

# Динамика запутывания 3-кубитовой системы в магнитном поле

Е.А. Иванченко

*Институт теоретической физики*

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»*

*ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина*

E-mail: yevgeny@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 17 июля 2006 г., после переработки 14 сентября 2006 г.

С помощью декомплексификации уравнения Лиувилля–Неймана получена замкнутая система уравнений для локальных векторов Блоха и спиновых корреляционных функций трех магнитных кубитов с обменным взаимодействием, находящихся в произвольном, зависящем от времени внешнем магнитном поле. Проведен численный сравнительный анализ мер запутывания в зависимости от начальных условий и модуляции магнитного поля. Исследование может найти применение при анализе интерференционных экспериментов и манипуляции квантовыми битами.

За допомогою декомплексифікації рівняння Ліувілля–Неймана одержано замкнуту систему рівнянь для локальних векторів Блоха та спинових кореляційних функцій для трьох магнітних кубітів з обмінною взаємодією, які знаходяться у довільному, залежному від часу магнітному полі. Виконано чисельний порівняльний аналіз мір заплутання в залежності від початкових умов та модуляції магнітного поля. Дослідження може бути корисним для аналізу інтерференційних експериментів, та маніпуляції квантовими бітами.

PACS: 03.67.Lx Квантовые расчеты;  
03.67.Hk Квантовая связь.

Ключевые слова: запутывание, мера запутывания, квантовые вычисления, сепарабельность.

## Введение

Явление запутывания (несепарабельности) — одно из свойств квантовых систем. Квантовое запутывание — ключевой источник таких приложений, как свехплотное кодирование, телепортация, квантовые вычисления, исследуемые с помощью квантовой теории информации [1–4]. Наиболее известный и естественный путь создания запутанных состояний — глобальная унитарная эволюция, обусловленная взаимодействием между подсистемами и контролируемая внешними полями. Цель работы состоит в сравнительном анализе глобальных мер запутывания в трехкубитовой системе, находящейся в магнитном поле, поскольку в отличие от двухкубитовой системы нет единой меры запутывания для трех кубитов.

## Гамильтониан модели

Гамильтониан трех связанных обменным взаимодействием магнитных кубитов  $e, p, n$  (частиц со спином  $1/2$ ), находящихся во внешнем переменном магнитном поле  $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$ , имеет вид:

$$\mathcal{H} = h_i^e s_i^e + h_i^p s_i^p + h_i^n s_i^n + 2J^{ep} s_i^e s_i^p + 2J^{en} s_i^e s_i^n + 2J^{pn} s_i^p s_i^n, \quad (1)$$

где  $h_i^e, h_i^p, h_i^n$  — декартовы компоненты внешнего магнитного поля, умноженные на гиромагнитное отношение соответствующего кубита:

$$s_i^e = \frac{1}{2} \sigma_i \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_0, \quad s_i^p = \frac{1}{2} \sigma_0 \otimes \sigma_i \otimes \sigma_0,$$

$$s_i^n = \frac{1}{2} \sigma_0 \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_i$$

– матричное представление операторов спина магнитных кубитов; матрицы Паули равны

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

⊗ – знак прямого произведения [5];  $J^{ep}, J^{en}, J^{pn}$  – константы изотропного обменного взаимодействия между кубитами; по  $e, p, n$  суммирование нет.

### Декомплексификация уравнения Лиувилля–Неймана

Уравнение Лиувилля–Неймана для матрицы плотности  $\rho$ , описывающее динамику 3-кубитовой системы, имеет вид

$$i\partial_t \rho = [\mathcal{H}, \rho], \quad \rho(t=0) = \rho_0. \quad (2)$$

Представим решение уравнения (2) в виде

$$\rho = \frac{1}{8} R_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \otimes \sigma_\gamma, \quad \rho^+ = \rho, \quad R_{000} = 1, \quad \text{Spr} \rho = 1, \quad (3)$$

здесь и далее суммирование идет по повторяющимся греческим индексам от нуля до трех, по латинским от единицы до трех. Три вектора когерентности (векторы Блоха), которые широко используются в теории магнитного резонанса,

$$R_{i00} = \text{Spr} \sigma_i \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_0, \quad (4a)$$

$$R_{0i0} = \text{Spr} \sigma_0 \otimes \sigma_i \otimes \sigma_0, \quad (4б)$$

$$R_{00i} = \text{Spr} \sigma_0 \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_i \quad (4в)$$

характеризуют локальные свойства индивидуальных кубитов, тогда как тензоры

$$R_{kq0} = \text{Spr} \sigma_k \otimes \sigma_q \otimes \sigma_0, \quad (5a)$$

$$R_{k0q} = \text{Spr} \sigma_k \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_q, \quad (5б)$$

$$R_{0kq} = \text{Spr} \sigma_0 \otimes \sigma_k \otimes \sigma_q, \quad (5в)$$

$$R_{kql} = \text{Spr} \sigma_k \otimes \sigma_q \otimes \sigma_l \quad (5г)$$

описывают спиновые корреляции. При унитарной эволюции сохраняется длина обобщенного вектора Блоха  $b$ :

$$b = \sqrt{R_{\alpha\beta\gamma}^2 - 1}. \quad (6)$$

В терминах функций  $R_{\alpha\beta\gamma}$  уравнение Лиувилля–Неймана принимает вещественную форму в виде замкнутой системы 63 дифференциальных уравне-

ний первого порядка для локальных векторов Блоха и спиновых корреляционных функций

$$\partial_t R_{q00} = \varepsilon_{ilq} h_i^e R_{l00} + \varepsilon_{mlq} (J^{ep} R_{lm0} + J^{en} R_{l0m}), \quad (7a)$$

$$\partial_t R_{0q0} = \varepsilon_{ilq} h_i^p R_{0l0} + \varepsilon_{mlq} (J^{ep} R_{ml0} + J^{pn} R_{0lm}), \quad (7б)$$

$$\partial_t R_{00q} = \varepsilon_{ilq} h_i^n R_{00l} + \varepsilon_{lmq} (J^{en} R_{l0m} + J^{pn} R_{0lm}), \quad (7в)$$

$$\begin{aligned} \partial_t R_{qk0} &= \varepsilon_{ilq} h_i^e R_{lk0} + \varepsilon_{imk} h_i^p R_{qm0} + \\ &+ J^{ep} \varepsilon_{kmq} (R_{m00} - R_{0m0}) + \\ &+ J^{en} \varepsilon_{lmq} R_{mkl} + J^{pn} \varepsilon_{lmk} R_{qml}, \end{aligned} \quad (7г)$$

$$\begin{aligned} \partial_t R_{q0k} &= \varepsilon_{ilq} h_i^e R_{l0k} + \varepsilon_{imk} h_i^n R_{q0m} + \\ &+ J^{en} \varepsilon_{qmk} (R_{00m} - R_{m00}) + \\ &+ J^{ep} \varepsilon_{lmq} R_{mlk} + J^{pn} \varepsilon_{lmk} R_{qlm}, \end{aligned} \quad (7д)$$

$$\begin{aligned} \partial_t R_{0qk} &= \varepsilon_{ilq} h_i^p R_{0lk} + \varepsilon_{imk} h_i^n R_{0qm} + \\ &+ J^{pn} \varepsilon_{qmk} (R_{00m} - R_{m00}) + \\ &+ J^{ep} \varepsilon_{lmq} R_{lmk} + J^{en} \varepsilon_{lmk} R_{lqm}, \end{aligned} \quad (7е)$$

$$\begin{aligned} \partial_t R_{qkl} &= \varepsilon_{imq} h_i^e R_{mkl} + \varepsilon_{imk} h_i^p R_{qml} + \\ &+ \varepsilon_{iml} h_i^n R_{qkm} + J^{ep} \varepsilon_{kmq} (R_{m0l} - R_{0ml}) + \\ &+ J^{en} \varepsilon_{qml} (R_{0km} - R_{mk0}) + J^{pn} \varepsilon_{kml} (R_{q0m} - R_{qm0}) \end{aligned} \quad (7ж)$$

при заданных начальных условиях.

В системе (7) полагая, например,  $J^{en} = 0, J^{pn} = 0$ , получаем замкнутую систему уравнений для описания динамики двух кубитов:

$$\partial_t R_{q0} = \varepsilon_{ilq} h_i^e R_{l0} + \varepsilon_{mlq} J^{ep} R_{lm}, \quad (8a)$$

$$\partial_t R_{0q} = \varepsilon_{ilq} h_i^p R_{0l} + \varepsilon_{mlq} J^{ep} R_{ml}, \quad (8б)$$

$$\begin{aligned} \partial_t R_{qk} &= \varepsilon_{ilq} h_i^e R_{lk} + \varepsilon_{imk} h_i^p R_{qm} + \\ &+ J^{ep} \varepsilon_{kmq} (R_{m0} - R_{0m}), \end{aligned} \quad (8в)$$

в которых  $R_{q0} = \text{Spr} \sigma_q \otimes \sigma_0, R_{0q} = \text{Spr} \sigma_0 \otimes \sigma_q, R_{kq} = \text{Spr} \sigma_k \otimes \sigma_q$ .

Конкретные расчеты будут выполнены для следующих начальных условий. Полностью сепарабельное состояние (S)

$$|S\rangle = |111\rangle, \quad (9)$$

бисепарабельное состояние (BS) [6]

$$|BS\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle + |010\rangle), \quad (10)$$

максимально запутанное состояние Гринбергера–Хорна–Зелингера (GHZ)

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle), \quad (11)$$

запутанное состояние Вернера (W)

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle), \quad (12)$$

смешанное состояние (Mix) [7]

$$\rho_0 = x|GHZ\rangle\langle GHZ| + \frac{1-x}{2}(|W\rangle\langle W| + |V\rangle\langle V|), \quad (13)$$

где

$$|V\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|110\rangle + |101\rangle + |011\rangle), \quad \frac{1}{3} < x \leq 1. \quad (14)$$

Длина обобщенного вектора Блоха (6) для чистых состояний (9)–(12) равна  $\sqrt{7}$ , а для смешанного состояния (13) при  $x = 2/3$   $b = \sqrt{3}$ .

### Меры глобального запутывания в 3-кубитовой системе

Следуя [8], на решениях системы (7) определим меры запутывания трех кубитов, введя тензоры двухчастичного запутывания:

$$m_{ij0} = R_{ij0} - R_{i00}R_{0j0}, \quad (15a)$$

$$m_{i0j} = R_{i0j} - R_{i00}R_{00j}, \quad (15b)$$

$$m_{0ij} = R_{0ij} - R_{0i0}R_{00j}. \quad (15в)$$

Тензоры (15) равны нулю, когда двухчастичные корреляционные функции (5а), (5б), (5в) факторизуются через векторы Блоха (4). С помощью этих тензоров введем меру двухчастичного запутывания в двухкубитовой системе

$$m = m_{ij}^2, \quad (16)$$

где  $m_{ij} = R_{ijj} - R_{i0}R_{0j}$ . Тензор трехчастичного запутывания  $m_{ijk}$  получим путем вычитания из трехчастичной спиновой корреляционной функции  $R_{ijk}$  (5г) всех произведений векторов Блоха на тензоры более низкого порядка

$$m_{ijk} = R_{ijk} - R_{i00}m_{0jk} - R_{0j0}m_{i0k} - R_{00k}m_{ij0} - R_{i00}R_{0j0}R_{00k}. \quad (17)$$

Это представление можно рассматривать как вид кластерного разложения в квантовой статистической механике [9]. С помощью этих тензоров мера трехчастичного запутывания принимает вид [8]

$$m_{SM} = m_{ijk}^2. \quad (18)$$

Эта мера равна нулю, когда тензор  $R_{ijk}$  может быть выражен через двухчастичные запутывания (15) и локальные векторы Блоха, и применима как для чистых, так и для смешанных состояний.

Мера конкаренс (concurrence), согласно [10], зависит от всех шести редуцированных матриц плотности и для чистых состояний может быть представлена в виде

$$C_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{6 - \left[ \frac{9}{4} + R_{i00}^2 + R_{0i0}^2 + R_{00i}^2 + \frac{1}{4}(R_{mn0}^2 + R_{m0n}^2 + R_{0mn}^2) \right]}. \quad (19)$$

Меры  $m_{SM}$  и  $C_3$  не нормированы на единицу.

Мера глобального запутывания [11] в форме [12] выражается через редуцированные матрицы индивидуальных кубитов  $\rho_e = \text{Sp}_{pn}\rho$ ,  $\rho_p = \text{Sp}_{en}\rho$ ,  $\rho_n = \text{Sp}_{ep}\rho$ , согласно формуле

$$m_B = 1 - \frac{R_{i00}^2 + R_{0i0}^2 + R_{00i}^2}{3}. \quad (20)$$

Для начального GHZ-состояния трех кубитов мера запутывания (three-tangle), выраженная через гипердетерминант Кэли, равна [13]

$$m_K = 4\rho_{11}\rho_{88}, \quad (21)$$

где диагональные матричные элементы определяют населенности

$$\rho_{11} = \frac{1}{8}(R_{300} + R_{030} + R_{003} + R_{330} + R_{303} + R_{033} + R_{333} + 1), \quad (22)$$

$$\rho_{88} = \frac{1}{8}(-R_{300} - R_{030} - R_{003} + R_{330} + R_{303} + R_{033} - R_{333} + 1). \quad (23)$$

Мера глобального запутывания, не равная нулю для полностью несепарабельных чистых состояний, согласно [14], определяется выражением

$$m_L = \sqrt[3]{(1 - R_{i00}^2)(1 - R_{0i0}^2)(1 - R_{00i}^2)}. \quad (24)$$

Эта мера равна единице для начального GHZ-состояния и  $8/9$  для W-состояния и принимает те же значения для меры  $m_B$ .

### Численные результаты

Рассмотрим два случая внешних магнитных полей, зависящих от безразмерного времени  $\tau = \omega t$ : резонансное (относительно кубита  $e$ ) циркулярно поляризованное поле (R)

$$\mathbf{H} = -\left(\frac{\omega_1}{\omega} \cos \tau, -\frac{\omega_1}{\omega} \sin \tau, \frac{\omega_0}{\omega}\right), \quad (25)$$

и нерезонансное циркулярно поляризованное поле (NR)

$$\mathbf{H} = -\left(\frac{\omega_1}{\omega} \cos \tau, \frac{\omega_1}{\omega} \sin \tau, \frac{\omega_0}{\omega}\right), \quad (26)$$

где  $\omega$  — частота внешнего поля,  $\omega_1/\omega$  и  $\omega_0/\omega$  — безразмерные амплитуды поперечного и продольного полей. Положим, что поля, действующие на кубиты  $e$ ,  $p$  и  $n$ , равны соответственно  $\mathbf{h}^e = \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{h}^p = 2\mathbf{H}$  и  $\mathbf{h}^n = 4\mathbf{H}$ . Вычисления выполним при  $\omega = \omega_0 = 1$  в единицах  $2\pi \times 100$  МГц, что соответствует продольному полю  $H_3 = 2,3487$  Тл для протонного резонанса кубита  $e$ . Пусть в тех же единицах  $\omega_1 = 0,3$ , а константы обменного взаимодействия равны  $J^{ep} = -0,2$ ;  $J^{en} = -0,1$ ;

$J^{pn} = -0,3$ . На рис. 1 и 2 сплошная линия соответствует NR-полю и пунктирная — R-полю.

### S-состояние

Мера  $m_{SM}$  мало чувствительна к NR-полю (амплитуда колебаний меньше 0,001), но проявляет резонансное поведение в R-поле (рис. 1). Меры запутывания  $C_3, m_B, m_L$  испытывают нерегулярные колебания с малой амплитудой в NR-поле и с большой амплитудой в R-поле. На рис. 2 показана динамика меры  $m_L$ .

### BS-состояние

Мера  $m_{SM}$  носит почти периодический характер в NR поле и проявляет нерегулярные колебания с большой амплитудой в R-поле. Амплитуда колебаний в R-поле в три раза больше, чем в NR-поле. Меры запутывания  $C_3, m_B, m_L$  испытывают нерегулярные колебания с большой амплитудой и мало различимы для R- и NR-полей. На рис. 2 показана динамика меры  $C_3$ .

### GHZ-состояние

Мера  $m_{SM}$  носит колебательный характер и хорошо различима для R- и NR-полей. Меры запутывания  $C_3, m_B, m_K, m_L$  испытывают малоамплитудные колебания в NR-поле. В R-поле запутывание меньше, чем в NR-поле при всех временах, но колебания происходят с большой амплитудой. На рис. 2 показана динамика меры  $m_K$ .

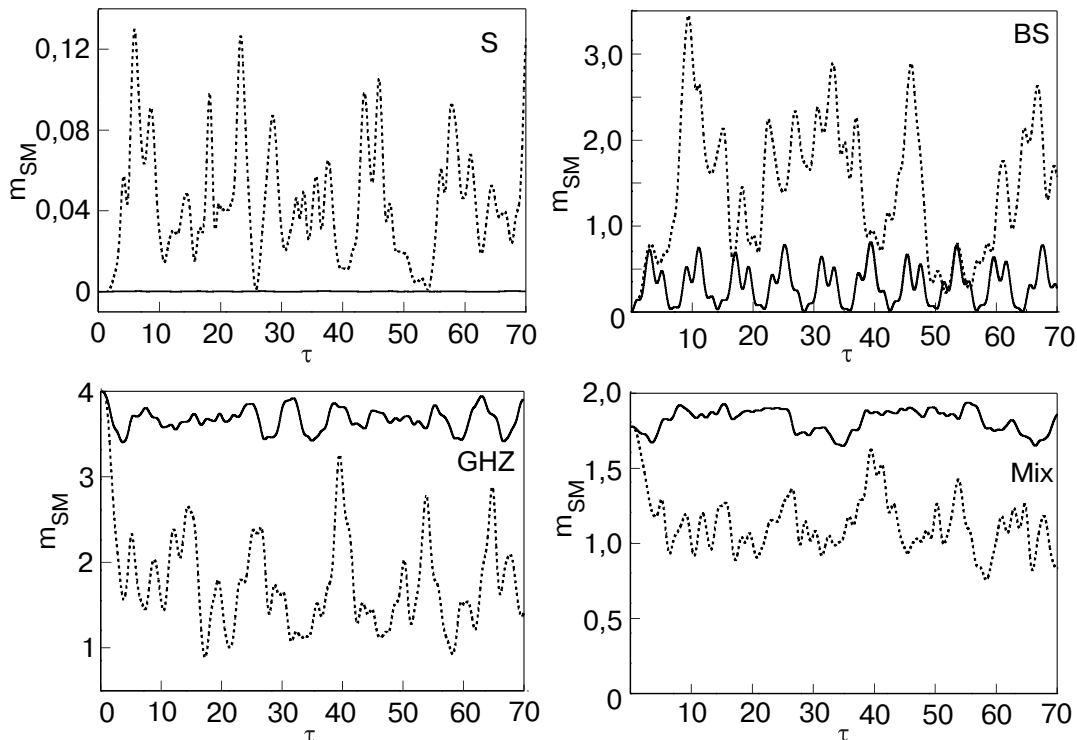


Рис. 1. Зависимость динамики запутывания меры  $m_{SM}$  от начальных условий.

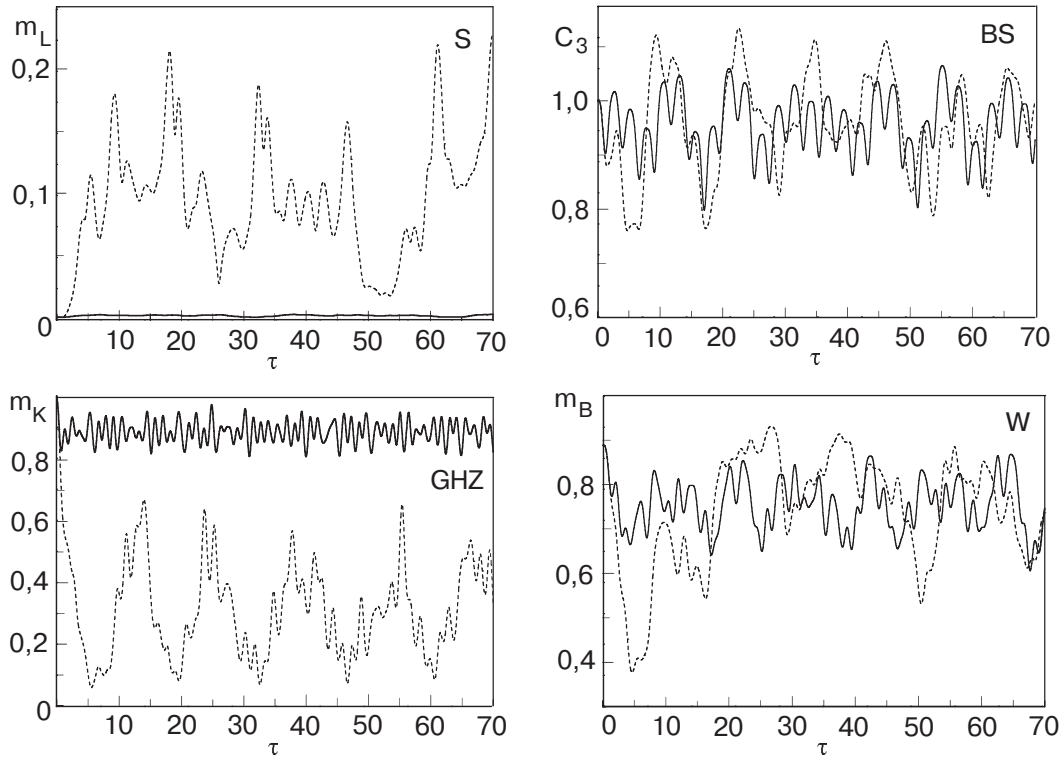


Рис. 2. Зависимость динамики запутывания мер  $m_L$ ,  $C_3$ ,  $m_K$ ,  $m_B$  от начальных условий.

*W-состояние*

Мера  $m_{SM}$  при временах  $0 < \tau < 15$  носит колебательный характер и практически неразличима для R- и NR-полей. Для  $\tau > 20$  амплитуда колебаний в R-поле в три раза больше амплитуды колебаний в NR-поле (на рис. 1 не приведена). Меры запутывания  $C_3, m_B, m_L$  качественно ведут себя одинаково как в R-, так и в NR-поле. На рис. 2 показана динамика меры  $m_B$ .

*Смешанное состояние*

При амплитуде продольного поля  $\omega_0 \gg \omega_1$  запутывание для всех мер постоянно и равно начальному. Это постоянство объясняется следующим фактом. При постоянном внешнем поле решение уравнения (2) имеет вид [5]

$$\rho = \exp(-i\mathcal{H}t)\rho_0 \exp(i\mathcal{H}t). \quad (27)$$

Очевидно, что для начальных условий, при которых  $[\rho_0, \mathcal{H}] = 0$ ,  $\rho = \rho_0$  для всех  $t$ . Таким образом, значение любой функции, зависящей от решений уравнения (2), будет равно исходному. Другими словами, матрица плотности будет неподвижна для таких гамильтонианов. При  $\omega_0 \gg \omega_1$  влияние переменного поля пренебрежимо мало.

В рассмотренной модели уменьшение амплитуды поперечного поля приводит к уменьшению амплитуды колебаний всех мер запутывания вне зависимости от начальных условий.

Рассмотрим влияние кубитов  $e, p$  как двух флуктуаторов [15] на динамику кубита  $n$ . Из системы (7в) при  $J^{en} = 0, J^{pn} = 0$  следует, что вероятность переворота свободного кубита  $n$  из начального состояния  $R_{001}(0) = 0, R_{002}(0) = 0, R_{003}(0) = 1$  равна [16]

$$P = \frac{1 - R_{003}}{2}. \quad (28)$$

На рис. 3 представлена вероятность переворота свободного кубита  $n$  в резонансном поле и влияние на вероятность переворота деформации поля, вызванного присутствием кубитов  $e, p$  в случае начального S-состояния. Видно, что осцилляции Раби переходят в биения. Это качественно согласуется с результатами работы [15].

**Заключение**

Получена замкнутая система уравнений для локальных векторов Блоха и спиновых корреляционных функций трех магнитных кубитов с обменным взаимодействием, находящихся в произвольном, зависящем от времени внешнем магнитном поле. Проведен численный сравнительный анализ мер запутывания в зависимости от начальных состояний и модуляции магнитного поля.

Для экспериментальной проверки более удобна мера  $m_K$ , так как она выражается через населенности  $\rho_{11}, \rho_{88}$ , поскольку мера  $C_3$  для GHZ-состояния,

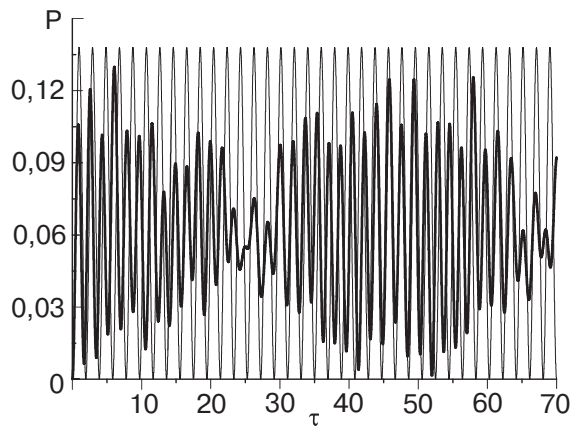


Рис. 3. Влияние кубитов  $e, p$  как флуктуаторов (жирная линия) на вероятность переворота свободного кубита  $n$  (тонкая линия) в R-поле.

которая также проявляет резкое отличие для R- и NR-полей, довольно сложно зависит от всех приведенных матриц. Это облегчит возможность экспериментального подтверждения теоретических результатов [8,10–14].

Предложенный подход без принципиальных затруднений может быть реализован для системы четырех кубитов, детальная динамика которой описывается 255 уравнениями.

Автор благодарен Анне Аникеевне Зиппе за плодотворное обсуждение и постоянную неоценимую поддержку.

1. G. Alber, T. Beth, M. Gorodecki, R. Gorodecki, M. Rotteler, H. Weinfurter, R. Werner, and Zeilinger, *Quantum Information: An Introduction to Basic Theoretical Concepts and Experiments*, Springer Verlag (2001).
2. D. Bouwmeester, A. Ekert, and Zeilinger, *The Physics of Quantum Information*, Springer Verlag (2000).
3. A. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press (2000).
4. I.V. Bargatin, B.A. Grishanin, and V.N. Zadkov, *Physics-USpekhi*, **44**, 625 (2001).
5. P. Lancaster, *Theory of Matrices*, Academic Press, New York–London (1969).
6. W. Dür, J.I. Cirac, and R. Tarrach, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3562 (1999).

7. Tzu-Chieh Wei and Paul M. Goldbart, *Phys. Rev.* **A68**, 042307 (2003).
8. J. Schlienz and G. Mahler, *Phys. Rev.* **A52**, 4396 (1995).
9. S. Fujita, *Introduction to Non-Equilibrium Quantum Statistical Mechanics*, Krieger, FL (1983).
10. A.R.R. Carvalho, F. Mintert, and A. Buchleitner, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 230501 (2004).
11. D.A. Meyer and N.R. Wallach, *J. Math. Phys.* **43**, 4273 (2002).
12. G.K. Brennen, *Quant. Inf. Comput.* **3**, 616 (2003).
13. V. Coffman, J. Kundu, and W.K. Wootters, *Phys. Rev.* **A61**, 052306 (2000).
14. P.J. Love, A.M. van den Brink, A.Yu. Smirnov, M.H.S. Amin, M. Grajcar, E. Il'ichev, A. Izmailkov, and A.M. Zagoskin, *quant-ph/0602143* (2006).
15. Y.M. Galperin, D.V. Shantsev, J. Bergli, and B.L. Altshuler, *Europhys. Lett.* **71**, 21 (2005); *cond-mat/0501455* (2005).
16. Е.А. Иванченко, *ФНТ* **31**, 761 (2005).

### Three-qubit dynamics of entanglement in magnetic field

Е.А. Ivanchenko

With the help of decomplexification of the Liouville–von Neumann equation a closed system of equations is obtained of three magnetic qubits with exchange interaction, in arbitrary time-dependent external magnetic field for local Bloch vectors and spin correlation functions. The numerical comparative analysis of entanglement measures is carried out depending on initial conditions and magnetic field modulation. The present study may be useful in analysis of interference experiments and in the field of quantum computing.

PACS: 03.87.Lx Quantum computation;  
03.67.Hk Quantum communication.

Keywords: Entanglement, measure of Entanglement, quantum computing, separability.