :

$$l^{-2} = \frac{1}{2\beta} (\sqrt{\beta^4 k^8 + 4\beta} - \beta^2 k^4). \quad (35)$$

Именно соотношения (34) и (35) позволяют установить связь  $\Delta$  и  $k$ . Однако можно произвести качественный анализ этой связи, исходя непосредственно из (34), переписав его в несколько иной форме:

$$q \operatorname{sh} \frac{2k\Delta}{q} = 2 \operatorname{tg}(k\Delta), \quad q = kl \quad (36)$$

Ясно, что при  $\Delta \rightarrow 0$  из (36) вытекает полученное нами ранее соотношение (25).

Графическое решение этого уравнения при  $\Delta \neq 0$  сводится к нахождению точек пересечения графиков левой и правой частей (36). Полагая, что в актуальной области параметров можно считать  $q \sim 1$ , видим, что график монотонно возрастающей с ростом аргумента  $k\Delta$  левой части (36) пересекает графики функций  $\operatorname{tg}(k\Delta)$  в бесконечном числе точек, высота которых быстро растет с ростом аргумента. Это точки, в которых

$$k\Delta \approx \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (37)$$

Для иллюстрации на рис. 2 изображены графики левой и правой частей (36) при трех значениях  $q$ , соответствующих некоторым различным  $\beta$ . На графике ясно видно приближение точек пересечения графиков к прямым (37).

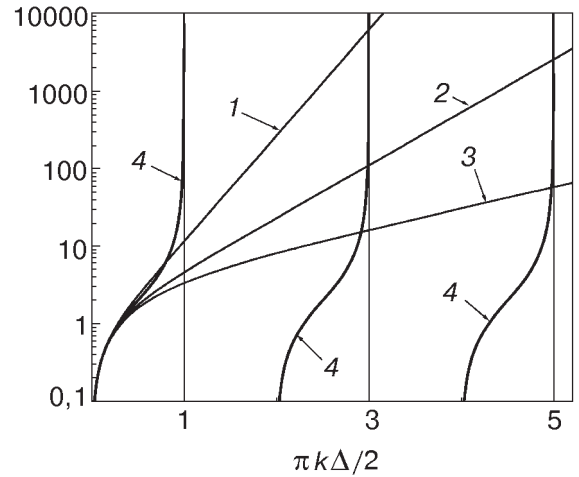


Рис. 2 Пересечение графиков функции  $q \operatorname{sh} \pi k\Delta/q$  [ $q = 0,5$  (1),  $q = 1$  (2),  $q = 3$  (3)] с графиками функции  $2 \operatorname{tg}(\pi k\Delta/2)$  (4).

Для машинного расчета искомых величин  $k\Delta$  подставим (35) в (34) и получим неявную зависимость  $k$  от  $\Delta$  в виде

$$k \left[ \frac{1}{2\beta} (\sqrt{\beta^4 k^8 + 4\beta} - \beta^2 k^4) \right]^{-1/2} \times \operatorname{sh} \left\{ 2\Delta \left[ \frac{1}{2\beta} (\sqrt{\beta^4 k^8 + 4\beta} - \beta^2 k^4) \right]^{1/2} \right\} = 2 \operatorname{tg} k\Delta. \quad (38)$$

Фиксируя разные значения  $q$ , можно найти соответствующие им решения уравнения (38).

Численный расчет показывает, что для первых корней уравнения (36) отличие точного значения от оценки (37) сводится к следующим величинам:

	$q = 0,5$	$q = 1$	$q = 3$
$n = 0$	$\frac{\pi}{2} - k\Delta = 0,01592$	0,3169	1,57
$n = 1$	$\frac{3\pi}{2} - k\Delta = 10^{-6}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$	0,0602
$n = 2$	$\frac{5\pi}{2} - k\Delta = 5,8 \cdot 10^{-7}$	$< 10^{-5}$	0,00713
$n = 3$	$\frac{7\pi}{2} - k\Delta < 1 \cdot 10^{-10}$	$< 10^{-8}$	$8,7 \cdot 10^{-4}$

Следовательно, начиная с  $n = 2$ , условие (37) можно заменить равенством

$$k\Delta = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad (39)$$

имеющим очень любопытный физический смысл и простую трактовку. Отдельный движущийся

кинк в принципе может порождать некоторое излучение, волновое число которого  $k$  определяется скоростью солитона  $V$ . Кинки разнесены на расстояние  $2\Delta$ , поэтому условие (39) означает, что излученные волны одного и второго кинков находятся в противофазе. Следовательно, излучение от одного из кинков полностью гасит вне солитона поле другого кинка в результате обычной интерференции находящихся в противофазе волн. Этот результат можно рассматривать как иллюстрацию сформулированной в работе [10] возможности существования сложного составного безызлучательного солитона. В какой мере решение типа (27) действительно является решением уравнения (1), обсуждено в работе [6].

Авторы благодарны М. М. Богдану за обсуждения и полезные советы. Работа частично поддержана грантом INTAS №167 (за 1999 год).

Авторы имеют честь приурочить настоящую работу к юбилею академика Виктора Еременко, внесшего выдающийся вклад в изучение динамики магнитоупорядоченных сред.

1. H. J. Mikeska and M. Steiner, *Adv. Phys.* **90**, 191 (1991).
2. K. Nakajima, Y. Onodera, T. Nakamura, and R. Sato, *J. Appl. Phys.* **45**, 4095 (1974).
3. M. M. Bogdan and A. M. Kosevich, in: *Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology, NATO ASI Ser. Phys.* **329**, Plenum Press, New York, 373 (1994).
4. M. Peyrard and M. D. Kruskal, *Physica* **D14**, 88 (1984).
5. G. L. Alfimov, V. M. Eleonskii, N. E. Kulagin, and N. N. Mitskevich, *Chaos* **3**, 405 (1993).
6. M. M. Bogdan, A. M. Kosevich, and G. A. Maugin, *Wave Motion* **34**, 1 (2001).
7. А. М. Косевич, *ФНТ* **26**, 620 (2000).

8. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983); A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Sov. Sci. Rev. A, Phys.* **6**, 161 (1985).
9. B. A. Malomed, *Phys. Rev.* **E47**, 2874 (1993).
10. A. V. Buryak and N. N. Akhmediev, *Phys. Rev.* **E52**, 3572 (1995); A. V. Buryak, *Phys. Rev.* **E52**, 1156 (1995).

#### On conditions of existence of $1D$ magnetic solitons with frequency characteristics within the continuous spectrum

A. M. Kosevich and V. I. Grishaev

The solutions of the modified (to account for the highest dispersion) sinusoidal Gordon equation in the form of a double soliton ( $4\pi$ -kink) and a pair of spatially-separated coupled kinks are investigated. The condition for the absence of soliton radiation for long distances has been formulated analytically. The previous result on a discrete set of non-radiative composite solitons is confirmed. The physical meaning of these results is that at certain kink spacings the radiation from one of the kinks suppresses completely (beyond the soliton) the field of the other kink due to the ordinary interference of out-of-phase waves.