
УДК 519.213:621.391

А.И. Красильников, канд. физ.-мат. наук
Ин-т технической теплофизики НАН Украины
(Украина, 03057, Киев, ул. Желябова, 2а,
тел. (044) 4532857, e-mail: tangorov@ukr.net)

Анализ коэффициента эксцесса засоренных гауссовых распределений

Получена формула для нахождения коэффициента эксцесса симметричных засоренных гауссовых распределений. Исследована зависимость коэффициента эксцесса от параметров модели засоренных распределений. Рассмотрены примеры засорения равномерным и логистическим распределениями. Полученные результаты позволяют анализировать негауссовы случайные величины, описываемые моделью засоренных гауссовых распределений.

К л ю ч е в ы е с л о в а: засоренные распределения, модель Тьюки—Хьюбера, смеси распределений, коэффициент эксцесса, кумулянтный анализ.

Отримано формулу для знаходження коефіцієнта ексцесу симетричних забруднених гаусових розподілів. Досліджено залежність коефіцієнта ексцесу від параметрів моделі забруднених розподілів. Розглянуто приклади забруднення рівномірним та логістичним розподілами. Отримані результати дозволяють аналізувати негаусові випадкові величини, які описуються моделлю забруднених гаусових розподілів.

К л ю ч о в і с л о в а: забруднені розподіли, модель Тьюки—Хьюбера, суміші розподілів, коефіцієнт ексцесу, кумулянтний аналіз.

При решении различных прикладных задач широко применяются методы параметрической статистики [1—3], основанные на априорных моделях функции распределения $F_0(x)$ исследуемых случайных величин и случайных процессов. Одна из основных проблем этих методов — выбор адекватной функции распределения $F_0(x)$, так как ее отличие от функции распределения $F(x)$, соответствующей имеющимся реальным данным, снижает достоверность получаемых результатов.

Отклонения функции распределения $F(x)$ от модели $F_0(x)$ могут быть обусловлены двумя причинами. Во-первых, функция распределения $F(x)$ наблюдаемой выборки хотя бы незначительно отличается от принятой

© А.И. Красильников, 2017

модели $F_0(x)$. Во-вторых, к элементам выборки, имеющим распределение $F_0(x)$, добавляются другие элементы, называемые аномальными наблюдениями [3], с распределением $F_1(x)$.

Для учета отклонений закона распределения наблюдаемых на практике реальных данных от модельного распределения удобно применять модели засоренных (загрязненных) распределений, которые определяются по формуле [4—6]

$$F(x) = (1 - \varepsilon) F_0(x) + \varepsilon F_1(x), \quad (1)$$

где $F_1(x)$ — засоряющая функция распределения; $\varepsilon \in [0, 1]$ — коэффициент засорения.

Модель (1) впервые рассмотрел Тьюки [4], предполагая функции распределения $F_0(x)$, $F_1(x)$ гауссовыми с одинаковыми математическими ожиданиями и различными дисперсиями. Хьюбер [5] использовал модель (1) с произвольными симметричными функциями распределения $F_0(x)$, $F_1(x)$ и одинаковыми математическими ожиданиями. Модель (1), которую часто называют моделью Тьюки—Хьюбера, широко применяется в робастной статистике [2—8] при исследовании устойчивости оценок различных параметров, прежде всего параметров сдвига и масштаба, к засорению априорного распределения $F_0(x)$, а также при статистической обработке случайных процессов [9—11].

Модель Тьюки—Хьюбера позволяет, варьируя дисперсией засоряющего распределения и коэффициентом засорения, изменять в широких пределах протяженность хвостов распределения $F(x)$ по сравнению с распределением $F_0(x)$. Для количественной оценки влияния засоряющего распределения $F_1(x)$ и отличия функции распределения $F(x)$ от функции $F_0(x)$ удобно использовать коэффициент эксцесса модели (1). Среди работ, в которых рассматриваются методы робастной статистики [2—11], лишь в работе [3] приведены общие формулы для моментов модели (1), а формула для коэффициента эксцесса вообще отсутствует.

Модель Тьюки—Хьюбера является частным случаем моделей конечных смесей распределений [12, 13], результаты исследования и применения которых систематизированы в работах [13—16], содержащих обширные библиографии. В указанных работах моменты смеси применяются для идентификации ее параметров, а формула для коэффициента эксцесса смесей также отсутствует. Некоторые свойства коэффициента эксцесса модели (1) рассмотрены в работах [17, 18]. В работе [17] для модели (1), в которой функции распределения $F_0(x)$, $F_1(x)$ являются гауссовыми с одинаковыми математическими ожиданиями и различными дисперсиями, проанализирована зависимость коэффициента эксцесса от отношения дис-

персий и коэффициента засорения. В работе [18] определены условия, при которых коэффициент эксцесса модели (1) равен нулю.

Таким образом, актуальной остается задача исследования зависимости коэффициента эксцесса модели (1) от ее параметров при негауссовой засоряющей функции распределения. Рассмотрим ее решение.

Постановка задачи. Предположим, что модельная функция распределения $F_0(x)$ — гауссова с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\mu_{2,0}$, т.е.

$$F_0(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right) = \int_{-\infty}^{x/\sigma_0} \varphi(z) dz,$$

где $\sigma_0 = \sqrt{\mu_{2,0}}$; $\Phi(x)$ и $\varphi(z)$ — функция распределения и плотность вероятностей стандартной гауссовой случайной величины, $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5z^2}$.

Будем считать, что засоряющая функция распределения $F_1(x)$ является симметричной, т.е. удовлетворяет условию $F_1(x) = 1 - F_1(-x + 0)$. Тогда функция

$$F(x) = (1 - \varepsilon) \Phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right) + \varepsilon F_1(x) \quad (2)$$

определяет семейство симметричных засоренных гауссовых распределений. Функция распределения (2) имеет разрывы первого рода, если $F_1(x)$ — кусочно-постоянная функция. Если функция $F_1(x)$ абсолютно непрерывна, то $F(x)$ также абсолютно непрерывна и у нее существует плотность вероятностей $p(x)$, которая является четной функцией:

$$p(x) = \frac{1 - \varepsilon}{\sigma_0} \varphi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right) + \varepsilon p_1(x), \quad (3)$$

где $p_1(x)$ — плотность вероятностей засоряющего распределения, $p_1(x) = F_1'(x)$.

Математическое ожидание модели (2) равно нулю, начальные и центральные моменты совпадают, при этом отличны от нуля только центральные моменты μ_s четных порядков s , которые имеют вид

$$\mu_s = (1 - \varepsilon) \mu_{s,0} + \varepsilon \mu_{s,1}, \quad (4)$$

где $\mu_{s,0}, \mu_{s,1}$ — центральные моменты модельной и засоряющей функций

распределения модели (2). Найдем коэффициент эксцесса γ_4 модели (2), используя известное соотношение

$$\gamma_4 = (\mu_4 / \mu_2^2) - 3. \quad (5)$$

Подставляя в (5) выражение (4), после преобразований получаем формулу для нахождения коэффициента эксцесса модели (2):

$$\gamma_4 = \gamma_4(M) = \frac{\varepsilon \gamma_{4,1} + 3(1-\varepsilon)\varepsilon(M-1)^2}{[(1-\varepsilon)M + \varepsilon]^2}. \quad (6)$$

Здесь $\gamma_{4,1} \geq -2$ — коэффициент эксцесса засоряющего распределения; $M \geq 0$ — параметр модели (2),

$$M = \mu_{2,0} / \mu_{2,1}, \quad (7)$$

где $\mu_{2,0}$ и $\mu_{2,1}$ — дисперсии модельной и засоряющей функций распределения.

Исследуем зависимость коэффициента эксцесса (6) модели (2) от параметра M , считая заданными коэффициент эксцесса $\gamma_{4,1}$ засоряющего распределения и коэффициент засорения ε .

Анализ предельного поведения функции $\gamma_4(M)$. Рассмотрим функцию $\gamma_4(M)$ при $M \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$, $M = 1$.

1. Пусть $M \rightarrow 0$, т.е. $\mu_{2,0} \ll \mu_{2,1}$. Тогда из формулы (6) получаем

$$\gamma_4(0) = \lim_{M \rightarrow 0} \gamma_4(M) = \frac{\gamma_{4,1} + 3(1-\varepsilon)}{\varepsilon}. \quad (8)$$

Из (8) видно, что если $\gamma_{4,1} \geq 0$, то $\gamma_4(0) \geq 0$ при любых значениях ε . Если $\gamma_{4,1} \in [-2, 0)$, то в зависимости от значений коэффициента ε значение $\gamma_4(0)$ может быть положительным, отрицательным или равным нулю. В частности, $\gamma_4(0) = 0$, если $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\gamma_4(0) > 0$, если $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\gamma_4(0) < 0$, если $\varepsilon > \varepsilon_0$, где

$$\varepsilon_0 = 1 + \frac{\gamma_{4,1}}{3}. \quad (9)$$

Из формулы (9) следует, что $1/3 \leq \varepsilon_0 < 1$, так как $\gamma_{4,1} \in [-2, 0)$. В предельном случае, когда $\mu_{2,0} \rightarrow 0$, распределение $F_0(x)$ стремится к вырожденному в нуле распределению, т.е.

$$F_0(x) = \lim_{\sigma_0 \rightarrow 0} \Phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right) = E(x),$$

где $E(x)$ — единичная функция,

$$E(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

В этом случае формула (2) принимает следующий вид:

$$F(x) = (1-\varepsilon)E(x) + \varepsilon F_1(x). \quad (10)$$

Если $F_1(x)$ в формуле (10) — кусочно-постоянная функция, то функция распределения $F(x)$ — также кусочно-постоянная. Если функция $F_1(x)$ абсолютно непрерывна, то функция распределения (10) имеет скачок в нуле величиной $(1-\varepsilon)$.

2. Пусть $M \rightarrow \infty$, т.е. $\mu_{2,0} \gg \mu_{2,1}$. Тогда из формулы (6) получаем

$$\gamma_4(\infty) = \lim_{M \rightarrow \infty} \gamma_4(M) = 3 \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (11)$$

Из формулы (11) видно, что $\gamma_4(\infty) > 0$ и при любых значениях ε не зависит ни от значений коэффициента $\gamma_{4,1}$, ни от его знака. В предельном случае, когда $\mu_{2,1} \rightarrow 0$, распределение $F_1(x)$ стремится к вырожденному в нуле распределению, т.е. $F_1(x) = E(x)$. В этом случае формула (2) принимает следующий вид:

$$F(x) = (1-\varepsilon) \Phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right) + \varepsilon E(x). \quad (12)$$

Из формулы (12) следует, что функция $F(x)$ имеет скачок в нуле величиной ε , при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $F(x)$ стремится к гауссовой функции распределения, а при $\varepsilon \rightarrow 1$ — к вырожденному в нуле распределению.

3. Пусть $M = 1$, т.е. $\mu_{2,0} = \mu_{2,1}$. Тогда из формулы (6) получаем $\gamma_4(1) = \varepsilon \gamma_{4,1}$. В этом случае значение $\gamma_4(1)$ может быть положительным, отрицательным или равным нулю в зависимости от знака коэффициента эксцесса $\gamma_{4,1}$ засоряющего распределения. В частном случае, когда засоряющее распределение $F_1(x)$ — гауссово, у которого $\gamma_{4,1} = 0$, $F(x)$ является гауссовой функцией распределения и $\gamma_4(1) = 0$ при любых значениях ε .

Минимум функции $\gamma_4(M)$. Исследуем коэффициент эксцесса (6) на экстремум. Для этого находим производную функции $\gamma_4(M)$:

$$\gamma_4'(M) = \frac{d\gamma_4(M)}{dM} = \frac{2(1-\varepsilon)\varepsilon(-\gamma_{4,1} + 3M - 3)}{[(1-\varepsilon)M + \varepsilon]^4}. \quad (13)$$

Приравнивая числитель выражения (13) нулю ($\varepsilon \neq 0, \varepsilon \neq 1$), получаем урав-

нение для нахождения точки экстремума M_m , $-\gamma_{4,1} + 3M_m - 3 = 0$, из которого находим

$$M_m = 1 + \frac{\gamma_{4,1}}{3}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что $1/3 \leq M_m < 1$, если $\gamma_{4,1} \in [-2, 0)$, и $M_m \geq 1$, если $\gamma_{4,1} \geq 0$.

Покажем, что точка M_m является точкой минимума функции $\gamma_4(M)$. Для этого следует убедиться, что при любых $\delta > 0$ справедливы неравенства $\gamma'_4(M_m + \delta) > 0$ и $\gamma'_4(M_m - \delta) < 0$.

Рассмотрим формулу (13) при $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon \neq 1$. Знаменатель в ней всегда положительный, а в числителе положительны все сомножители, за исключением последнего, который может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Обозначим этот сомножитель $g(M) = -\gamma_{4,1} + 3M - 3$ и рассмотрим выражение

$$g(M_m + \delta) = -\gamma_{4,1} + 3(M_m + \delta) - 3. \quad (15)$$

Подставляя в (15) значение M_m из (14), получаем $g(M_m + \delta) = 3\delta > 0$. Аналогично несложно показать, что $g(M_m - \delta) = -3\delta < 0$.

Таким образом, M_m — точка минимума функции $\gamma_4(M)$. Найдем значение $\min \gamma_4 = \gamma_4(M_m)$, подставив в формулу (6) значение M_m из (14):

$$\min \gamma_4 = \gamma_4(M_m) = \frac{3\varepsilon \gamma_{4,1}}{3 + (1 - \varepsilon) \gamma_{4,1}}. \quad (16)$$

Проанализируем зависимость $\min \gamma_4$ от коэффициента засорения ε и коэффициента эксцесса $\gamma_{4,1}$ засоряющего распределения. Из формулы (16) следует, что $\min \gamma_4 = 0$ при $\varepsilon = 0$, если $\varepsilon = 1$, то $\min \gamma_4 = \gamma_{4,1}$, если $\gamma_{4,1} \geq 0$, то $\min \gamma_4 \geq 0$, если $\gamma_{4,1} \in [-2, 0)$, то $\min \gamma_4 < 0$.

Условия равенства нулю функции $\gamma_4(M)$. На основании проведенного анализа можно сделать следующий вывод. Если $\gamma_{4,1} < 0$, то функция $\gamma_4(M)$ отрицательна в точке $M = M_m$, всегда положительна при $M \rightarrow \infty$, а при $M \rightarrow 0$ она положительна, если $\varepsilon < \varepsilon_0$, где коэффициент ε_0 определен из формулы (9). Следовательно, при отрицательном значении $\gamma_{4,1}$ существует, как минимум, одна точка M , в которой $\gamma_4(M) = 0$. Для нахождения этих точек приравняем нулю числитель выражения (6) и получим уравнение $\gamma_{4,1} + 3(1 - \varepsilon)(M - 1)^2 = 0$, решение которого имеет вид

$$M_1 = 1 - \left(-\frac{\gamma_{4,1}}{3(1 - \varepsilon)} \right)^{0,5}, \quad (17)$$

$$M_2 = 1 + \left(-\frac{\gamma_{4,1}}{3(1-\varepsilon)} \right)^{0,5}. \quad (18)$$

Проанализируем формулы (17), (18). Если $\gamma_{4,1} = 0$, то $M_1 = M_2 = M_m = 1$. При $\gamma_{4,1} < 0$ всегда $M_2 > 1$, а значение M_1 в зависимости от значений ε может быть отрицательным, положительным или равным нулю. Параметр M , определенный по формуле (7), должен быть неотрицательным, поэтому, используя формулу (17), определяем условия, при которых $M_1 \geq 0$:

$$\varepsilon \leq 1 + \frac{\gamma_{4,1}}{3} = \varepsilon_0. \quad (19)$$

Таким образом, если $\gamma_{4,1} \in [-2, 0)$, а значение ε удовлетворяет неравенству (19), то $\gamma_4(M) = 0$ при $M = M_1$ или $M = M_2$. Если $M \in (M_1, M_2)$, коэффициент $\gamma_4(M) < 0$, а при $M \in [0, M_1)$ или $M > M_2$ коэффициент $\gamma_4(M) > 0$.

Пример засоренных распределений. Рассмотрим засоренные гауссовы распределения с двумя моделями засоряющих распределений — равномерной плотностью вероятностей $p_R(x)$ и логистической плотностью вероятностей $p_L(x)$ [19] (см. таблицу). В этом случае засоренное распределение является непрерывным и его плотность вероятностей описывается формулой (3).

При засоряющем равномерном распределении с отрицательным коэффициентом $\gamma_{4,R}$ коэффициент эксцесса $\gamma_4(M)$ модели (3) может принимать как положительные, так и отрицательные значения, области которых определяются значением ε . Исходя из неравенства (19), $\varepsilon \leq 1 + \frac{\gamma_{4,R}}{3} = 1 - \frac{1,2}{3} = 0,6$,

зададим значение $\varepsilon = 0,2$ одинаковым для обеих моделей.

В случае $\varepsilon = 0,2$ при равномерном засорении коэффициент эксцесса $\gamma_4(M)$ принимает положительные и отрицательные значения (рис. 1, а), при логистическом засорении он всегда положителен (рис. 1, б), а предельное значение $\gamma_4(M)$ одинаково для обеих моделей засоряющих распределений, а именно $\gamma_4(\infty) = 0,75$.

Засоряющее распределение	Плотность вероятностей	Дисперсия	Коэффициент эксцесса
Равномерное	$p_R(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-a, a], \\ \frac{1}{2a}, & x \in (-a, a], \end{cases} a > 0$	$\mu_{2,R} = \frac{a^2}{3}$	$\gamma_{4,R} = -1,2$
Логистическое	$p_L(x) = \frac{0,25\beta}{\text{ch}^2(0,5\beta x)}, x \in (-\infty, \infty), \beta > 0$	$\mu_{2,L} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^2$	$\gamma_{4,L} = 1,2$

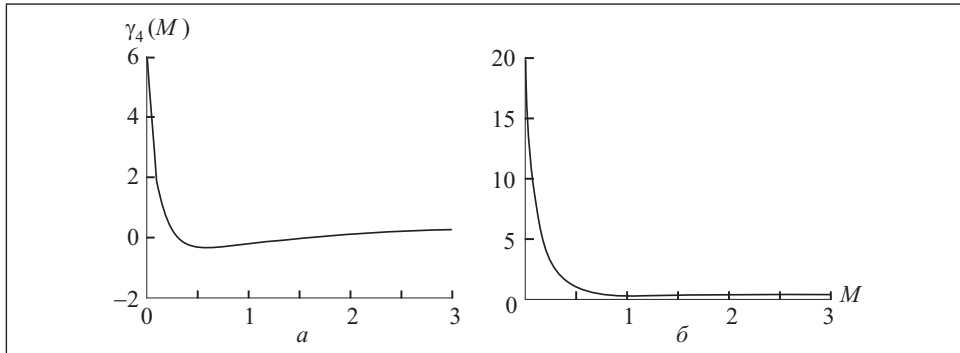


Рис. 1

В случае засоряющего равномерного распределения коэффициент эксцесса $\gamma_4(M)$ принимает минимальное значение $\min \gamma_4 = -0,3529$ при $M_m = 0,6$, равен нулю при $M_1 = 0,2929$ и $M_2 = 1,7071$, а в нуле $\gamma_4(0) = 6$ (см. рис. 1, а). В случае засоряющего логистического распределения коэффициент эксцесса $\gamma_4(M)$ принимает минимальное значение $\min \gamma_4 = 0,1818$ при $M_m = 1,4$, параметры M_1 и M_2 не существуют, а в нуле $\gamma_4(0) = 18$ (см. рис. 1, б).

Найдем плотности вероятностей засоренных распределений, для чего конкретизируем параметры модельного и засоряющих распределений (см. таблицу). Зададим дисперсию модельного распределения $\mu_{2,0} = 1$ и примем $M = M_1 = 0,2929$. При таком значении M коэффициент эксцесса модели (3) $\gamma_4 = 0$, если засоряющее распределение — равномерное, и $\gamma_4 = 2,5446$, если засоряющее распределение — логистическое.

Используя выражение (7) и формулы для $\mu_{2,R}, \mu_{2,L}$ из таблицы, находим значения параметров засоряющих распределений при $M = 0,2929$ и $\mu_{2,0} = 1$: $a = 3,2, \beta = 0,982$. Подставляя в (3) значения $\sigma_0 = 1, \varepsilon = 0,2$ и плотность вероятностей $p_R(x)$ при $a = 3,2$, получаем выражение для плотности вероятностей $p_{NR}(x)$ засоренного гауссового распределения при засорении равномерным распределением:

$$p_{NR}(x) = \begin{cases} \frac{0,8}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2} + 0,0313, & x \in (-3,2; 3,2], \\ \frac{0,8}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}, & x \notin (-3,2; 3,2]. \end{cases} \quad (20)$$

Аналогично находим выражение для плотности вероятностей $p_{NL}(x)$ засоренного гауссового распределения при засорении логистическим распределением $p_L(x)$ с параметром $\beta = 0,982$:

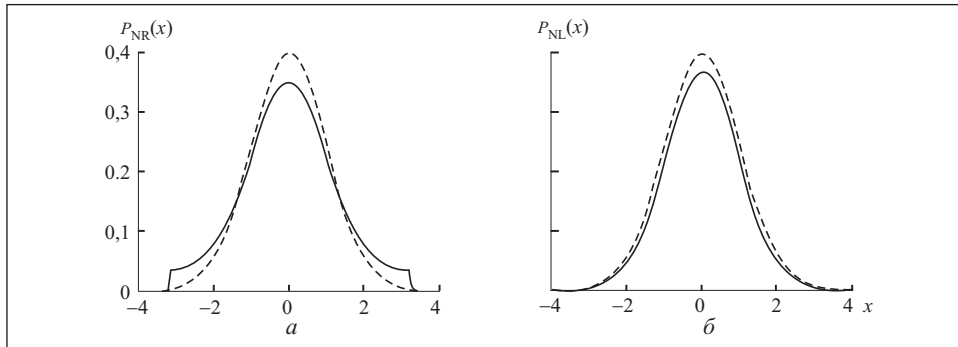


Рис. 2

$$p_{NL}(x) = \frac{0,8}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2} + \frac{0,0491}{\text{ch}^2(0,4908x)}, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (21)$$

На рис. 2, *a* и *б*, представлены графики плотности вероятностей соответственно (20) и (21), где штриховой линией представлен график незасоренной модельной гауссовой плотности вероятностей с дисперсией $\mu_{2,0} = 1$:

$$p_0(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}.$$

Из рис. 2 видно, что плотности вероятностей $p_{NR}(x)$ и $p_{NL}(x)$ засоренных распределений существенно отличаются от модельной гауссовой плотности вероятностей $p_0(x)$, особенно при засорении равномерным распределением $p_R(x)$. При засоряющем логистическом распределении коэффициент эксцесса распределения (21) составляет $\gamma_4 = 2,5446$ и существенно отличается от коэффициента эксцесса модельного распределения $p_0(x)$, равного нулю. При засоряющем равномерном распределении у засоренного распределения (20) $\gamma_4 = 0$, т.е. он совпадает с коэффициентом эксцесса модельного распределения. Это можно объяснить тем, что при $x \notin (-3,2; 3,2]$ хвосты распределений $p_{NR}(x)$ и $p_0(x)$ совпадают. Следовательно, в этом случае коэффициент эксцесса γ_4 не является информативным и для выявления засоренности целесообразно использовать кумулянтные коэффициенты более высоких порядков, например коэффициент γ_6 .

Выводы

С помощью полученной общей формулы (6) для вычисления коэффициента эксцесса γ_4 симметричных засоренных гауссовых распределений

можно анализировать зависимость γ_4 от параметров модели — коэффициента засорения, отношения дисперсий составляющих модели и коэффициента эксцесса $\gamma_{4,1}$ засоряющего распределения.

Полученные результаты позволяют достаточно просто моделировать и анализировать негауссовы случайные величины, описываемые моделью засоренных гауссовых распределений, а их использование может повысить достоверность результатов решения задач измерений, обнаружения и классификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное изд. М.: Финансы и статистика, 1983, 471 с.
2. Муха В.С. Статистические методы обработки данных: Учеб. пособие. Минск: Изд. центр БГУ, 2009, 183 с.
3. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011, 888 с.
4. Tukey J.W. A survey of sampling from contaminated distributions. — Contributions to Probability and Statistics. Ed. by I. Olkin. Stanford: Stanford Univ. Press, 1960, p. 448—485.
5. Хьюбер П.Дж. Робастность в статистике. Пер. с англ. И.А. Маховой и В.И. Хохлова, под ред. И.Г. Журбенко. М.: Мир, 1984, 304 с.
6. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. Пер. с англ. под ред. В.М. Золотарева. М.: Мир, 1989, 512 с.
7. Figueiredo F., Gomes M.I. The total median statistic to monitor contaminated normal data // Journal Quality Technology & Quantitative Management. 2016, Vol 13, p. 1—16. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/16843703.2016.1139840>
8. Punzo A., McNicholas P.D. Parsimonious mixtures of multivariate contaminated normal distributions // Preprint submitted to arXiv 1305.4669. 20.05.2016, p. 1—28. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/1305.4669.pdf>
9. Марчук В.И., Токарева С.В. Способы обнаружения аномальных значений при анализе нестационарных случайных процессов. Шахты: Южно-российский государственный ун-т экономики и сервиса, 2009, 209 с.
10. Денисов В.И., Тимофеев В.С. Устойчивые распределения и оценивание параметров регрессионных зависимостей // Изв. Томского политехнического института. 2011, **318**, № 2, с. 10—15.
11. Осадчий И.С. Метод оценки параметров распределения гауссовского шума для задач обнаружения импульсного сигнала // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2015, № 4, с. 1—27. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr15/1/text.html>
12. Robbins H. Mixture of distributions // Ann. Math. Stat. 1948, Vol. 19, p. 360—369.
13. Titterton D.M., Smith A.F.M., Makov U.E. Statistical analysis of finite mixture distributions. New York: John Wiley & Sons, 1985, 250 p.
14. McLachlan G., Peel D. Finite mixture models. New York: John Wiley & Sons, 2000, 438 p.

15. Королев В.Ю. Смешанные гауссовские вероятностные модели реальных процессов. М.: Макс Пресс, 2004, 124 с.
16. Королев В.Ю. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. М.: Изд-во Ин-та проблем информатики РАН, 2008, 390 с.
17. Красильников А.И., Пилипенко К.П. Одновершинная двухкомпонентная гауссовская смесь. Коэффициент эксцесса // Электроника и связь, 2007, № 2 (37), с. 32—38.
18. Красильников А.И. Класс негауссовских симметричных распределений с нулевым коэффициентом эксцесса // Электрон. моделирование, 2017, 39, № 1, с. 3—17.
19. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям, СПб.: Наука, 2001, 295 с.

Поступила 03.04.17

REFERENCES

1. Aivazian, S.A., Eniukov, I.S. and Meshalkin, L.D. (1983), *Prikladnaya statistika: Osnovy modelirovaniia i pervichnaia obrabotka dannykh. Spravochnoe izd.* [Applied statistics: bases of modeling and initial data processing. Reference edition], Finansy i statistika, Moscow, USSR.
2. Mukha, V.S. (2009), *Statisticheskie metody obrabotki dannykh: Uchebnoe posobie* [Statistical methods of data processing: Tutorial], Izdatelskiy tsentr BGU, Minsk, Belarus.
3. Lemeshko, B.Yu., Lemeshko, S.B., Postovalov, S.N. and Chimitova, E.V. (2011), *Statisticheskii analiz dannykh, modelirovanie i issledovanie veroiatnostnykh zakonornostei. Kompiuternyi podkhod* [Statistical data analysis, simulation and study of probability regularities. Computer approach], Izdatelstvo NGTU, Novosibirsk, Russia.
4. Tukey, J.W. (1960), A survey of sampling from contaminated distributions. Contributions to Probability and Statistics, Ed. I. Olkin, Stanford University Press, Stanford, UK.
5. Huber, P.J. (1984), *Robastnost v statistike* [Robust statistics], Translated by I.A. Makhova and V.I. Khokhlov, Ed. I.G. Zhurbenko, Mir, Moscow, USSR.
6. Hampel, F., Ronchetti, E., Rousseeuw, P. and Stahel, W. (1989), *Robastnost v statistike. Podkhod na osnove funktsii vliianiia* [Robust statistics. The approach based on influence functions], Translated by V.M. Zolotarev, Mir, Moscow, USSR.
7. Figueiredo, F. and Gomes, M.I. (2016), The total median statistic to monitor contaminated normal data, *Journal Quality Technology & Quantitative Management*, Vol. 13, pp. 1-16, available at: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/16843703.2016.1139840>
8. Punzo, A. and McNicholas, P.D. (2016), Parsimonious mixtures of multivariate contaminated normal distributions, *Preprint submitted to arXiv 1305.4669*, May 20, 2016. - pp. 1-28, available at: <https://arxiv.org/pdf/1305.4669.pdf>
9. Marchuk, V.I. and Tokareva, S.V. (2009), *Sposoby obnaruzheniia anomalnykh znachenii pri analize nestatsionarnykh sluchainykh protsessov: Monografiia* [Methods for detecting anomalous values in the analysis of non-stationary random processes: Monograph], Yuzhno-rossiiskii gosudarstvennyi universitet ekonomiki i servisa, Shakhty, Russia.
10. Denisov, V.I. and Timofeev, V.S. (2011), “Stable distributions and estimation of parameters of regression dependencies”, *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo instituta*, Vol. 318, no. 2, pp. 10-15.
11. Osadchii, I.S. (2015), “Method for estimating the distribution parameters of Gaussian noise for the operation of a pulse signal system”, *Zhurnal radioelektroniki: elektronnyy zhurnal*, no. 4, pp. 1-27, available at: <http://jre.cplire.ru/jre/apr15/1/text.html>
12. Robbins, H. (1948), Mixture of distributions, *Ann. Math. Stat.*, Vol. 19, pp. 360-369.

13. Titterington, D.M., Smith, A.F.M. and Makov, U.E. (1985), Statistical analysis of finite mixture distributions, John Wiley & Sons, New York, USA.
14. McLachlan, G. and Peel, D. (2002), Finite mixture models, John Wiley & Sons, New York, USA.
15. Korolev, V.Yu. (2004), *Smeshannye gaussovskie veroiatnostnye modeli realnykh protsessov* [The mixed Gaussian probabilistic models of real processes], Maks Press, Moscow, Russia.
16. Korolev, V.Yu. (2008), *Veroyatnostno-statisticheskii analiz khaoticheskikh protsessov s pomoshchiu smeshannykh gaussovskikh modelei. Dekompozitsiia volatilnosti finansovykh indeksov i turbulentnoi plazmy* [Probabilistic-statistical analysis of chaotic processes using mixed Gaussian models. Decomposition of volatility of financial indices and turbulent plasma], Izdatelstvo Instituta problem informatiki RAN, Moscow, Russia.
17. Krasilnikov, A.I. and Pilipenko, K.P. (2007), “Unimodal two-componental Gaussian mixture. Excess kurtosis”, *Elektronika i sviaz*, no. 2 (37), pp. 32-38.
18. Krasilnikov, A.I. (2017), “Class of non-Gaussian symmetric distributions with zero coefficient of kurtosis”, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 39, no. 1, pp. 3-17.
19. Vadzinskii, R.N. (2001), *Spravochnik po veroiatnostnym raspredeleniiam* [Reference book on probabilistic distributions], Nauka, St. Petersburg, Russia.

Received 03.04.17

A.I. Krasilnikov

ANALYSIS OF THE KURTOSIS COEFFICIENT OF CONTAMINATED GAUSSIAN DISTRIBUTIONS

A formula for finding the kurtosis coefficient of symmetric contaminated Gaussian distributions has been obtained. The dependence of the kurtosis coefficient on the parameters of the model of contaminated distributions has been studied. Examples of contaminating with uniform and logistic distributions have been considered. The obtained results allow the author to analyze non-Gaussian random variables described by the model of contaminated Gaussian distributions.

Key words: contaminated distributions, Tukey-Huber model, mixtures of distributions, kurtosis coefficient, cumulant analysis.

КРАСИЛЬНИКОВ Александр Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотр. Ин-та технической теплофизики НАН Украины. В 1973 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — математические модели, вероятностные характеристики и методы статистической обработки флуктуационных сигналов в системах шумовой диагностики.