

Рэлеевские солитоны огибающей у поверхности с нелинейным пленочным покрытием

А.С. Ковалев, Е.С. Соколова

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 20 июля 2006 г.

Исследована динамика солитонов огибающей рэлеевского типа, локализованных вблизи поверхности однородной изотропной упругой среды, покрытой тонким слоем нелинейного (ангармонического) материала. Предложен вариант асимптотической процедуры, позволивший найти приближенные аналитические решения для таких солитонов.

Досліджено динаміку солітонів огинаючої релеївського типу, які локалізовані поблизу поверхні однорідного ізотропного пружного середовища, вкритого тонким шаром нелінійного (ангармонічного) матеріалу. Запропоновано варіант асимптотичної процедури, яка дозволила знайти набліжені аналітичні розв'язки для таких солітонів.

PACS: **68.35.-p** Поверхности твердого тела и границы раздела;
68.35.Ja Динамика и колебания на поверхности и границе раздела.

Ключевые слова: упругое полупространство, нелинейная пленка, поверхностные волны, нелинейные возбуждения, солитоны огибающей.

Введение

Проблема нелинейных акустических поверхностных упругих волн экспериментально и теоретически интенсивно исследуется на протяжении последних 50 лет [1]. Однако первоначально изучали в основном нестационарные нелинейные эффекты типа возбуждения кратных гармоник, и вопрос о возможности существования стационарных нелинейных поверхностных волн оставался открытым. Позже в рамках общей теории нелинейных волн стало ясно, что для существования стационарных нелинейных волн (как пространственно-периодических, так и уединенных) существенно необходимо наличие сильной дисперсии упругих волн [2]. Стандартная теория упругости дисперсию упругих волн, обусловленную дискретностью кристаллической решетки (ниже — *собственную дисперсию*), как правило, не учитывает [3] из-за ее малости в случае бесконечной упругой среды. В работах [4,5] впервые было обращено внимание на то, что дисперсия упругих волн может быть существенно увеличена при рассмотрении поверхностных волн, локализованных у поверхности полупространства, покрытого слоем другого вещества. При этом, кроме

естественного пространственного масштаба — межатомного расстояния, появляется дополнительный пространственный параметр — эффективная толщина покрывающего слоя, которая может быть значительно больше межатомного расстояния. И действительно, в такой геометрии экспериментально обнаружены нелинейные стационарные периодические рэлеевские волны [4,5]. В экспериментах по лазерному возбуждению нелинейных поверхностных волн большой интенсивности на поверхности, покрытой слоем другого вещества [6–10], были обнаружены поверхностные солитоны стационарного профиля рэлеевского типа. Аналитические исследования этой проблемы упрощаются, когда нелинейные свойства поверхностного слоя существенно превосходят нелинейные свойства подложки и полупространство можно рассматривать в гармоническом приближении. Это справедливо, например, для систем с металлической подложкой, покрытой монослоем атомов благородных газов [11]. Такая модель выглядит естественной, поскольку из-за сильной локализации поверхностных волн вблизи поверхности именно здесь и следует учитывать нелинейные свойства упругой среды. Задача о рэлеевских со-

литонах стационарного профиля вблизи поверхности гармонического упругого полупространства, покрытого тонким слоем ангармонического материала, рассмотрена в работах [12–14]. При этом показано, что в некоторых обобщенных феноменологических моделях [12,14,15] возможно существование рэлеевских солитонов стационарного профиля, для которых найдены точные аналитические решения. Однако в реальной физической ситуации для упругого полупространства с монослойным покрытием или покрытием в несколько слоев возникающая дополнительная дисперсия столь велика, что нелинейность не может ее скомпенсировать, и рэлеевские солитоны стационарного профиля не могут существовать. Они могут возникнуть только за счет собственной дисперсии при определенном соотношении параметров системы, при котором дополнительная (нелокальная) дисперсия подавляется [14]. Наблюдаемые экспериментально солитоны стационарного профиля имеют настолько локализованный характер, что аналитические результаты, полученные в рамках длинноволнового приближения (в рамках дифференциальных уравнений), носят лишь качественный характер [10]. С другой стороны, те же эксперименты (см. рис. 4 в работе [10]) показывают, что распространяющийся солитон стационарного профиля, движущийся со скоростью, несколько превышающей рэлеевскую, сопровождается пространственно-локализованным возмущением, движущимся со скоростью, меньшей рэлеевской. Возможно, это — линейные волны, «излучаемые» солитоном. Но также возможно, что это — упругие волны, нелинейно связанные в так называемый «солитон огибающей».

Поэтому возникает вопрос о возможности существования в рассматриваемых упругих системах с тонким нелинейным пленочным покрытием рэлеевских солитонов типа *солитонов огибающей*. Обычно в одномерных системах этот вопрос легко исследуется в рамках тех или иных асимптотических методов [16]. В многомерных системах асимптотическая процедура нахождения солитонных решений становится нетривиальной и сложной даже в основном (резонансном) приближении. В настоящей работе показана возможность существования рэлеевских солитонов огибающей в системах с нелинейным покрытием и исследованы свойства соответствующих решений.

1. Формулировка модели и динамические уравнения

Даже для линейного (гармонического) упругого полупространства с тонким нелинейным покрытием задача о формулировке эффективных граничных условий является сложной и нетривиальной [13]. Поэтому для описания динамики нелинейных поверхностных волн в такой системе сформулирована

следующая простая модель [14]. Упругое полупространство рассматривается в рамках линейной теории упругости (т.е. в рамках дифференциальных уравнений) без учета собственной дисперсии среды. Поверхностное покрытие моделируется ангармоническим монослоем или несколькими слоями атомов с нелинейным взаимодействием между ними и с атомами подложки. В первом приближении можно считать, что речь идет о монослойном покрытии (хотя в [14] показано, что увеличение толщины поверхностного слоя ведет лишь к перенормировке некоторых констант модели). В такой модели возможно строго (в меру малого параметра — отклонения скорости нелинейных поверхностных волн и поверхностных солитонов от скорости рэлеевских волн в линейной среде без пленочного покрытия) сформулировать эффективное граничное условие и свести рассматриваемую задачу к одномерной.

Рассмотрим поверхность упругого полупространства ($z < 0$), покрытого монослойным слоем другого (ангармонического) материала. Будем считать, что смещения атомов не зависят от координаты y в плоскости поверхности, а нелинейная поверхностная волна рэлеевского типа распространяется вдоль оси x . При этом задача становится эффективно двумерной. Учтем смещения атомов только в сагиттальной плоскости xz . Полупространство предполагаем линейным и изотропным, а в энергии взаимодействия атомов монослоя между собой и с атомами поверхности полупространства (ближайшими и следующими за ближайшими) учитываем слагаемые как квадратичные, так и кубические по относительным смещениям (взаимодействие предполагаем центральным). В [14] было показано, что в основном приближении достаточно учитывать ангармонические слагаемые лишь во взаимодействии атомов поверхностного монослоя между собой:

$$E_{\text{sur}} = \sum_n \left\{ \frac{\alpha}{2} \xi_{n,n+1}^2 - \frac{\beta}{3} \xi_{n,n+1}^3 \right\}, \quad (1)$$

где

$$\xi_{n,n+1} = \sqrt{(U_n - U_{n+1} - a)^2 + (V_n - V_{n+1})^2} - a, \quad (2)$$

n нумерует атомы поверхностного слоя, a — равновесное расстояние между атомами, U_n, V_n — смещения атомов монослоя в направлениях x и z , α, β — константы линейного и нелинейного межатомного взаимодействия в монослое. В длинноволновом приближении энергия деформированного монослоя принимает вид

$$E_{\text{sur}} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{\alpha}{2} U_x^2 - \frac{\alpha}{24} U_{xx}^2 - \frac{\beta}{3} U_x^3 + \frac{\alpha}{2} U_x V_x^2 \right). \quad (3)$$

Как указывалось выше, в основном приближении достаточно учитывать лишь линейное взаимодействие между атомами монослоя и подложки. При этом в длинноволновом приближении энергия взаимодействия имеет вид

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\lambda}{2} (u_s - U)^2 + \frac{\lambda + \gamma}{2} (v_s - V)^2 \right], \quad (4)$$

где u_s и v_s — смещения атомов в направлении осей x и z на поверхности подложки, γ — коэффициент упругого (центрального) взаимодействия ближайших атомов подложки и покрывающего монослоя, λ — коэффициент упругого взаимодействия атома монослоя и следующих за ближайшими соседними атомами поверхности подложки.

Полупространство подложки опишем в рамках изотропной упругой среды, т.е. в рамках волновых уравнений со скоростями c_l и c_t продольных и поперечных упругих волн. Еще раз подчеркнем, что собственную дисперсию учитываем только в поверхностном слое (второе слагаемое в (3)).

При выводе эффективных одномерных уравнений динамики нелинейных поверхностных волн предполагалось, что влияние монослоя слабое и характеристики нелинейной волны близки к таковым в линейной волне Рэлея в полупространстве без пленочного покрытия. В частности, для солитонов стационарного профиля с зависимостью всех смещений от координаты x и времени t в комбинации $(x - ct)$ предполагалось, что скорость перемещения центра солитона c незначительно отличается от скорости Рэлея c_R . При наличии дополнительной временной зависимости, характерной для солитонов огибающей, групповая скорость солитона должна мало отличаться от рэлеевской. (Фактически эти условия означают малость амплитуды поверхностной волны, что соответствует реальным экспериментам.) При этом возникает малый параметр $\xi = (c - c_R)/c_R \ll 1$, с помощью которого удается сформулировать приближенную (но точную в теорфизическом смысле) теорию и в основном порядке вывести нелинейное эволюционное уравнение для поверхностных солитонов. Для волн стационарного профиля в длинноволновом приближении двумерная линейная задача в линейном упругом полупространстве сводится к решению уравнения Лапласа, для которой легко найти соотношение между различными компонентами деформации на поверхности [17], а уравнение динамики сводится к одномерному нелинейному интегро-дифференциальному

уравнению для продольной деформации в монослое $P = \partial U / \partial x$ [14]:

$$\varepsilon P - \tilde{\eta} H P_\zeta - \varphi P_{\zeta\zeta} - \tilde{\psi} H (P^2)_\zeta = 0, \quad (5)$$

где $\tilde{\eta}$, φ , $\tilde{\psi}$ — сложные функции линейных и нелинейных упругих модулей монослоя и полупространства, а также масс соответствующих атомов, а $\zeta = x - ct$ — фаза бегущей волны. Интегральный оператор Гильберта

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \frac{dx'}{x' - x}$$

возникает из-за двумерности исходной задачи (наличия двумерной подложки). В уравнении (5) четвертое нелинейное слагаемое определяется нелинейными свойствами покрывающего слоя и пропорционально его эффективной толщине (она может быть существенно больше межатомного расстояния), третье дифференциальное слагаемое — «собственной» дисперсией системы, связанной с дискретностью упругой среды покрытия (коэффициент φ пропорционален a^2 и является малым). С другой стороны, дисперсионное слагаемое, определяемое поверхностным покрытием (второе в уравнении (5)), может быть существенно большим (коэффициент $\tilde{\eta}$ зависит от эффективной толщины покрытия и соотношения модулей полупространства и поверхностного слоя). Однако это слагаемое, как и нелинейное, содержит лишь одну пространственную производную по сравнению с двумя пространственными производными в третьем слагаемом. В отличие от операции дифференцирования, интегральное преобразование Гильберта не приводит к масштабному преобразованию функций. Поэтому дисперсия линейных волн, описываемая этим слагаемым, не может скомпенсировать нелинейность последнего слагаемого, и в общем случае в рассматриваемой системе рэлеевские солитоны стационарного профиля существовать не могут. Лишь когда коэффициент $\tilde{\eta}$ в (5) становится аномально малым, возможно существование таких солитонов, но с необычной формой и аномально малым пространственным размером [14].

Рассмотрим вопрос о возможности существования поверхностных рэлеевских солитонов другого типа — динамических солитонов огибающей [2].

В линейном пределе из уравнения (5) следует закон дисперсии рэлеевских волн, модифицированных из-за наличия поверхностного слоя:

$$\omega = c_R k (1 - d|k|), \quad (6)$$

где d — параметр размерности длины, конкретный вид которого приведен в [14]. Заметим, что с ростом волнового вектора k скорость волны из-за поверх-

ностного покрытия уменьшается. Удобно переписать этот закон дисперсии не в виде зависимости частоты рэлеевской волны от волнового вектора $\omega(k)$ в лабораторной системе координат, а в виде зависимости частоты $\tilde{\omega}(C) = \omega - kC$ в системе, движущейся с групповой скоростью линейных волн $C = \partial\omega/\partial k$, от самой этой скорости [2]:

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{4c_R d} (c_R - C)^2, \quad C < c_R. \quad (7)$$

График этой зависимости приведен на рис. 1 в виде кривой 1. (Заметим, что если C близка к скорости локализованной волны c , то соотношение (7) можно переписать в виде $\tilde{\omega} = \varepsilon^2 c_R / 4d$.) Область скоростей малоамплитудных однопараметрических рэлеевских солитонов с $C - c_R \ll c_R$, подробно исследованных в [14], приведена на рисунке в виде линии 2, где под параметром C подразумевается теперь скорость солитона. Область возможных скоростей солитонов огибающей обычно «комплиментарна» области существования солитонов стационарного профиля. В данном случае это область с $C < c_R$. На плоскости $\tilde{\omega}C$ эта область заштрихована (3). Она прилегает к линии линейных рэлеевских волн (1). При приближении скорости к критическому значению c_R область существования малоамплитудных солитонов огибающей сужается (сужается область, в которой применим асимптотический метод нахождения таких решений).

Задача нахождения солитонов огибающей достаточно сложна: в таком солитоне, кроме зависимости от координаты вида $(x - ct)$, в системе, движущейся со скоростью c , появляется дополнительная периодическая временная зависимость фазы волны. Поэтому для решения двумерной задачи в линейном полупространстве удобно перейти к пространственным переменным $(x - c_R t, z)$ и «медленной» времен-

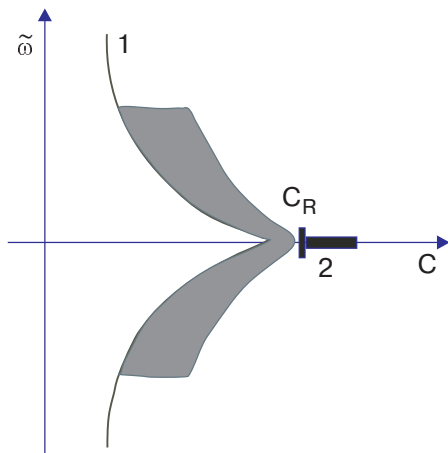


Рис. 1. Зависимость частоты от скорости для линейной волны Рэля (1), однопараметрических рэлеевских солитонов (2) и рэлеевских солитонов огибающей (3).

ной переменной $\tau = \xi t$ (предполагается, что $\xi \ll 1$). Для солитонов стационарного профиля эта дополнительная временная зависимость просто перенормирует скорость волны и фаза $x - c_R t$ преобразуется в $x - ct = x - c_R(1 + \xi)t$, т.е. очевидно, что малый параметр ξ связан с введенным ранее параметром ε . Для волн стационарного профиля эта связь тривиальна: $\xi = \varepsilon$ и $\tau = \varepsilon t$. С другой стороны, при изучении солитонов огибающей параметр ξ будет определять не только отклонение скорости солитона от рэлеевской (с другим знаком), но и низкочастотные внутренние осцилляции решения. Однако поскольку солитоны огибающей представляют собой двухпараметрические возбуждения, то в качестве одного независимого параметра можно выбрать $\xi = \varepsilon$.

Из (4) следует, что силы, действующие на поверхность подложки со стороны монослоя, равны $f_x = \lambda(U - u_s)$ и $f_z = (\lambda + \gamma)(V - v_s)$ и компенсируются соответствующими напряжениями на поверхности полупространства. Для сведения задачи к одномерной необходимо выразить компоненты деформаций на поверхности только через продольные деформации. В статическом случае или для волн стационарного профиля, зависящих от z и комбинации $x - ct$, эта связь для двумерного уравнения Лапласа находится достаточно просто [17]. Для солитона огибающей имеем двумерное волновое уравнение. Тем не менее приближенная связь компонент деформации на поверхности полупространства может быть найдена и в этом случае, если воспользоваться введенным выше малым параметром. Компоненты смещений u, v необходимо представить в виде сумм компонент из продольной и поперечной составляющих волны ($u = u_l + u_t, v = v_l + v_t$). Тогда в основном приближении решение двумерной задачи в линейном полупространстве приводит к следующему соотношению компонент деформации и скоростей на поверхности (см. [14]):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \sqrt{1 - \left(\frac{c_R}{s}\right)^2} H \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - \xi \frac{c_R}{s^2} \left(1 - \left(\frac{c_R}{s}\right)^2\right)^{-1/2} H \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} \Big|_s = 0. \quad (8)$$

Фактически это четыре соотношения для продольного и поперечного вкладов в две компоненты смещений $\mathbf{u} = (u, v)$ на поверхности упругого полупространства: в соотношениях для поперечной волны с $\mathbf{u}^t = (u^t, v^t)$ параметр s в (8) соответствует скорости поперечных волн c_t , а для продольных волн с $\mathbf{u}^l = (u^l, v^l)$ $s = c_l$. Использование этих соотношений позволяет вывести окончательное замкнутое динамическое уравнение для продольной компоненты деформации в монослое P , обобщающее на нестационарный случай уравнение (5). Если в каче-

стве малого параметра выбрать $\xi = \varepsilon$, то уравнение (5) приобретает вид

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial^2}{\partial X^2} HP + \psi \frac{\partial}{\partial X} H \left(P \frac{\partial}{\partial X} P \right) = 0 \quad (9)$$

со следующими значениями входящих в него параметров:

$$\psi = (M/4\rho) \kappa_t^{-1} [(1 - c_R^2/2c_t^2)^2 + 2\beta/\alpha];$$

$$\eta = (M/\rho) [\kappa_l + \kappa_t (1 - c_f^2/c_R^2)] c_R^2/2c_t^2;$$

$$\kappa_{t,l}^2 = 1 - c_R^2/c_{t,l}^2;$$

c_f — скорость звука в пленке; M — масса атомов покрытия, ρ — плотность вещества в полупространстве и «медленная» пространственная переменная $X = \varepsilon(x - c_R t)G$; где G — сложная (но вполне определенная) комб от волнового вектора $\omega(k)$ инация параметров вещества подложки порядка единицы. Заметим, что в данном случае мы не учитываем собственную дисперсию волн в монослое (третье слагаемое в (5)), поскольку, как будет показано ниже, структура солитонов огибающей определяется «основной» дисперсией, обусловленной наличием монослоя.

Наконец, введя временную производную $T = \eta\tau$ и полевую переменную $F = \psi P/\eta$, перепишем (9) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial F}{\partial T} + H \frac{\partial^2}{\partial X^2} F + \frac{\partial}{\partial X} H \left(F \frac{\partial}{\partial X} F \right) = 0 \quad (10)$$

или

$$H \frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(F + \frac{1}{2} F^2 \right) = 0. \quad (11)$$

Эти уравнения являются основными для дальнейшего исследования рэлеевских солитонов огибающей. Подчеркнем, что в них уже учтена основная динамика рэлеевских волн. Это означает, что, например, на рис. 1 весь график смещается на величину c_R по оси скоростей, и малый параметр ε ниже будет определять новую перенормированную скорость огибающей солитона (относительно рэлеевской скорости).

2. Малоамплитудные рэлеевские солитоны огибающей

Поскольку солитоны огибающей представляют собой связанные состояния линейных волн [11], то прежде всего необходимо знать их спектр. Мы обсудили его выше (см. (6), (7)). В новых переменных из линеаризованного уравнения (10) следует, что линейные волны вида $F = F_0 \cos(\kappa X - \Omega T)$ имеют за-

кон дисперсии вида $\Omega = -\text{sgn}(\kappa)\kappa^2$. Поскольку $X = \varepsilon G(x - c_R t)$, то $\Omega \sim \tilde{\omega}$ из (7), т.е. представляет собой перенормированную частоту в системе отсчета, движущейся с рэлеевской скоростью $\tilde{\omega} \sim \varepsilon^2 \Omega$.

Уравнения (10),(11), по-видимому, не интегрируются точно, и решения для солитонов огибающей возможно найти лишь приближенно, используя тот или иной метод теории возмущения. При этом, по-прежнему предполагая малость отклонения скорости солитона от рэлеевской, необходимо одновременно предположить и малость отклонения частоты от частоты нелокализованной рэлеевской волны (или малость амплитуды). На рис. 1 это узкая область как по скоростям, так и по частотам. Обычно малоамплитудные решения для солитонов огибающей в неинтегрируемых системах достаточно легко найти с помощью различных асимптотических процедур (см., например, [12]). В соответствии с ними функция $F(X, T)$ представляется в виде ряда Фурье по периодической переменной (осцилляции в системе отсчета, движущейся со скоростью огибающей солитона) с пространственно локализованными коэффициентами ряда Фурье этого разложения

$$F(\kappa, T) = f_0(\sigma) + f_1(\sigma) \cos \theta + f_2(\sigma) \cos 2\theta + \dots, \quad (12)$$

где $\theta = \kappa X - \Omega T$ — фаза «несущей» волны, а $\sigma = X - vT$ — фаза огибающей, скорость которой близка к групповой скорости несущей волны в линейном приближении $V = \partial\Omega/\partial\kappa = -2\kappa$. Во избежание недоразумения напомним, что v — скорость огибающей в системе отсчета, движущейся с рэлеевской скоростью. Пространственный размер огибающей $L \sim 1/\mu$, где параметр $\mu \ll 1$ характеризует отклонение частоты нелинейной волны Ω от частоты $\Omega(\kappa) = -\kappa^2$ линейной волны с тем же значением волнового числа. Функции $f_n(\sigma)$ и параметр v должны раскладываться в степенные ряды по μ . В данном разделе удобно выбрать в качестве этого параметра величину $\mu^2 = \Omega - \Omega(\kappa)$ (ниже $\kappa > 0$).

Необычность асимптотической процедуры для интегро-дифференциального уравнения с преобразованием Гильберта заключается в следующем. Действие оператора возведения в степень и оператора дифференцирования на слагаемые в разложении (12) не выводит их за рамки разложения в тригонометрический ряд Фурье:

$$\frac{\partial}{\partial X} f_n(\sigma) \cos n\theta = \frac{\partial f_n}{\partial X} \cos n\theta - n f_n(\sigma) \sin n\theta, \quad (13)$$

в то время как действие оператора Гильберта более сложно:

$$H(f_n(\sigma) \cos n\theta) = H(f_n(\sigma)) \cos n\theta - \text{sgn } \kappa f_n(\sigma) \sin n\theta - \text{sgn } \kappa H(H(f_n(\sigma) \sin n\theta)). \quad (14)$$

Быстроосциллирующая зависимость от фазы последнего слагаемого уже не сводится к тригонометрической функции от фазы θ . Но ситуация существенно упрощается при слабой локализации огибающей солитона, когда ее размер L существенно больше длины несущей волны. В этом случае легко показать, что если фурье-преобразование функции $\Psi(\mu\sigma)$ имеет экспоненциально убывающие на бесконечности асимптотики (функция $\Psi(p)$ гладкая в нуле), то справедливо соотношение

$$H(\Psi(\mu\sigma) \cos n\theta) = -\text{sgn } \kappa \Psi(\mu\sigma) \sin n\theta + O(\exp(-\sigma\kappa/\mu)), \quad (15)$$

где $\sigma = na$ при $\Psi \propto [a^2 + (\mu\sigma)^2]^{-1}$ и $\sigma = n\pi/2$ при $\Psi \propto \text{sech}(\mu\sigma)$. В этом случае

$$H\left(\frac{\cos n\theta}{\text{ch}^m \mu\sigma}\right) \approx \frac{H(\cos n\theta)}{\text{ch}^m \mu\sigma} - \alpha_{nm} \left(\frac{\kappa}{\mu}\right)^{m-1} \times \frac{\exp(-\pi n|\kappa|/2\mu)}{\sqrt{(\pi/2)^2 + \mu^2 \sigma^2}} \cos(n\kappa^2 T - \arctg(\pi/2\mu\sigma)). \quad (16)$$

Таким образом, видно, что решение не может быть представлено в виде ряда из функций типа $\cos n\theta/\text{ch}^m \mu\sigma$, как в случае одномерных солитонов огибающей. Появляются слагаемые со степенными асимптотиками огибающей и измененной фазой несущей волны. Однако большинство слагаемых со степенными асимптотиками имеет экспоненциально малую амплитуду и не должны учитываться в степенных разложениях по малому параметру μ . Исключение составляют слагаемые f_0 , не зависящие от фазы несущей волны. Появление таких слагаемых характерно для нелинейных эволюционных уравнений с квадратичной нелинейностью. В одномерных системах возникает следующая иерархия малости разных слагаемых: $f_1 \sim \mu$, $f_0 \sim f_2 \sim \mu^2$ и при этом $f_0 \sim \text{sech}^2(\mu\sigma)$. Таким образом, полная статическая продольная деформация в солитоне огибающей не нулевая и имеет порядок величины μ . В двумерной задаче ненулевая статическая деформация в монослое $\int f_0 dx \propto \int P dx \approx \int (dU/dx) dx$ приводила бы к ненулевой деформации на поверхности кристалла ($U \approx u_s$) и, следовательно, расходимости объемной энергии. Однако в рассматриваемом нами случае из (10) следует, что $f_0 = (1/4v)(\partial H f_1^2 / \partial X)$. Как показано ниже, в малоамплитудном пределе $f_1 \sim \mu$ и $\partial/\partial X \sim \mu$. Поэтому, во-первых, $f_0 \sim \mu^3$, во-вторых, f_0 имеет степенные асимптотики (функция f_0 симметрична и убывает как $(\mu\sigma)^{-2}$ на больших расстояниях), в-третьих, f_0 имеет необычный для солитонов профиль «мексиканской шляпы» с максимумом и двумя минимумами и, наконец, $\int f_0 dx = 0$. Последние два свойства совпадают с таковыми для однопараметрических солитонов стацио-

нарного профиля в рассмотренной задаче и характерны для нелинейных локализованных волн в двумерных системах: оказываются возможными лишь такие солитоны, в которых полная деформация равна нулю.

Подставляя в уравнение (10) разложение (12), учитывая аномально малость слагаемого f_0 и приравнявая нулю коэффициенты при слагаемых $\sim \mu^3$, получаем следующую замкнутую систему уравнений для функций f_1 и f_2 :

$$(\Omega + \kappa^2)f_1 - \frac{\partial^2}{\partial X^2} f_1 - \kappa^2 f_1 f_2 = 0, \quad (17)$$

$$v + 2\kappa = 0, \quad (18)$$

$$(\Omega + 2\kappa^2)f_2 - \kappa^2 f_1^2 = 0, \quad (19)$$

$$(v + 4\kappa)f_2 - 2\kappa f_1^2 = 0. \quad (20)$$

Из выражения (18) следует, что в основном приближении скорость солитона близка к групповой скорости рэлеевских волн $v \approx V = -2\kappa$, что согласуется с приведенным выше соотношением $\Omega \approx -\kappa^2$. При этом уравнения (19), (20) совпадают и дают связь между амплитудами гармоник f_1 и f_2 : $f_2 \approx f_1^2$. Используя это соотношение в уравнении (17) для основной гармоники, получаем для ее амплитуды стандартное нелинейное уравнение Шредингера:

$$(\Omega + \kappa^2)f_1 - \frac{\partial^2}{\partial X^2} f_1 - \kappa^2 f_1^3 = 0. \quad (21)$$

Солитонное решение этого уравнения хорошо известно:

$$f_1 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\Omega + \kappa^2}}{\kappa \text{ch} \sqrt{\Omega + \kappa^2} (X - vT)}. \quad (22)$$

Малым параметром в этом решении является введенный выше $\mu = \sqrt{\Omega + \kappa^2}$, и, действительно, как предполагалось ранее, $\partial/\partial X \sim \mu$.

Перепишем это решение в исходных переменных:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{\eta \sqrt{2}\sqrt{\Omega + \kappa^2} \cos[G\varepsilon\kappa(x - c_R t - (\Omega\eta/G\kappa)t)]}{\Psi \kappa \text{ch}[\sqrt{\Omega + \kappa^2}\varepsilon G(x - c_R t - (v\eta/G)t)]}. \quad (23)$$

В этом выражении η , Ψ , G и c_R — вполне определенные комбинации заданных материальных параметров системы. Параметры κ , Ω , v , ε в солитонном решении могут меняться, но они не являются независимыми и связаны таким образом:

$$\varepsilon = v\eta/Gc_R \quad \text{и} \quad v \approx -2\kappa, \quad (24)$$

а решение (23) является двухпараметрическим. Если в качестве характеристик решений выбрать малые параметры ϵ и μ , то решение (23) можно переписать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx -\frac{2\sqrt{2}\eta^2 \mu \cos \{(G^2 c_R / 2\eta) \epsilon [x - c_R t(1 + \epsilon/2)]\}}{\psi G c_R \epsilon \operatorname{ch} \{\mu \epsilon G [x - c_R t(1 + \epsilon)]\}}. \quad (25)$$

Из этого выражения, в частности, видно, что условие малоамплитудности решения (малости деформаций) сводится к такому соотношению малых параметров: $\mu \ll \epsilon$. Это отражено на рис. 1: по мере приближения к скорости Рэлея область, в которой справедливо наше солитонное решение (заштрихована), сужается.

Выбранный нами набор параметров не единственный. Если в качестве динамических параметров выбрать скорость перемещения огибающей солитона c и частоту волны $\tilde{\omega}$ в системе координат, перемещающейся со скоростью огибающей, то все параметры в (23) легко выражаются через c и $\tilde{\omega}$: $v = G(c - c_R)/\eta$, $\epsilon = (c - c_R)/c_R$, $\kappa = G(c_R - c)/2\eta$ и $\Omega = G^2(c_R - c)(\tilde{\omega} - c_R + c)/2\eta^2$.

В заключение рассмотрим слагаемое $f_0(X - vT)$ в решении (12), описывающее часть деформации, распространяющуюся в виде волны стационарного профиля без осцилляций. Как было показано выше, $f_0 = (1/4v)(\partial H f_1^2 / \partial X)$, где функция $f_1(X - vT)$ определяется выражением (22). Точное выражение для преобразования Гильберта от функции $\operatorname{sech}^2 \chi$ неизвестно, но асимптотики находятся достаточно просто. Можно показать, что при $\chi \ll 1$ асимптотика имеет вид $H \operatorname{sech}^2 \chi \approx -3,2\chi + 4,2\chi^3 + \dots$. При $\chi \gg 1$ $H \operatorname{sech}^2 \chi \approx -0,64/\chi + 0,53/\chi^3 + \dots$. Таким образом, во всем интервале изменения аргумента можно воспользоваться следующей аппроксимирующей формулой: $H \operatorname{sech}^2 \chi \approx -0,64\chi / (0,2 + \chi^2)$. Поэтому выражение для f_0 приобретает форму

$$f_0 \approx \frac{1,6\mu^3}{v\kappa^2} \frac{5\mu^2(X - vT)^2 - 1}{[5\mu^2(X - vT)^2 + 1]^2}. \quad (26)$$

Как видно, эта деформация действительно имеет степенные асимптотики на больших расстояниях и сложную форму с минимумом в центре и двумя симметричными максимумами. Полная деформация на всей поверхности равна нулю. Такая форма и нулевая деформация характерны и для рэлеевских солитонов стационарного профиля.

Заключение

Таким образом, показано, что у поверхности упругого полупространства с тонким нелинейным покрытием, где обычные рэлеевские солитоны стационарного профиля не существуют, могут существовать рэлеев-

ские солитоны огибающей. В пределе малой амплитуды для таких солитонов было найдено приближенное решение. Оно имеет традиционный солитонный вид, но сопровождается необычной волной стационарного профиля со степенными асимптотиками и нулевой полной деформацией.

1. Л.К. Зарембо, В.А. Красильников, *УФН* **102**, 549 (1970).
2. А.М. Косевич, А.С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989).
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1965).
4. В.И. Наянов, *Письма ЖЭТФ* **44**, 314 (1986).
5. V. Kavalero, T. Fijii, and M. Inoue, *J. Appl. Phys.* **87**, 907 (2000).
6. Al.A. Kolomenskii, A.M. Lomonosov, R. Kirshnerit, P. Hess, and V.E. Gusev, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1325 (1997).
7. A.M. Lomonosov, and P. Hess, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3876 (1999).
8. A.M. Lomonosov, P. Hess and A.P. Mayer, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 076104 (2002).
9. A.P. Mayer, *Phys. Rep.* **256**, 238 (1995).
10. C. Eckl, A.S. Kovalev, A.P. Mayer, A.M. Lomonosov, and P. Hess, *Phys. Rev.* **E70**, 046604 (2004).
11. L.W. Bruch and A.D. Navaco, *Phys. Rev.* **B61**, 5786 (2000).
12. A.S. Kovalev, A.P. Mayer, C. Eckl, and G.A. Maugin, *Phys. Rev.* **E66**, 036615 (2002).
13. A.P. Mayer and A.S. Kovalev, *Phys. Rev.* **E67**, 066603 (2003).
14. А.С. Ковалев, Е.С. Соколова, А.П. Майер, Ж.А. Можен, *ФНТ* **29**, 530 (2003).
15. A.P. Mayer and A.S. Kovalev, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* **53**, 43 (2003).
16. А.М. Косевич, А.С. Ковалев, *ЖЭТФ* **67**, 1794 (1974).
17. H.D. Greenberg, *Application of Green's Functions in Science and Engineering*, New Jersey (1971).

Rayleigh envelope solitons near the surface covered with nonlinear film

A.S. Kovalev and E.S. Sokolova

The dynamics of Rayleigh type envelope solitons which are localized near the surface of homogeneous isotropic media covered with thin film of nonlinear (anharmonic) material is investigated. The type of asymptotic procedure due to which approximate analytic solutions were found is suggested.

PACS: **68.35.-p** Solid surfaces and solid-solid interfaces: Structure and energetics.

Keywords: elastic halfspace, nonlinear film, surface waves, nonlinear excitations, envelope solitons.