УДК 004.94

Я.А. Калиновский [1], д-р техн. наук, **Ю.Е. Бояринова** [1,2], канд. техн. наук
[1] Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины
(Украина, 03113, Киев, ул. Н.Шпака, 2,
тел. 4542138, e-mail: kalinovsky@i.ua),
[2] Национальный технический университет Украины «КПИ»
(Украина, 03113, Киев, пр-т Победы, 37,
тел. 4542150, e-mail: ub@ua.fm)

Метод исследования изоморфизма неразложимых гиперкомплексных числовых систем

Представлен метод определения изоморфности неразложимых коммутативных гиперкомплексных числовых систем с помощью анализа представлений экспоненциальных функций в этих системах. Показано, что такой подход значительно упрощает системы уравнений изоморфизма.

Ключевые слова: гиперкомплексная числовая система, коммутативность, изоморфизм, экспонента, оператор изоморфизма, кратность корней.

Представлено метод визначення ізоморфності нерозкладних комутативних гіперкомплексних числових систем за допомогою аналізу представлень експоненціальних функцій в цих системах. Показано, що такий підхід значно спрощує системи рівнянь ізоморфізму.

Ключові слова: гіперкомплексна числова система, комутативність, ізоморфізм, експонента, оператор ізоморфізму, кратність коренів.

Предложенные в работе [1] алгоритмы решения систем уравнений изоморфизма гиперкомплексных числовых систем основаны на анализе представлений экспонент в рассматриваемых числовых системах. При этом главными показателями являются наборы корней характеристических уравнений ассоциированных систем линейных дифференциальных уравнений гиперкомплексных числовых систем (ГЧС). Изучение наличия или отсутствия изоморфизма двух ГЧС сводится к рассмотрению трех случаев:

1) несовпадение наборов корней любой кратности характеристических уравнений двух ГЧС;

2) наличие только однократных вещественных и (или) комплексно-сопряженных корней и различных вещественных корней кратности 2;

3) наличие наборов корней одинаковой структуры, среди которых есть корни кратности выше 2.

Для первых двух случаев в работе [1] предложен эффективный алгоритм решения систем уравнений изоморфизма и установления оператора изоморфизма. Для третьего случая вопрос остался открытым.

Кратные корни встречаются даже в ГЧС размерности 2. Если в системе комплексных чисел C и ей изоморфных набор корней состоит из пары комплексно-сопряженных корней, в системе дуальных чисел W и ей изоморфных — из пары вещественных корней, то в классе ГЧС, изоморфных системе дуальных чисел D, набор состоит из двукратного вещественного корня. Вопрос об изоморфизме систем второй размерности, как канонических, так и неканонических, подробно описан в работах [2—5].

В [6, 7] приведены примеры ГЧС более высоких размерностей, в которых наборы корней характеристических уравнений ассоциированных систем линейных дифференциальных уравнений имеют кратности от двух до четырех. Исследование изоморфизмов таких ГЧС сводится к решению систем квадратичных уравнений, состоящих, в общем случае, из n^3 уравнений с таким же числом неизвестных, где n — размерность ГЧС. Решение таких систем — весьма трудная задача, и при $n \geq 4$ практически невыполнимая.

Представляется актуальным создание таких методов, которые значительно упрощали бы решение и анализ систем квадратичных уравнений изоморфизма пары ГЧС в случае кратных корней характеристических уравнений ассоциированных систем линейных дифференциальных уравнений.

Постановка задачи. Пусть заданы две коммутативные ГЧС размерности n с базисами $e=(e_1,...,e_n)$ и $f=(f_1,...,f_n)$ соответственно систем $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,n)$. Их таблицы умножения такие:

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^{k} e_k, \quad i,j=1,...,n, \quad f_i f_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^{k} f_k, \quad i,j=1,...,n.$$

Оператор изоморфизма является линейным оператором

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} f_j, \tag{1}$$

матрица которого имеет вид

$$L = | l_{ij} |_{i,j=1,...,n} . \tag{2}$$

Тогда, как показано в [1], задача исследования изоморфизма систем $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,n)$ сводится к решению вопроса, существуют ли нетривиальные вещественные решения системы квадратичных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij} f_j \sum_{j=1}^{n} l_{sj} f_j = \sum_{j=1}^{n} l_{kj} f_j, \quad i, s, k = 1, \ldots, n$$

при условии

$$\det(L) \neq 0. \tag{3}$$

Вещественные кратные корни. Без ограничения общности можно полагать, что кратность s корня характеристического уравнения равна размерности рассматриваемых ГЧС $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,n)$ и она больше двух, т.е. $s = n > 2$. В противном случае рассматриваемая ГЧС будет прямой суммой ГЧС меньших размерностей [1].

Итак, пусть μ и κ — вещественные корни кратности n ГЧС соответственно $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,n)$. Тогда нормальные формы [1, 3] экспонент от гиперкомплексных чисел $M = \sum_{i=1}^{n} m_i e_i \in \Gamma_1(e,n)$ и $K = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i \in \Gamma_2(f, n)$ имеют вид соответственно

$$\mathrm{Exp}(M) = e^{\mu} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} P_{ij}(m_1, \ldots, m_n) \right) e_i, \tag{4}$$

$$\mathrm{Exp}(K) = e^{\kappa} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} Q_{ij}(k_1, \ldots, k_n) \right) f_i, \tag{5}$$

где P_{ij} и Q_{ij} — полиномы n-й степени от стоящих в скобках переменных. Тогда задача исследования изоморфизма ГЧС $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,n)$ сводится к поиску такого оператора изоморфизма с матрицей вида (2) при выполнении условий (3), применение которого к (4) приводит к (5):

$$\mathrm{Exp}(M) = e^{\mu} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} P_{ij}(m_1, \ldots, m_n) \right) e_i \overset{L}{\Leftrightarrow} e^{\kappa} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} Q_{ij}(k_1, \ldots, k_n) \right) f_i = \mathrm{Exp}(K), \tag{6}$$

При подстановках только в одну нормальную форму, например в (4), понадобится матрица обратного преобразования — $|L^{-1}|$ в символьном виде, что сделает выражения весьма громоздкими. Однако, так как гиперкомплексные числа при переходе из одной ГЧС в другую преобразуются оператором изоморфизма,

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i e_i \overset{L}{\Leftrightarrow} \sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=1}^{n} l_{ij} f_j = \sum_{j=1}^{n} f_j \left(\sum_{i=1}^{n} m_i l_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} k_j f_j = K \in \Gamma_2(f, n),$$

то компоненты числа $K \in \Gamma_2(f, n)$ определяются по формулам

$$k_j = \sum_{i=1}^{n} m_i l_{ij}, \tag{7}$$

имеющим простую структуру, что обусловливает целесообразность их подстановки в (6). Таким образом, в первую часть представления экспоненты ГЧС (6) целесообразно подставлять выражения базисних элементов с помощью оператора изоморфизма (1), а в правую — выражения для преобразования компонентов числа (7).

При составлении системы уравнений, являющихся следствием (6), можно полагать

$$e^{\mu} = e^{\kappa}, \tag{8}$$

так как, если существует преобразование (2) с учетом (3), то оно переводит μ в κ [1]. Если такого преобразования не существует, то рассматриваемые ГЧС — неизоморфны.

Таким образом, на основании изложенного из (6) получаем гиперкомплексное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} P_{ij}(m_1, ..., m_n)\right)\sum_{j=1}^{n} l_{ij} f_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} Q_{ij}\left(\sum_{s=1}^{n} m_s l_{s1}, ..., \sum_{s=1}^{n} m_s l_{sn}\right)\right) f_i .$$

Приравнивая выражения при одноименных базисных элементах f_i, $i = 1, ..., n$, получаем n уравнений, решаемых методом неопределенных коэффициентов. При этом формируется система уравнений относительно элементов матрицы преобразования (2). Если эта система имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию (3), то рассматриваемые ГЧС изоморфны, а решения представляют собой элементы оператора изоморфизма L. В противном случае эти ГЧС неизоморфны.

Комплексно-сопряженные кратные корни. Рассмотрим случай, когда все корни — комплексно-сопряженные кратные, что возможно только при четной размерности ГЧС. В этом случае будет $s = n/2$ пар комплексно-сопряженных корней, и нормальная форма экспоненты будет иметь такой вид:

$$\mathrm{Exp}(M) = e^{\mu} \sum_{j=1}^{n} P(m_1, ..., m_n) e_j + e^{\bar{\mu}} \sum_{j=1}^{n} \bar{P}(m_1, ..., m_n) e_j ,$$

где коэффициенты у членов полиномов P и $\bar{P}$ — попарно комплексно-сопряженные по мнимой единице i. Дальнейшее исследование изоморфизма таких систем полностью аналогично случаю с кратными вещественными системами.

Рассмотрим несколько примеров разной степени сложности.

Примеры применения алгоритма с использованием представления экспонент.

Пример 1. Рассмотрим две ГЧС размерности 3, относительно которых заранее известно, что они изоморфны, и покажем, что с помощью описанного выше метода можно не только определить факт их изоморфности, но и установить явный вид оператора изоморфизма.

Пусть исходной будет ГЧС $\Gamma_{32}(e,3)$ (по классификации [6]) с таблицей умножения вида

Γ_{32}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	0
e_3	e_3	0	0

. (9)

С помощью линейных преобразований

$$L:\{e_1=f_1, e_2=f_2+f_3, e_3=f_2\},\ L^{-1}:\{f_1=e_1, f_2=e_3, f_3=e_2-e_3\} \quad (10)$$

перейдем от базиса e к базису f и получим новую ГЧС, которую обозначим $\Gamma^*_{32}(f,3)$. Ее таблица умноження строится с помощью линейного преобразования (10):

Γ^*_{32}	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	e_2	0	0
f_3	e_3	0	f_2

. (11)

Поскольку базисы $\Gamma_{32}(e,3)$ и $\Gamma^*_{32}(f,3)$ связаны линейным невырожденным преобразованием L и $|L|\neq 0$, они изоморфны.

Рассмотрим установление их изоморфизма с помощью описанного метода. Как следует из [6], если $M=m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3\in\Gamma_{32}(e,3)$, то ассоциированная система дифференциальных уравнений ГЧС $\Gamma_{32}(e,3)$ имеет трехкратный корень характеристического уравнения $\lambda=m_1$, а представление экспоненты такое:

$$\mathrm{Exp}(M)=e^{m_1}\left[e_1+m_2e_2+\left(m_3+\frac{m_2^2}{2}\right)e_3\right]. \quad (12)$$

Аналогично для ГЧС $\Gamma^*_{32}(f,3)$: если $N=n_1f_1+n_2f_2+n_3f_3\in\Gamma^*_{32}(f,3)$, то ассоциированная система дифференциальных уравнений имеет трехкратный корень характеристического уравнения $\lambda = n_1$, а представление экспоненты такое:

$$\mathrm{Exp}(N) = e^{n_1}\left[f_1 + \left(n_2 + \frac{n_3^2}{2} \right) f_2 + n_3 f_3 \right]. \tag{13}$$

Если можно найти такое невырожденное линейное преобразование, которое связывает базисы систем $\Gamma_{32}(e,3)$ и $\Gamma_{32}^*(f,3)$ так, что экспоненты (12) и (13) переходят одна в другую, то $\Gamma_{32}(e,3)$ и $\Gamma_{32}^*(f,3)$ — изоморфны. В противном случае они неизоморфны.

Поскольку единичные элементы ε и ε^* систем $\Gamma_{32}(e,3)$ и $\Gamma_{32}^*(f,3)$ являются элементами базисов соответственно $\varepsilon = e_1$ и $\varepsilon^* = f_1$, а при изоморфном соответствии единичные элементы переходят один в другой, то без ограничения общности оператор изоморфизма можно считать таким:

$$L:\{e_1 = f_1,\ e_2 = x_{21}f_1 + x_{22}f_2 + x_{23}f_3,\ e_3 = x_{31}f_1 + x_{32}f_2 + x_{33}f_3\}. \tag{14}$$

Гиперкомплексные числа при преобразовании базиса (14) преобразуются так:

$$M = m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 \Leftrightarrow m_1f_1 + m_2(x_{21}f_1 + x_{22}f_2 + x_{23}f_3) +$$
$$+ m_3(x_{31}f_1 + x_{32}f_2 + x_{33}f_3) = (m_1 + m_2x_{21} + m_3x_{31})f_1 + (m_2x_{22} + m_3x_{32})f_2 +$$
$$+ (m_2x_{23} + m_3x_{33})f_3 = n_1f_1 + n_2f_2 + n_3f_3 = N,$$

откуда

$$\begin{aligned} n_1 &= m_1 + m_2x_{21} + m_3x_{31}, \\ n_2 &= m_2x_{22} + m_3x_{32}, \\ n_3 &= m_2x_{23} + m_3x_{33}. \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, задача сводится к определению такого невырожденного оператора L (14), который бы переводил (12) в (13) и обратно:

$$\mathrm{Exp}(M) \overset{L}{\Leftrightarrow} \mathrm{Exp}(N). \tag{16}$$

С учетом (8) соответствие (16) преобразуется в гиперкомплексное уравнение:

$$e_1 + m_2e_2 + \left(m_3 + \frac{m_2^2}{2} \right) e_3 = f_1 + \left(n_2 + \frac{n_3^2}{2} \right) f_2 + n_3 f_3.$$

Подставив (14) в левую часть этого уравнения, а (15) — в правую, получим

 ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2017. V. 39. № 3

$$f_1 + m_2(x_{21}f_1 + x_{22}f_2 + x_{23}f_3) + \left(m_3 + \frac{m_2^2}{2}\right)(x_{31}f_1 + x_{32}f_2 + x_{33}f_3) =$$

$$= f_1 + \left((m_2x_{22} + m_3x_{32}) + \frac{(m_2x_{23} + m_3x_{33})^2}{2}\right)f_2 + (m_2x_{23} + m_3x_{33})f_3. \quad (17)$$

На основании определения равенства гиперкомплексных чисел гиперкомплексное уравнение (17) превращается в систему уравнений с вещественными переменными:

$$m_2x_{21} + \frac{1}{2}x_{31}(2m_3 + m_2^2) = 0,$$

$$m_2x_{22} + \frac{1}{2}x_{32}(2m_3 + m_2^2) = \frac{1}{2}(2(m_2x_{22} + m_3x_{32}) + (m_2x_{23} + m_3x_{33})^2), \quad (18)$$

$$m_2x_{23} + \frac{1}{2}x_{33}(2m_3 + m_2^2) = m_2x_{23} + m_3x_{33}.$$

Поскольку (18) должно выполняться при любых $m_2, m_3 \in R$, с помощью метода неопределенных коэффициентов получаем следующую простую систему из шести уравнений: $x_{21}, x_{31}, x_{33} = 0, x_{22}, x_{23} \in R, x_{32} = x_{23}^2$.

Подробное описание структурно простых уравнений выполнено для того, чтобы показать преимущества предлагаемого метода. Далее этот этап будем пропускать.

Итак, решение системы (18) имеет вид

$$x_{21} = 0,\ x_{22} = \alpha \in R,\ x_{23} = \beta \in R,\ x_{31} = 0,\ x_{32} = \beta^2 \in R^+,\ x_{33} = 0,$$

а оператор изоморфизма —

$$L: \{e_1 = f_1,\, e_2 = \alpha f_2 + \beta f_3,\, e_3 = \beta^2 f_2\},$$
$$L^{-1}: \left\{f_1 = e_1,\, f_2 = \frac{1}{\beta^2}e_3,\, f_3 = \frac{1}{\beta}\left(e_2 - \frac{\alpha}{\beta^2}e_3\right)\right\}. \quad (19)$$

Согласно требованию обратимости оператора предполагаем, что $\beta \in R \setminus 0$. Из (15), (19) следует справедливость равенства (8), т.е. правильность сокращения на экспоненциальный множитель в уравнении (16). Отличие оператора (19) от (10) объясняется, во-первых, отсутствием требования единственности оператора, а во-вторых, оператор (19) имеет более общий вид по сравнению с (10), т.е. (10) — частный случай (16). При $\alpha = 1, \beta = 1$ оператор (19) переходит в (10).

Проверим тот факт, что оператор (19) переводит таблицу (11) в таблицу (9):

$$e_1e_1 = f_1f_1 = f_1 = e_1,$$
$$e_1e_2 = f_1(\alpha f_2 + \beta f_3) = \alpha f_2 + \beta f_3 = e_2,$$
$$e_1e_3 = f_1\beta^2 f_2 = \beta^2 f_2 = e_3,$$
$$e_2e_2 = \alpha^2 f_2f_2 + 2\alpha\beta f_2f_3 + \beta^2 f_3f_3 = \beta^2 f_3f_3 = \beta^2 f_2 = e_3,$$
$$e_2e_3 = (\alpha f_2 + \beta f_3)\beta^2 f_2 = \alpha\beta f_2f_2 + \beta^3 f_2f_3 = 0,$$
$$e_3e_3 = \beta^2 f_2\beta^2 f_2 = 0.$$

Таким образом, системы $\Gamma_{32}(e,3)$ и $\Gamma^*_{32}(f,3)$ изоморфны, метод позволяет определить оператор изоморфизма наиболее общего вида, который точно воспроизводит таблицу умноження.

Пример 2. Рассмотрим две ГЧС размерности 3, относительно которых заранее известно, что они неизоморфны. Пусть одна из них будет ГЧС $\Gamma_{31}(e,3)$ (по классификации [2]) с таблицей умножения вида

Γ_{31}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	0	0
e_3	e_3	0	0

, (20)

а вторая — рассмотренная выше система $\Gamma_{32}(f,3)$. Поскольку имя ее базиса изменилось, ее таблица умноження имеет вид

Γ_{32}	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	0
f_3	f_3	0	0

. (21)

Из (20) и (21) видно, что их единичные элементы есть соответственно $\varepsilon_{31} = e_1$ и $\varepsilon_{32} = f_1$. Пусть

$$N = \sum_{i=1}^{3} n_i e_i \in \Gamma_{31}(e,3), \quad M = \sum_{i=1}^{3} m_i f_i \in \Gamma_{32}(f,3).$$

Легко показать, что при преобразовании базиса (14) получаем

$$m_1 = n_1 + n_2 x_{21} + n_3 x_{31},$$
$$m_2 = n_2 x_{22} + n_3 x_{32},$$
$$m_3 = n_2 x_{23} + n_3 x_{33}.$$

Представления экспонент в системах $\Gamma_{31}(e,3)$ и $\Gamma_{32}(f,3)$ соответственно такие [6]:

$$\mathrm{Exp}(N)=e^{n_1}(e_1+n_2e_2+n_3e_3),$$

$$\mathrm{Exp}(M)=e^{m_1}\left[f_1+\left(m_2+\frac{m_3^2}{2}\right)f_2+m_3f_3\right].$$

Ассоциированные системы линейных дифференциальных уравнений этих ГЧС имеют трехкратные корни характеристических уравнений: $\nu=n_1$, $\mu=m_1$. Для решения вопроса об изоморфности ГЧС $\Gamma_{31}(e,3)$ и $\Gamma_{32}(f,3)$ необходимо определить, существует ли невырожденное линейное преобразование (14), которое переводит $\Gamma_{31}(e,3)$ в $\Gamma_{32}(f,3)$, т.е. $\mathrm{Exp}(N)\overset{L}{\Leftrightarrow}\mathrm{Exp}(M)$. Как и в примере 1, получаем гиперкомплексное уравнение

$$f_1+n_2(x_{21}f_1+x_{22}f_2+x_{23}f_3)+n_3(x_{31}f_1+x_{32}f_2+x_{33}f_3)=$$

$$=f_1+(n_2x_{22}+n_3x_{32})f_2+(n_2x_{23}+n_3x_{33}+(n_2x_{22}+n_3x_{32})^2)f_3.$$

Легко убедиться, что это гиперкомплексное уравнение имеет только тривиальное решение, а именно $x_{21}=x_{22}=x_{23}=x_{31}=x_{32}=x_{33}=0$. Это означает, что не существует невырожденного линейного оператора (14), и системы $\Gamma_{31}(e,3)$ и $\Gamma_{32}(f,3)$ неизоморфны. Следует заметить, что даже при тривиальном решении характеристические числа обеих систем равны $(n_1=m_1)$, что свидетельствует о правильности поиска оператора (14).

Рассмотрим гиперкомплексные числовые системы четвертой размерности $\dim\Gamma=4$.

Пример 3. Исследуем на изоморфизм две ГЧС размерности 4, относительно которых заранее известно, что они неизоморфны. Пусть одна из них будет ГЧС $\Gamma_{44}(e,4)$ (по классификации [6]) с таблицей умножения вида

Γ_{44}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_4	0	0
e_3	e_3	0	e_4	0
e_4	e_4	0	0	0

, (22)

а вторая — система $\Gamma_{45}(f,4)$. Поскольку у нее изменилось имя базиса, приведем ее таблицу умножения:

$$\begin{array}{c|cccc} \Gamma_{45} & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \hline f_1 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_2 & f_2 & f_4 & 0 & 0 \\ f_3 & f_3 & 0 & -f_4 & 0 \\ f_4 & f_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}. \quad (23)$$

Как видно из (22) и (23), их единичные элементы — соответственно $\varepsilon_{44} = e_1, \varepsilon_{45} = f_1$. Пусть

$$N = \sum_{i=1}^{4} n_i e_i \in \Gamma_{44}(e,4), \quad M = \sum_{i=1}^{4} m_i f_i \in \Gamma_{45}(f,4).$$

Легко показать, что гиперкомплексные числа при преобразовании базиса

$$L:\{e_1 = f_1, e_2 = x_{21} f_1 + x_{22} f_2 + x_{23} f_3 + x_{24} f_4,$$

$$e_3 = x_{31} f_1 + x_{32} f_2 + x_{33} f_3 + x_{34} f_4, e_4 = x_{41} f_1 + x_{42} f_2 + x_{43} f_3 + x_{44} f_4\}. \quad (24)$$

преобразуются так:

$$\begin{aligned} m_1 &= n_1 + n_2 x_{21} + n_3 x_{31} + n_4 x_{41}, \\ m_2 &= n_2 x_{22} + n_3 x_{32} + n_4 x_{42}, \\ m_3 &= n_2 x_{23} + n_3 x_{33} + n_4 x_{43}, \\ m_4 &= n_2 x_{24} + n_3 x_{34} + n_4 x_{44}. \end{aligned} \quad (25)$$

Представления экспонент в системах $\Gamma_{44}(e,4)$ и $\Gamma_{45}(f,4)$ соответственно такие [6]:

$$\mathrm{Exp}(N) = e^{n_1}\left(e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3 + \left(n_4 + \frac{1}{2}(n_2^2 + n_3^2) \right) \right),$$

$$\mathrm{Exp}(M) = e^{m_1}\left(e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + \left(m_4 + \frac{1}{2}(m_2^2 + m_3^2) \right) \right).$$

Ассоциированные системы линейных дифференциальных уравнений этих ГЧС имеют четырехкратные корни характеристических уравнений: $\nu = n_1$, $\mu = m_1$.

Для решения вопроса об изоморфности ГЧС $\Gamma_{44}(e,4)$ и $\Gamma_{45}(f,4)$ необходимо определить, существует ли невырожденное линейное преобразование (24), которое переводит $\Gamma_{44}(e,4)$ в $\Gamma_{45}(f,4)$ и обратно: $\mathrm{Exp}(N) \overset{L}{\Leftrightarrow} \mathrm{Exp}(M)$. Искомое преобразование, если оно существует, должно выполнять перевод $e^{n_1} \Leftrightarrow e^{m_1}$. Тогда эти экспоненты можно опустить и приравнивать содержимое скобок, подставляя (24) в левую часть, а (25) — в правую:

$$f_1 + n_2(x_{21}f_1 + x_{22}f_2 + x_{23}f_3 + x_{24}f_4) + n_3(x_{31}f_1 + x_{32}f_2 + x_{33}f_3 + x_{34}f_4) +$$
$$+\left(n_4 + \frac{1}{2}(n_2^2 + n_3^2)\right)(x_{41}f_1 + x_{42}f_2 + x_{43}f_3 + x_{44}f_4) \overset{L}{\Leftrightarrow} f_1 +$$
$$+(n_2x_{22} + n_3x_{32} + n_4x_{42})\, f_2 + (n_2x_{23} + n_3x_{33} + n_4x_{43}f_3 + ((n_2x_{24} + n_3x_{34} +$$
$$+ n_4x_{44} + \frac{1}{2}((n_2x_{22} + n_3x_{32} + n_4x_{42})^2 - (n_2x_{23} + n_3x_{33} + n_4x_{43})^2)\, f_4. \qquad (26)$$

Решая (26) методом неопределенных коэффициентов, получаем следующий результат:

$$x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44} = 0, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \in R. \qquad (27)$$

Это означает, что линейный оператор (14) — вырожденный и системы $\Gamma_{44}(e, 4)$ и $\Gamma_{45}(f, 4)$ — неизоморфны. Следует заметить, что даже при решении (27) $n_1 = m_1$, а это свидетельствует о правильности метода поиска оператора (24).

Пример 4. Рассмотрим две ГЧС размерности 4, относительно которых заранее известно, что они изоморфны, и покажем, что можно не только определить факт их изоморфности, но и установить явный вид оператора изоморфизма.

Пусть исходной будет ГЧС $\Gamma_{43}(e, 4)$ (по классификации [2]) с таблицей умножения вида

Γ_{43}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_4	0	0
e_3	e_3	0	0	0
e_4	e_4	0	0	0

. (28)

С помощью линейного преобразования

$$L: \{e_1 = f_1,\ e_2 = f_2 + f_3,\ e_3 = f_4,\ e_4 = f_3\},$$
$$L^{-1}: \{f_1 = e_1,\ f_2 = e_2 - e_4,\ f_3 = e_4,\ f_4 = e_3\} \qquad (29)$$

перейдем от базиса e к базису f и получим новую ГЧС, которую обозначим $\Gamma_{43}^*(f, 4)$. Ее таблица умноження строится с помощью линейного преобразования (29):

$$\begin{array}{c|cccc} \Gamma_{43}^{*} & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \hline f_1 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_2 & f_2 & f_3 & 0 & 0 \\ f_3 & f_3 & 0 & 0 & 0 \\ f_4 & f_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}. \qquad (30)$$

Поскольку базисы $\Gamma_{43}(e,4)$ и $\Gamma_{43}^{*}(f,4)$ связаны линейным невырожденным преобразованием L и $|L|\neq 0$, эти системы изоморфны. Проверим установление их изоморфизма с помощью описанного метода. Как следует из [6], если $M=m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4\in\Gamma_{43}(e,4)$, то ассоциированная система линейных дифференциальных уравнений этой ГЧС имеет четырехкратный корень характеристического уравнения $\lambda=m_1$, и такое представление экспоненты:

$$\operatorname{Exp}(M)=e^{m_1}\left[e_1+m_2e_2+m_3e_3+\left(m_4+\frac{m_2^2}{2}\right)e_4\right]. \qquad (31)$$

Аналогично и для ГЧС $\Gamma_{43}^{*}(f,4)$: если $N=n_1f_1+n_2f_2+n_3f_3+n_4f_4\in$ $\in\Gamma_{43}^{*}(f,4)$, то ассоциированная система линейных дифференциальных уравнений этой ГЧС имеет четырехкратный корень характеристического уравнения $\lambda=n_1$ и такое представление экспоненты:

$$\operatorname{Exp}(N)=e^{n_1}\left[f_1+n_2f_2+\left(n_3+\frac{n_2^2}{2}\right)f_3+n_4f_4\right]. \qquad (32)$$

Если можно найти такое невырожденное линейное преобразование, которое связывает базисы систем $\Gamma_{43}(e,4)$ и $\Gamma_{43}^{*}(f,4)$ так, что экспоненты (31) и (32) переходят одна в другую, то $\Gamma_{43}(e,4)$ и $\Gamma_{43}^{*}(f,4)$ — изоморфны, в противном случае — неизоморфны.

Поскольку единичные элементы ε и ε^{*} систем $\Gamma_{43}(e,4)$ и $\Gamma_{43}^{*}(f,4)$ являются элементами базисов соответственно $\varepsilon_{43}=e_1$ и $\varepsilon_{43}^{*}=f_1$, а при изоморфном соответствии единичные элементы переходят друг в друга, то без ограничения общности оператор изоморфизма имеет вид (24), при преобразовании которого компоненты числа преобразуются так:

$$\begin{aligned} n_1&=m_1+m_2x_{21}+m_3x_{31}+m_4x_{41},\\ n_2&=m_2x_{22}+m_3x_{32}+m_4x_{42},\\ n_3&=m_2x_{23}+m_3x_{33}+m_4x_{43},\\ n_4&=m_2x_{24}+m_3x_{34}+m_4x_{44}. \end{aligned} \qquad (33)$$

Таким образом, задача заключается в определении такого невырожденного оператора L, который бы переводил (31) в (32) и обратно:

$$\mathrm{Exp}(M)\overset{L}{\Leftrightarrow}\mathrm{Exp}(N)\,. \tag{34}$$

С учетом экспоненциального множителя (8) соответствие (34) преобразуется в гиперкомплексное уравнение:

$$e_1+m_2e_2+m_3e_3+(m_4+m_2^2/2)\,e_4=f_1+n_2f_2+(n_3+n_2^2/2)\,f_3+n_4f_4.$$

Подставляя (24) в левую часть этого уравнения, а (33) в правую, получаем

$$f_1+m_2(x_{21}f_1+x_{22}f_2+x_{23}f_3+x_{24}f_4)+m_3(x_{31}f_1+x_{32}f_2+x_{33}f_3+x_{34}f_4)+$$
$$+(m_4+m_2^2/2)(x_{41}f_1+x_{42}f_2+x_{43}f_3+x_{44}f_4)=$$
$$=f_1+(m_2x_{22}+m_3x_{32}+m_4x_{42})\,f_2+(m_2x_{23}+m_3x_{33}+m_4x_{43})+$$
$$+(m_2x_{22}+m_3x_{32}+m_4x_{42})^2/2)\,f_3+(m_2x_{24}+m_3x_{34}+m_4x_{44})\,f_4.$$

На основании определения равенства гиперкомплексных чисел гиперкомплексное уравнение (17) превращается в систему уравнений с вещественными переменными:

$$\begin{gathered}
m_2x_{21}+m_3x_{31}+x_{41}(2m_4+m_2^2)/2=0,\\
m_2x_{22}+m_3x_{32}+x_{42}(2m_4+m_2^2)/2=m_2x_{22}+m_3x_{32}+m_4x_{42},\\
m_2x_{23}+m_3x_{33}+x_{43}(2m_4+m_2^2)/2=m_2x_{23}+m_3x_{33}+m_4x_{43}+\\
+(m_2x_{22}+m_3x_{32}+m_4x_{42})^2/2,\\
m_2x_{23}+m_3x_{33}+m_4x_{44}+m_2^2x_{44}/2=m_2x_{24}+m_3x_{34}+m_4x_{44}.
\end{gathered} \tag{35}$$

Поскольку (35) должно выполняться при любых $m_2, m_3, m_4\in R$, с помощью метода неопределенных коэффициентов получаем решение

$$x_{21}=0,\ x_{22}\in R,\ x_{23}\in R,\ x_{31}=0,\ x_{32}=0,\ x_{33}=0,$$
$$x_{34}\in R,\ x_{41}=0,\ x_{42}=0,\ x_{43}\in R^{+},\ x_{44}=0,$$

и оператор изоморфизма

$$L:\{e_1=f_1,e_2=x_{22}f_2+x_{23}f_3+x_{24}f_4,e_3=x_{34}f_4,e_4=x_{22}^2f_3\},$$
$$L^{-1}:\left\{f_1=e_1,\,f_2=e_2-\frac{x_{24}}{x_{22}x_{34}}e_3-\frac{x_{23}}{x_{22}^2}e_4,\,f_3=\frac{1}{x_{22}^2}e_4,\,f_4=\frac{1}{x_{34}}e_2\right\}. \tag{36}$$

Из обратимости оператора L вытекает $x_{22}, x_{34}\in R\setminus 0$. Из (33) и (36) следует справедливость (8), т.е. правильность сокращения на экспоненциальный множитель в (34). Отличие оператора (35) от (29) объясняется так же, как и в примере 1. Оператор (36) переводит таблицу (30) в таблицу (28). Таким образом, можно сделать вывод о том, что системы $\Gamma_{43}(e,4)$ и $\Gamma_{43}^{*}(f,4)$ — изоморфны. При этом определен оператор изоморфизма наиболее общего вида, который точно воспроизводит таблицу умноження.

Выводы

Предложенный метод использования представлений экспонент позволяет решать вопрос об изоморфизме ГЧС и в случае наличия у них корней характеристических уравнений кратности, большей 2. При этом вместо решения системы квадратичных уравнений большой размерности вида (2) задача сводится к решению системы более простых уравнений. И несмотря на то, что число их может быть больше, чем у системы квадратичных уравнений, их простота значительно облегчает процесс решения задачи. Приведенные примеры свидетельствуют о том, что метод может быть применен и для решения вопроса об изоморфизме ГЧС более высоких размерностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калиновский Я.А.* Эффективные алгоритмы решения систем уравнений изоморфизма гиперкомплексных числовых систем с помощью представлений экспонент // Электрон. моделирование. — 2017. — **39**, № 1. — С. 75 —90.
2. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. — М. : Наука, 1973. — 144 с.
3. *Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений. — Киев: Инфодрук, 2012. — 183 с.
4. *Kalinovsky Y.A., Lande D.V., Boyarinova Y.E., Khitsko I.V.* Some isomorphic classes for noncanonical hypercomplex number systems of dimension 2. — arXiv preprint arXiv: 1403.2273, 2014.
5. *Dieterich E.* Classification, automorphism groups and categorical structure of the two-dimensional real division algebras // Journal of Algebra and its applications, 2005. — 4. — P. 517—538.
6. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения.— Киев: НАН України, Ін-т проблем реєстрації інформації, 2010. — 389 с.
7. *E. Darpö E., Rochdi A.* Classification of the four-dimensional power-commutative real division algebras // Proc. of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics. — 2011. — Vol. 141, Issue 06. — P. 1207—1223.

Поступила 01.02.17

REFERENCES

1. Kalinovsky, Ya.A. (2016), "Efficient algorithms for solution of the system of isomorphism equations of hypercomplex number systems with presentation of exponential functions", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 39, no. 1, pp. 75-90.
2. Kantor, I.L. and Solodovnikov, A.S. (1973), *Giperkompleksnye chisla* [Hypercomplex numbers], Nauka, Moscow, USSR.
3. Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, Yu.E. (2012), *Vysokorazmernyie izomorfnyie giperkompleksnyie chislovyie sistemy i ikh ispolzovznie dlya povysheniya efektivnosti vychisleniy* [High-dimensional isomorphic hypercomplex number systems and their use for increasing efficiency of calculations], Infodruk, Kyiv, Ukraine.
4. Kalinovsky, Ya.A., Lande, D.V., Boyarinova, Yu.E. and Khitsko, I.V. (2014), Some isomorphic classes for noncanonical hypercomplex number systems of dimension, arXiv preprint arXiv: 1403.2273, 2014.
5. Dieterich, E. (2005), Classification, automorphism groups and categorical structure of the two-dimensional real division algebras, *Journal of Algebra and its Applications*, no. 4, pp. 517-538.
6. Sinkov, M.V., Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, Yu.E. (2010), *Konechnomernyie giperkompleksnyie chislovyie sistemy. Osnovy teorii. Primeneniya* [Finite-dimensional hypercomplex number systems. Fundamentals of the theory. Applications], Infodruk, Kyiv, Ukraine.
7. E. Darpö, E. and Rochdi, A. (2011), "Classification of the four-dimensional power-commutative real division algebras", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathema- tics*, Vol. 141, Iss. 6, pp. 1207-1223.

Received 01.02.17

Ya.A. Kalinovsky, Yu.E. Boyarinova

THE METOD FOR RESEARCH OF ISOMORPHISM
OF INDECOMPOSABLE HYPERCOMPLEX NUMBER SYSTEMS

A method is presented for determining isomorphism of indecomposable commutative hypercomplex numerical systems through analysis of the representations of exponential functions in these systems. It is shown that this approach greatly simplifies the systems of isomorphism equations.

K e y w o r d s: hypercomplex number system, commutativity, isomorphism, exponential function, isomorphism operator, multiplicity of the roots.

КАЛИНОВСКИЙ Яков Александрович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 1965 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

БОЯРИНОВА Юлия Евгеньевна, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины, доцент Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончила в 1997 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.