

Движение вихрей в кольцевой области

Т. И. Зуева

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины,
Украина, 61164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: zueva@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 23 февраля 1999 г., после переработки 26 августа 1999 г.

Работа посвящена анализу вихревых решений нелинейного уравнения Шредингера в ограниченной области. Изучается асимптотический предел, когда размеры вихревых ядер много меньше, чем межвихревые расстояния. Получена в явном виде система уравнений, описывающих динамику вихрей в области между двумя коаксиальными цилиндрами (в кольце). Показано, что при уменьшении внутреннего радиуса кольца система уравнений сводится к соответствующей системе в круге, а при уменьшении зазора получаем движение, аналогичное движению в прямолинейном канале. Дано аналитическое решение уравнения, когда в кольце имеется только один вихрь, и проведено численное моделирование движения двух вихрей при различных начальных положениях вихрей интенсивности произвольного знака.

Роботу присвячено аналізу рішень у вигляді вихорів нелінійного рівняння Шредингера в обмеженій області. Вивчається асимптотична границя, коли розміри ядер вихорів набагато менші, ніж відстані між вихорами. Отримано у явному вигляді систему рівнянь, що описують динаміку вихорів в області між двома коаксіальними циліндрами (в кільці). Показано, що при зменшенні внутрішнього радіуса кільця система рівнянь зводиться до відповідної системи у колі, а при зменшенні зазора отримуємо рух, аналогічний руху у прямолінійному вузькому каналі. Надано аналітичний розв'язок рівняння, коли в кільці є тільки один вихор, і проведено чисельне моделювання руху двох вихорів при різних початкових положеннях вихорів інтенсивності довільного знаку.

PACS: 67.40.Vs

Введение

Рассмотрим функционал

$$f(u) = \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla u|^2 + \alpha |u|^2 + \frac{\beta}{2} |u|^4. \quad (1)$$

Этот функционал представляет собой плотность свободной энергии сверхтекучей жидкости [1,2] (u — волновая функция; \hbar — постоянная Планка; m — масса атома гелия; α, β — параметры, зависящие только от температуры T , причем $\alpha < 0$). Минимизируя f относительно \bar{u} , получаем уравнение Эйлера — Лагранжа в виде

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u - \alpha u \left(1 + |u|^2 \frac{\beta}{\alpha} \right) = 0.$$

Перейдем к безразмерным переменным (u', x'), положив $x = \xi x', u = u_0 u', u_0^2 = -\alpha/\beta$, где

$$\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m} |\alpha| \quad (2)$$

— длина когерентности для He II, определяющая минимальную длину, на которой происходят заметные изменения $|u|$ (или ρ_s), т.е. ξ совпадает с радиусом a_0 сердцевин вихря.

Тогда уравнение (2) примет вид уравнения Гинзбурга — Ландау

$$\Delta' u' + u'(1 - |u'|^2) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) — так называемое стационарное уравнение Гинзбурга — Ландау. Нестационарные уравнения Гинзбурга — Ландау в математической физике рассматриваются в двух видах:

$$\Delta u + u(1 - |u|^2) = -i u_t, \quad (4)$$

$$\Delta u + u(1 - |u|^2) = u_t. \quad (5)$$

Уравнение (4) — это нелинейное уравнение Шредингера, уравнение (5) называется нелинейным уравнением теплового потока (nonlinear heat flow equation).

Существенной особенностью этих уравнений является существование асимптотических решений типа вихрей. Понятие вихря, введенное в гидродинамике, может быть применено для описания особенностей в различных средах. В литературе широко изучается движение вихрей в магнетиках, в сверхпроводниках, в заряженных жидкостях, в сверхтекучей жидкости.

В работах [3,4] было показано, что в нестационарном случае (5) (нелинейное уравнение теплового потока) вихри ведут себя подобно заряженным частицам (одноименные, т.е. имеющие завихренность одного знака, вихри отталкиваются, вихри разных знаков притягиваются), в то время как вихревые решения нелинейного уравнения Шредингера подобны гидродинамическим вихрям.

В настоящей работе используется процедура вывода уравнений, описывающих движение вихревой системы, предложенная в [4]. Эта процедура позволяет получить асимптотическое выражение для фазы волновой функции Φ с любой точностью и свести решение уравнения Гинзбурга—Ландау к решению начально-краевой задачи для Φ в заданной области. Выбор соответствующих граничных условий (условие Дирихле, Неймана или смешанные условия) позволяет значительно расширить спектр рассматриваемых задач. В частности, условие Неймана на твердой границе аналогично условию непротекания в гидродинамике или условию отсутствия втекающих и вытекающих из сверхпроводника токов. Граничные условия Дирихле описывают контакт между сверхпроводником и нормальным металлом, а смешанные граничные условия ставятся в задачах, описывающих поведение сверхпроводящего слоя в нормальном металле (см. , например, [5]).

Изучается движение вихрей в сверхтекучей жидкости (квантованных) в отсутствие магнитного поля в ограниченных областях, в частности в кольцевой области между двумя коаксиальными цилиндрами, в которой содержатся N вихрей интенсивности n_j , расположенных в точках $\xi_j = (\zeta_j, \eta_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$. Рассматривается асимптотический предел, когда размеры вихревых ядер много меньше, чем межвихревые расстояния.

Полученные в работе уравнения движения квантованных вихрей имеют вид

$$\dot{\xi}_j = 2\mathbf{K}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

$\mathbf{K}^{(j)} = \mathbf{K}^{(j)}(\xi_j; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ выражается через производную комплексного потенциала $W(z)$ потока идеальной жидкости в кольце [10], вычисленную в точке, где находится j -й вихрь:

$$\mathbf{K}^{(j)} = (\operatorname{Re} W'(z_j), -\operatorname{Im} W'(z_j)),$$

где $z_j = \zeta_j + i\eta_j$ — комплексные координаты j -го вихря.

Такой вид уравнений согласуется с уравнениями, встречающимися в литературе при описании магнитных вихрей и вихрей в других системах (см., например, [6,7]), хотя они получены совершенно другим способом.

Анализ этих уравнений показывает, что уравнение Шредингера (4) действительно допускает решение в виде вихрей, которые ведут себя подобно гидродинамическим вихрям. В работе описан конкретный вид этих уравнений в кольцевой области, позволяющий решить их численно, задав начальные положения вихрей. Показано, что при уменьшении внутреннего радиуса кольца решение сводится к решению соответствующей системы в круге, а при уменьшении зазора (т.е. при $R_2 - R_1 \ll R_1$) получаем движение, аналогичное движению в прямолинейном канале. Найдено аналитическое решение уравнения (6), когда в кольце имеется только один вихрь, и проведено численное моделирование движения двух вихрей при различных начальных положениях вихрей интенсивности произвольного знака.

Уравнение движения вихря

Рассмотрим стационарное уравнение Гинзбурга—Ландау

$$\Delta u + u(1 - |u|^2) = 0, \quad (7)$$

и его решения вида

$$u(\mathbf{x}) = U(r) \exp(i(n\theta + \theta_0)), \quad (8)$$

которые называются *вихревыми решениями*. Здесь (r, θ) — полярные координаты \mathbf{x} : $\mathbf{x} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. При $r > 0$ функция $U(r)$ удовлетворяет уравнению

$$U_{rr} + \frac{1}{r} U_r - \frac{n^2}{r^2} U + (1 - U^2)U = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь нелинейное уравнение Шредингера (4). Перейдем к новым переменным $\tilde{\mathbf{x}} = \epsilon \mathbf{x}'$, $\tilde{t} = \epsilon^2 t'$. В качестве малого параметра ϵ возьмем величину ξ (2), $\epsilon = \xi$. В новых переменных уравнение (4) принимает вид

$$\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} u (1 - |u|^2) = -iu_t. \quad (10)$$

Размер вихря имеет порядок $O(\varepsilon)$, а расстояние между вихрями $O(1)$, как в исходной физической постановке.

Для получения системы уравнений, описывающих динамику вихрей, воспользуемся процедурой, предложенной в работе [4].

Сначала рассмотрим область вне ядер вихрей и построим асимптотическое решение уравнения (10), рассматривая вихри как точечные особенности, расположенные в точках $\mathbf{x} = \xi_j(t)$. Это решение назовем «внешним» и будем искать его в виде

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}, t). \quad (11)$$

Можно показать (см. Приложение), что $|u_0| = 1$, откуда имеем $u_0 = e^{i\Phi_0(\mathbf{x}, t)}$. Фаза волновой функции $\Phi_0(\mathbf{x}, t)$ в объеме сверхтекучей жидкости, за исключением окрестностей ядер вихрей, является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta \Phi_0 = 0, \\ \Phi_0(\mathbf{x}, t) \rightarrow \theta_0 + n_j \theta, \quad \mathbf{x} \rightarrow \xi_j, \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = 0 \quad \text{на твердой границе} \end{cases} \quad (12)$$

и может быть определена для широкого спектра областей. Для кольцевой области $R_1 \leq r \leq R_2$ решение Φ_0 было найдено в виде [10]

$$\Phi_0(z) = \text{Re } W(z) = \text{Re} \left\{ i \sum_{k=1}^N n_k \left[\ln \sigma \left(i \ln \frac{z}{z_k} \right) - \ln \sigma \left(i \ln \frac{z z_k}{Z_{2,k}^2} \right) - \frac{2i\eta}{\omega_1} \ln \frac{r_k}{R_2} \ln z \right] \right\} + \text{const}. \quad (13)$$

Здесь $W(z)$ — комплексный потенциал; $\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса с полупериодами $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 = i \ln(R_2/R_1)$; $\eta = \zeta(\omega_1)$, $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса с теми же полупериодами [11]; $Z_{2,k} = R_2 \exp(i\tilde{\theta}_k)$; комплексная переменная $z = r \exp(i\tilde{\theta})$ отсчитывается от центра *кольца*, так что азимутальный угол $\tilde{\theta} = \text{arctg}(y/x)$, а $\tilde{\theta}_k = \text{arctg}(\eta_k/\zeta_k)$.

Раскладывая Φ_0 в ряд Тейлора в окрестности j -го вихря, получаем приближенное выражение для фазы волновой функции и, следовательно, для самой волновой функции u_0 . Это решение имеет вид

$$u_0 = e^{i\Phi_0} \approx e^{in_j \theta + i\theta_0} [1 + i\mathbf{K}^{(j)} \cdot \mathbf{r} + O(r^2)], \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(j)} &= \nabla \Phi_0 = (\text{Re } W'(z_j), -\text{Im } W'(z_j)); \\ W'(z_j) &= \frac{1}{z_j} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N n_k \left[\zeta \left(i \ln \frac{z_j z_k}{Z_{2,k}^2} \right) - \zeta \left(i \ln \frac{z_j}{z_k} \right) \right] + \\ &+ \frac{n_j}{z_j} \zeta \left(2i \ln \frac{r_j}{R_2} \right) - \frac{2i\eta}{\omega_1 z_j} \sum_{k=1}^N n_k \ln \frac{r_k}{R_2}. \quad (15) \\ \mathbf{r} &= (x - \zeta_j(t), y - \eta_j(t)), \end{aligned}$$

Теперь построим другое решение уравнения (10): положим

$$U^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = U_0 \left(\frac{\mathbf{x} - \xi_j(t)}{\varepsilon} \right) + \varepsilon U_1 \left(\frac{\mathbf{x} - \xi_j(t)}{\varepsilon} \right) + \dots$$

и будем искать приближенное решение при больших $\mathbf{X} = (\mathbf{x} - \xi_j(t))/\varepsilon$. Это решение, практически не зависящее от наличия границ области, может быть найдено аналогично решению задачи для нелинейного уравнения теплового потока о движении вихрей в неограниченной области [4] (см. Приложение):

$$\begin{aligned} U(\mathbf{X}, t) &= e^{in_j \theta + i\theta_0} \left[1 + \frac{i\varepsilon}{2} (\dot{\xi}_j \cdot \mathbf{X}) + O\left(\frac{1}{R_2}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 + \varepsilon \left(\dot{\xi}_j \cdot \frac{\mathbf{X}}{R} \right) \right) \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Чтобы решения (14) и (16) не противоречили друг другу, необходимо, чтобы при $\mathbf{r} = \varepsilon \mathbf{X}$ совпадали главные члены разложения, т.е.

$$\mathbf{K}^{(j)} \cdot \varepsilon \mathbf{X} = \frac{1}{2} (\dot{\xi}_j \cdot \varepsilon \mathbf{X}),$$

откуда

$$\dot{\xi}_j = 2\mathbf{K}^{(j)}. \quad (17)$$

Это и есть искомое уравнение движения j -го вихря. Варьируя j от 1 до N , получаем уравнения движения всех вихрей.

Зная конкретный вид комплексного потенциала $W(z)$ (13), можно получить всю необходимую информацию о движении вихрей в кольцах любых размеров.

Движение вихрей в цилиндрах и узких кольцах

Покажем, что при $R_1 \rightarrow 0$ получается движение вихрей в цилиндре. Действительно, при этом $|\omega_2| = \ln(R_2/R_1)$ велико, поэтому знаменатель ζ - и σ -функций $q = \exp(i\pi\omega_2/\omega_1) = R_1/R_2$ мал, эллиптические функции вырождаются в элементарные [11]:

$$\zeta(u) \approx \frac{\eta u}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi u}{2\omega_1}$$

и котангенсы легко вычисляются:

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{i}{2} \ln \frac{z_j z_k}{Z_{2,k}^2} \right) = - \frac{z_j + Z_{2,k}^2/z_k}{z_j - Z_{2,k}^2/z_k},$$

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{i}{2} \ln \frac{z_j}{z_k} \right) = - \frac{z_j + z_k}{z_j - z_k}.$$

Тогда из выражения (15) имеем

$$W'(z_j) \approx \sum_{k=1}^N n_k \left[\frac{1}{z_j - z_k} - \frac{1}{z_j - Z_{2,k}^2/z_k} \right].$$

Это и есть комплексно сопряженная скорость жидкости с N вихрями в цилиндре [8].

Интересен и другой предельный случай, «узкие кольца» $R_2 - R_1 \ll R_2$. В этом случае $|\omega_1| \gg |\omega_2|$ и q велико. Используя соотношение однородности для ζ -функций [11]

$$\zeta(z|\omega_1, \omega_2) = i\zeta(iz|\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) = i\tilde{\zeta}(iz),$$

приходим к полупериодам $\tilde{\omega}_1 = \ln(R_2/R_1)$, $\tilde{\omega}_2 = i\pi$, и знаменатель q становится малым, так что опять ζ -функции вырождаются в котангенсы:

$$\begin{aligned} \zeta \left(i \ln \frac{z_j}{z_k} \right) &= -i\tilde{\zeta} \left(\ln \frac{z_j}{z_k} \right) \approx \\ &\approx -\frac{i\tilde{\eta}}{\tilde{\omega}_1} \ln \frac{z_j}{z_k} - \frac{i\pi}{2\tilde{\omega}_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\tilde{\omega}_1} \ln \frac{z_j}{z_k}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta \left(i \ln \frac{z_j z_k}{Z_{2,k}^2} \right) &= -i\tilde{\zeta} \left(\ln \frac{z_j z_k}{Z_{2,k}^2} \right) \approx \\ &\approx -\frac{i\tilde{\eta}}{\tilde{\omega}_1} \ln \frac{z_j z_k}{Z_{2,k}^2} - \frac{i\pi}{2\tilde{\omega}_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\tilde{\omega}_1} \ln \frac{z_j z_k}{Z_{2,k}^2}. \end{aligned}$$

Волна над символами означает, что все величины вычислены при новых полупериодах. Кроме того,

$$\eta = \zeta(\omega_1) = i\tilde{\zeta}(i\pi) = i\tilde{\eta}'.$$

После элементарных вычислений получаем

$$\begin{aligned} W'(z) &= \frac{1}{z} \sum_{k=1}^N \frac{i\pi n_k}{2\tilde{\omega}_1} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\tilde{\omega}_1} \ln \frac{z_j}{z_k} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\tilde{\omega}_1} \ln \frac{z_j z_k}{Z_{2,k}^2} \right] + \\ &+ \frac{i}{z\tilde{\omega}_1} \sum_{k=1}^N n_k \ln \frac{R_2}{z_k}. \end{aligned}$$

Такова комплексно сопряженная скорость жидкости в узких кольцах. Чтобы получить движение в узких прямоугольных каналах, отобразим конформно кольцо с разрезом на отрезок полосы с помощью функции $u = i \ln(z/R_2)$.

Кольцо перейдет в горизонтальную полосу между прямыми $u = 0$ и $u = -\ln(R_2/R_1)$. Скорость жидкости в полосе (в канале) примет вид

$$W'(u) = \frac{W'(z)}{u'(z)}$$

$$= \frac{\pi}{2\tilde{\omega}_1} \sum_{k=1}^N n_k \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\tilde{\omega}_1} (u-u_k) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\tilde{\omega}_1} (u-u_k^*) \right] + C,$$

где $u_k = i \ln \frac{r_k \exp(i\theta_k)}{R_2}$; $u_k^* = i \ln \frac{R_2 \exp(i\theta_k)}{r_k}$;

C — некоторое постоянное течение.

Каждое слагаемое в сумме представляет собой скорость жидкости, порожденной бесконечной цепочкой Кармана [14], $2\tilde{\omega}_1 = 2 \ln(R_2/R_1)$ — расстояние между вихрями. Узость канала означает, что эти цепочки практически не влияют друг на друга, т.е. расстояние между цепочками гораздо больше, чем расстояние между вихрями в цепочке (это обеспечивается условием $|\tilde{\omega}_1| \ll |\tilde{\omega}_2|$).

Пример 1. Изучим подробнее уравнение (17) на примере движения одного вихря в кольце.

Пусть в кольце $R_1 \leq r \leq R_2$ имеется один вихрь, расположенный в точке $z_1 = r_1 \exp(i\theta_1)$.

Для $N = 1$ из выражений (15) и (17) имеем

$$W'(z_1) = \frac{n_1}{z_1} \zeta \left(2i \ln \frac{r_1}{R_2} \right) - \frac{2i\eta n_1}{\omega_1 z_1} \ln \frac{r_1}{R_2}.$$

Поскольку по [11]

$$\zeta(z) = \frac{\eta z}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2\omega_1} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin \frac{\pi n z}{\omega_1} \right],$$

для $\omega_1 = \pi$, $z_1 = 2i \ln (r_1/R_2)$ получаем

$$\zeta_0(z_1) \equiv \zeta(z_1) - \frac{\eta z_1}{\omega_1} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left[i \ln \left(\frac{r_1}{R_2} \right) \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin \left(2ni \ln \frac{r_1}{R_2} \right).$$

Отсюда

$$W'(z_1) = \frac{n_1}{z_1} \zeta_0(z_1).$$

Заметим, что $\zeta_0(z_1)$ — чисто мнимая величина. Таким образом, $W'(z_1) = (in_1/z_1)F(r_1)$, где $F(r_1)$ — действительная функция положения вихря r_1 . Тогда

$$\mathbf{K}^{(1)} = (\operatorname{Re} W'(z_1), -\operatorname{Im} W'(z_1)) = \frac{n_1}{r_1} F(r_1) \hat{e}_\theta,$$

где $\hat{e}_\theta = (\sin \theta_1, -\cos \theta_1)$.

Уравнение движения вихря принимает вид

$$\dot{\xi}_j(t) = \frac{2n_1}{r_1} F(r_1) \hat{e}_\theta.$$

Скорость вихря направлена по касательной к окружности, на которой находится вихрь. Это согласуется с гидродинамической теорией вихрей: вихрь в кольце движется по окружности [13].

Пример 2. Изучим движение двух вихрей в кольце. Для $N = 2$ из выражений (15) и (17) получаем уравнения движения двух вихрей.

Задавая размеры кольца, а также начальные положения вихрей, полагая интенсивности вихрей (n_1 и n_2) равными +1 или -1, их можно решить приближенно.

Решения для кольца с внутренним радиусом $R_1 = 0,5$ см и внешним радиусом $R_2 = 1,5$ см, полученные методом Рунге—Кутта для различных интенсивностей и при различных начальных положениях вихрей $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, приведены на рис. 1–5 (рисунки а, б, в соответствуют моментам времени $t_1 < t_2 < t_3$).

Пара «вихрь—вихрь» движется независимо с постоянной скоростью по одной окружности, если в начальный момент времени вихри находились на одной окружности достаточно далеко друг от друга (рис. 1). Если же в начальный момент времени вихри находились на разных окружностях, то вихрь, расположенный ближе к наружной стенке, движется быстрее и обгоняет второй вихрь. В момент обгона «внутренний» вихрь описывает петлю, а наружный слегка отклоняется к центру кольца (рис. 2).

«Вихрь—антивихрь» движется в основном в противоположных направлениях, однако это не простое движение по окружности. Вихрь, расположенный ближе к наружной стенке (будем называть его «наружным»), движется быстрее. Если в начальный момент времени вихри находились на разных окружностях по разные стороны от центра, то при сближении «наружный» вихрь замедляется, а «внутренний» меняет направление движения, ускоряется и описывает полный оборот (рис. 3). При приближении к наружному вихрю он опять замедляется и меняет направление движения, в то время как наружный вихрь ускоряется и описывает оборот. Таким образом, внутренний вихрь движется по довольно сложной траектории с петлями, а внешний — по траектории, близкой к окружности, причем оба вихря движутся очень неравномерно по времени.

Если в начальный момент пара «вихрь-антивихрь» находилась на одном радиусе, то вихри движутся в противоположных направлениях,

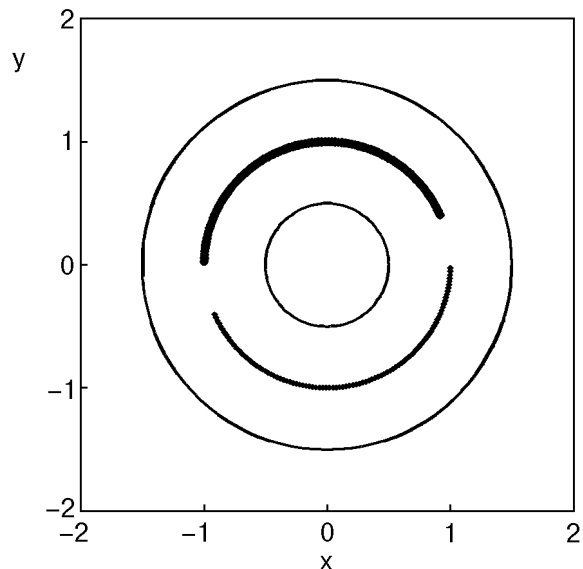


Рис. 1. Движение пары «вихрь-вихрь» ($n_1 = n_2 = 1$). Начальные положения вихрей $\mathbf{x}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (-1, 0)$ (на одной окружности). Вихри движутся по окружности независимо друг от друга с постоянной скоростью.

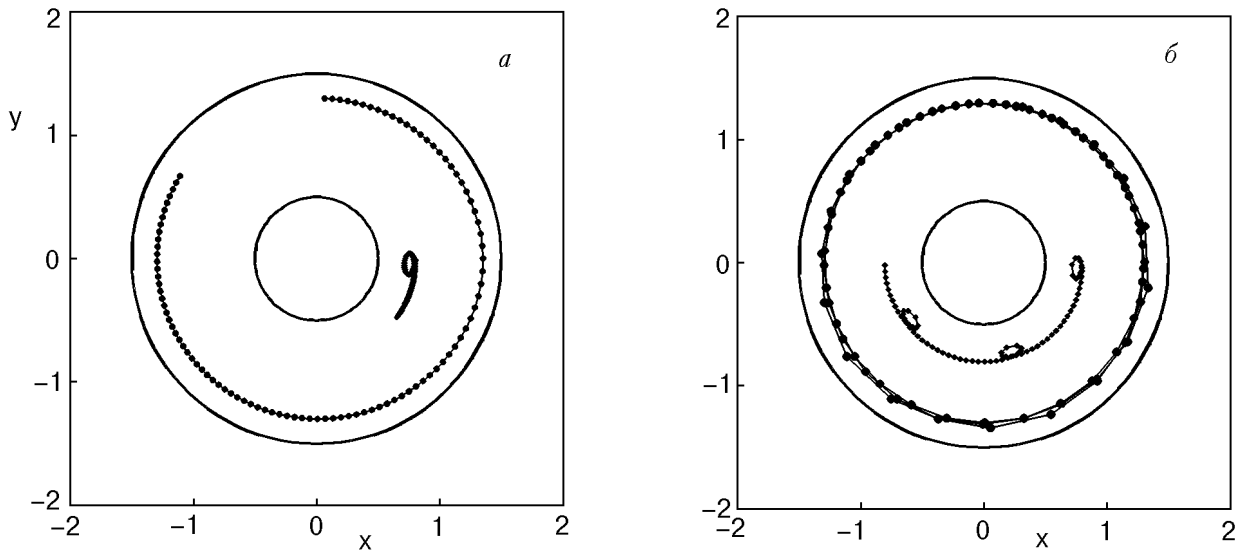


Рис. 2. Движение пары «вихрь-вихрь» ($n_1 = n_2 = 1$). Начальные положения вихрей $x_1 = (0,8; 0)$, $x_2 = (0; 1,3)$. Вихри движутся в одном направлении, причем второй вихрь (расположенный ближе к наружной стенке) движется быстрее. В момент обгона первый вихрь описывает петлю, а затем продолжает движение по окружности.

внешний вихрь движется быстрее, но при обгоне замедляется. Внутренний вихрь при этом отклоняется к центру кольца, описывая «лепесток» (рис. 4).

Не менее интересным оказывается движение вихрей разных знаков, расположенных в начальный момент времени на одной окружности на значительном расстоянии друг от друга (рис. 5,а). Вихри движутся навстречу друг другу, но, приблизившись достаточно близко, разворачиваются (рис. 5,б) и движутся в противоположных направлениях, каждый по своей замкнутой траектории! (рис. 5,в).

Заключение

В настоящей статье реализован метод решения уравнения Гинзбурга—Ландау в нестационарном случае (уравнение Шредингера (4)) для ограниченных областей, предложенный в работе [4]. Получена динамическая система уравнений (17), описывающих движение вихрей, — система обыкновенных дифференциальных уравнений. Правые части этих уравнений представляют собой градиенты фазы волновой функции конденсата и для сверхтекучей жидкости могут быть выражены через производную от векторного потенциала $W(z)$ жидкости с вихрями, зависящего от формы области. Приведен конкретный вид комплексного потенциала для кольцевой области.

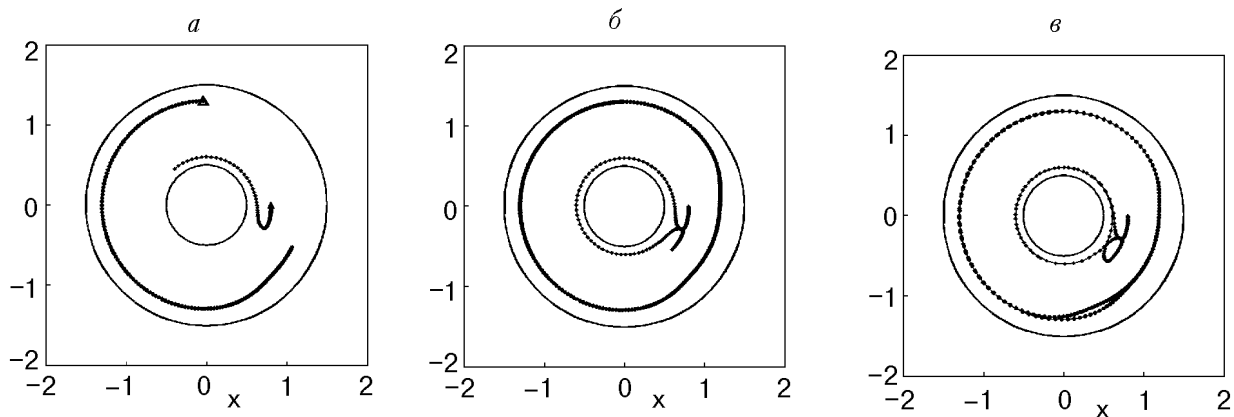


Рис. 3. Движение пары «вихрь-антивихрь» ($n_1 = -n_2 = 1$). Начальные положения вихрей $x_1 = (0,8; 0)$, $x_2 = (0; 1,3)$. Вихри начинают движение в противоположных направлениях, но второй вихрь движется быстрее (начальные положения вихрей отмечены треугольниками). При сближении второй вихрь замедляется, а первый меняет направление движения и ускоряется, описывая полный оборот. При следующем сближении картина повторяется. Таким образом, внутренний вихрь описывает сложную траекторию с петлями, а внешний движется почти по окружности, слегка отклоняясь к центру кольца при сближении с внутренним вихрем.

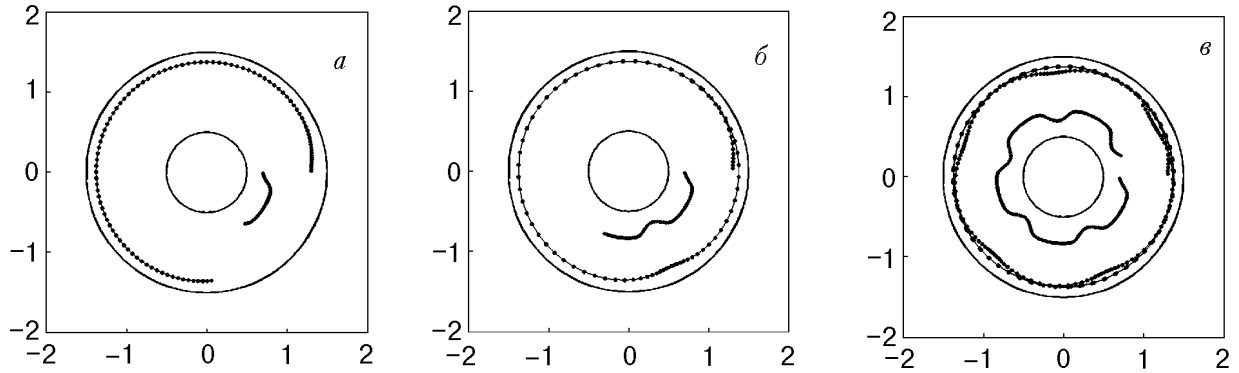


Рис. 4. Движение пары «вихрь-антивихрь» ($n_1 = -n_2 = 1$). Начальные положения вихрей $\mathbf{x}_1 = (0, 7; 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 3; 0)$ (на одном радиусе). Вихри движутся в противоположных направлениях, причем второй вихрь движется быстрее. При обгоне первого вихря второй вихрь замедляется, а первый отклоняется к центру кольца. Один «лепесток» траектории первого вихря соответствует одному обороту второго.

В работе получено аналитическое решение уравнения (17), описывающего движение одного вихря в кольце, а также численно исследовано движение пары вихрей при различных начальных положениях и интенсивностях вихрей. Траектории движения вихрей представлены на рисунках.

Приложение

Вывод уравнений движения вихрей

Подстановка разложения (11) в уравнение (10) дает следующую последовательность уравнений (коэффициенты при одинаковых степенях ϵ):

$$\epsilon^{-2} : u_0(1 - |u_0|^2) = 0, \quad (\text{П.1})$$

$$\epsilon^{-1} : u_1 \bar{u}_0 + u_0 \bar{u}_1 = 0, \quad (\text{П.2})$$

$$\epsilon^0 : -iu_{0t} = \Delta u_0 - |u_1|^2 u_0. \quad (\text{П.3})$$

Из первого уравнения сразу получаем $|u_0| = 1$, откуда имеем $u_0 = e^{i\Phi_0(\mathbf{x}, t)}$.

Из уравнения (П. 2) следует уравнение, связывающее фазу волновой функции u_0 с модулем волновой функции u_1 :

$$\Phi_{0t} = i\Delta\Phi_0 - (\nabla\Phi_0)^2 - |u_1|^2.$$

Отсюда, поскольку Φ_0 и $|u_1|$ действительны, получаем два уравнения:

$$\Delta\Phi_0 = 0, \quad (\text{П.4})$$

$$\Phi_{0t} = -(\nabla\Phi_0)^2 - |u_1|^2. \quad (\text{П.5})$$

Первое из них позволяет вычислить Φ_0 (если задать соответствующее граничное условие), второе позволяет найти $|u_1|$, если известно Φ_0 .

Найдем решение уравнения (П.4) в области вне вихревых ядер с асимптотическим граничным условием на ядрах

$$\Phi_0(\mathbf{x}, t) \rightarrow n_j \theta + \theta_0, \quad \mathbf{x} \rightarrow \xi_j(t), \quad (\text{П.6})$$

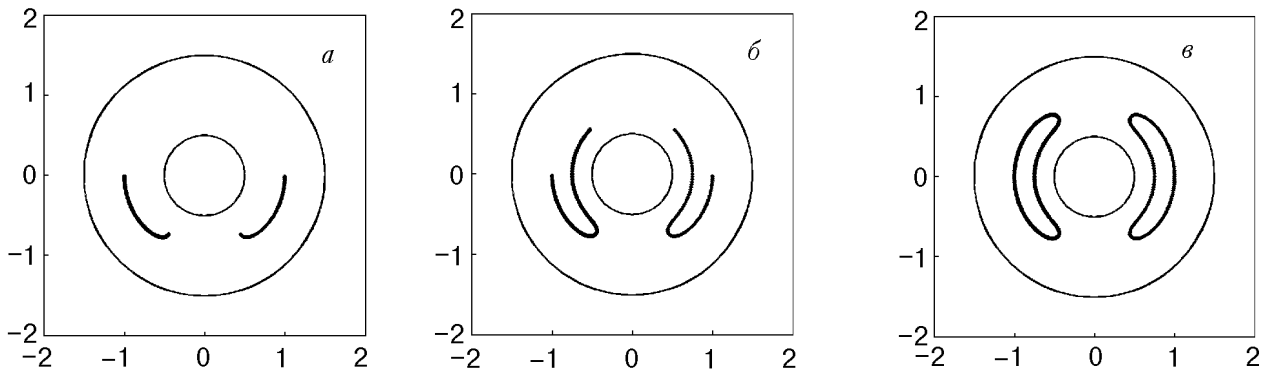


Рис. 5. Движение пары «вихрь-антивихрь» ($n_1 = -n_2 = 1$). Начальные положения вихрей $\mathbf{x}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (-1, 0)$ (на одной окружности). Вихри движутся в противоположных направлениях каждый по своей замкнутой траектории, никогда не приближаясь друг к другу.

где $\xi_j(t) = (\zeta_j, \eta_j)$ — координаты j -го вихря; $\theta = \arctg [(y - \eta_j)/(x - \zeta_j)]$ — азимутальный угол j -го вихря; θ_0 — фазовый сдвиг; $\theta_0 = \theta_0(\xi_1, \dots, \xi_N)$.

Кроме условия на вихрях (П. 6), в ограниченной области необходимо поставить условие на границе. Поскольку фаза волновой функции конденсата $\Phi(\mathbf{x}, t)$ связана с гидродинамическим потенциалом скорости $\varphi(\mathbf{x}, t)$ соотношением [9]

$$\varphi = \frac{\hbar}{m} \Phi,$$

то $\mathbf{v} = \nabla\varphi = (\hbar/m)\nabla\Phi$ и гидродинамическое условие непротекания на твердой границе $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ дает граничное условие Неймана для Φ : $\partial\Phi/\partial n = 0$ на границе.

Таким образом, для Φ_0 имеем следующую граничную задачу:

$$\begin{cases} \Delta\Phi_0 = 0 & \text{в области вне вихревых ядер,} \\ \Phi_0(\mathbf{x}, t) \rightarrow n_j\theta + \theta_0, & \mathbf{x} \rightarrow \xi_j, \\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = 0 & \text{на границе.} \end{cases} \quad (\text{П.7})$$

Решение этой задачи может быть найдено методом «отраженных вихрей» или каким-либо другим методом. В частности, для кольцевой области $R_1 \leq r \leq R_2$ потенциал потока φ идеальной жидкости, содержащей N вихрей интенсивностью n_k , расположенных в точках $z_k = r_k \exp(i\theta_k)$, может быть записан в комплексном виде [10].

Чтобы получить приближенное выражение для Φ_0 в окрестности j -го вихря, заметим, что при $z \rightarrow z_j$ только одно слагаемое в сумме по k в (13) имеет особенность — это слагаемое, соответствующее потенциалу вихря:

$$\Phi_0(z, t)|_{x \rightarrow \xi_j} = n_j \arctg \frac{y - \eta_j}{x - \zeta_j} = n_j \theta.$$

Следовательно, в окрестности j -го вихря $\Phi_0(z, t)$ можно записать в виде

$$\Phi_0(z, t) = n_j \theta + \Phi_0^1(z, t)$$

где $\Phi_0^1(z, t)$ в точке $z = z_j$ не имеет особенностей и может быть разложено в ряд Тейлора в окрестности этой точки:

$$\Phi_0^1(z, t) = \Phi_0^1(z_j) + (\nabla\Phi_0^1)|_{z=z_j} \cdot (\mathbf{x} - \xi_j) + O(\mathbf{x} - \xi_j)^2.$$

Первое слагаемое представляет собой фазовый сдвиг в точке $\xi_j(t)$: $\Phi_0^1(z_j) = \theta_0$.

Учитывая, что

$$\nabla\Phi_0 = (\text{Re } W'(z), -\text{Im } W'(z)),$$

и вычисляя $W'(z_j)$, исключив слагаемое с особенностью, получаем выражение (15). Волновая функция u_0 принимает вид (14).

Таково «внешнее» решение уравнения Шредингера в окрестности j -го вихря. Влияние границ области заключено в члене $\mathbf{K}^{(j)}$, который вычисляется конкретно для каждой области.

Найдем другое решение уравнения (4): будем искать его в виде ряда

$$U(\mathbf{x}, t) = U_0(\mathbf{X}) + \varepsilon U_1(\mathbf{X}) + \dots,$$

где введено обозначение

$$\frac{\mathbf{x} - \xi_j(t)}{\varepsilon} = \mathbf{X},$$

или в полярных координатах $\mathbf{X} = (R \cos \theta, R \sin \theta)$.

Подстановка $U(\mathbf{x}, t)$ в уравнение (4) дает последовательность уравнений

$$\Delta U_0 + U_0(1 - |U_0|^2) = 0, \quad (\text{П.8})$$

$$\Delta U_1 + (1 - 2|U_0|^2)U_1 - U_0^2 \bar{U}_1 = i\dot{\xi}_j(t)U_0. \quad (\text{П.9})$$

Решение первого уравнения

$$U_0(R, \theta, t) = f_0(R) e^{in_j\theta(t) + i\theta_0}, \quad (\text{П.10})$$

в котором $\theta(t)$ и θ_0 — те же, что и во внешнем решении, следует искать при условиях

$$\begin{cases} f_0(0) = 0, \\ f_0(\infty) = 1. \end{cases} \quad (\text{П.11})$$

Непосредственная подстановка U_0 (П.10) в уравнение (П.8) дает уравнение для f_0 :

$$f_0'' + \frac{1}{R} f_0' - \frac{n_j^2}{R^2} f_0 + (1 - f_0^2)f_0 = 0. \quad (\text{П.12})$$

Можно показать, что существует единственное решение уравнения (П.12) с граничными условиями (П.11), которое при больших R удовлетворяет соотношению

$$1 - f_0^2 - (n_j^2/R^2) = O(1/R^4), \quad (\text{П.13})$$

откуда $f_0 \approx 1 - \frac{n_j^2}{2R^2} + O\left(\frac{1}{R^4}\right)$.

Будем искать U_1 в виде [4]

$$U_1(R, \theta, t) = f_1(R, \theta, t) e^{in_j \theta + i\theta_0} =$$

$$= [(A_r(R) + iA_i(R)) \cos \theta +$$

$$+ (B_r(R) + iB_i(R)) \sin \theta] e^{in_j \theta + i\theta_0}.$$

Подстановка U_0 и U_1 в уравнение (П.9) дает четыре уравнения для A_r , A_i , B_r и B_i (см. [4]), и решение $U_1(R, \theta, t)$ при больших R принимает вид

$$U_1(R, \theta, t) = e^{in_j \theta + i\theta_0} \left[\frac{n_j C_{-1}}{R} \left(\dot{\xi}_j^\perp \cdot \frac{\mathbf{X}}{R} \right) + \frac{iR}{2} \left(\dot{\xi}_j \cdot \frac{\mathbf{X}}{R} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{iA_{-1}}{R} \left(\dot{\xi}_j \cdot \frac{\mathbf{X}}{R} \right) + O\left(\frac{1}{R^3}\right) \left(\dot{\xi}_j \cdot \frac{\mathbf{X}}{R} \right) \right],$$

где $\dot{\xi}_j = (\dot{\zeta}_j, \dot{\eta}_j)$, $\dot{\xi}_j^\perp = (-\dot{\eta}_j, \dot{\zeta}_j)$.

Тогда получаем полное решение $U = U_0 + \varepsilon U_1$ при больших R :

$$U(\mathbf{X}, t) = e^{in_j \theta + i\theta_0} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{i}{2} (\dot{\xi}_j \cdot \mathbf{X}) + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \left(1 + \varepsilon \left(\dot{\xi}_j \cdot \frac{\mathbf{X}}{R} \right) \right) \right],$$

которое оценивает решение в области вблизи границы вихря, где велика величина $R = |\mathbf{X}| = |\mathbf{x} - \xi_j(t)|/\varepsilon$.

1. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **20**, 1064 (1950).
2. Д. Р. Тилли, Дж. Тилли, *Сверхтекучесть и сверхпроводимость*, Мир, Москва (1977).
3. John C. Neu, *Physica* **D43**, 385 (1990).
4. Weinan E, *Physica* **D77**, 384 (1994).

5. П. Де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, Мир, Москва (1968).
6. А. В. Никифоров, Э. Б. Сонин, *ЖЭТФ* **85**, 642 (1983).
7. А. А. Thiele, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 230 (1973).
8. С. Паттерман, *Гидродинамика сверхтекучей жидкости*, Мир, Москва (1978).
9. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика, ч.2, Теория конденсированного состояния*, Наука, Москва (1978).
10. А. Д. Тюпцов, Т. И. Зуева, *Мат. физика, анализ и геометрия* **1**, 529 (1994).
11. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*. М. Абрамовиц и И. Стиган (ред.), Наука, Москва (1979).
12. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1973).
13. А. Д. Тюпцов, Т. И. Зуева, *ФНТ* **20**, 1116 (1994).
14. Л. М. Милл-Томсон, *Теоретическая гидродинамика*, Мир, Москва (1964).

The motion of vortices in the ring

T. I. Zueva

We study the dynamics of vortices in the time-dependent Ginzburg–Landau theory (the Schrödinger equation) in an asymptotic limit where the vortex core size is much smaller than the intervortex distance. We obtain a system of equations that describe the dynamics of vortices in the domain between two coaxial cylinders (in a ring). We show that when we reduce the inner radius of the ring we obtain a system of equations in a circle and if we reduce the gap we have the motion in a channel. An analytical solution of the equation is written where there is only one vortex in the ring. Numerical solutions are given for the motion of two vortices with different intensities that begin to move from arbitrary initial positions.