ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

МАТЕМАТИКА

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.10.003
УДК 517.98

Е.Н. Ашурова [1], В.Л. Островський [2], Ю.С. Самойленко [2]

[1] Український центр клінічних досліджень компанії “Chiltern”, Київ
[2] Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: work1991@ukr.net, vo@imath.kiev.ua, yurii_sam@imath.kiev.ua

Про зображення алгебр, породжених скінченним розкладом одиниці та набором ортогональних проекторів

Представлено академіком НАН України Ю.С. Самойленком

Досліджено властивості зображень інволютивної алгебри, породженої самоспряженими ідемпотентами $q_1, \ldots, q_n$ та $p_1, \ldots, p_m$, що задовольняють співвідношення $q_1 + \ldots + q_n = e$, $p_j p_k = 0$, $j \neq k$. Відповідні набори проекторів у гільбертовому просторі виникають при дослідженні фредгольмовості тепліцевих операторів. Зокрема, для незвідних зображень загального положення з $\dim P_j = 1$, $j = 1, \ldots, m$, знайдено комутативний набір нормальних операторів, сумісний спектр якого визначає зображення з точністю до унітарної еквівалентності.

Ключові слова: *набори ортопроекторів, тепліцеві оператори.*

Один з ефективних методів дослідження фредгольмовості тепліцевих операторів полягає у відображенні опертора у певну C^*-алгебру, породжену набором ортопроекторів і її реалізації неперервними матричними полями (див., наприклад, [1] та наведену там бібліографію). Зокрема, вивчалися властивості C^*-алгебри, породженої наборами ортопроекторів $P, Q_1, \ldots, Q_n$ у деякому гільбертовому просторі H, що задовольняють співвідношення $Q_1 + \cdots + Q_n = I$, а також більш загальними наборами ортопроекторів $P_1, \ldots, P_m$, $Q_1, \ldots, Q_n$, в H, які задовольняють співвідношення

$$P_j \perp P_k, \quad k \neq j, \quad Q_1 + \cdots + Q_n = I \tag{1}$$

(див. [2]). У вказаних роботах досліджувалися властивості C^*-алгебри, породженої незвідними наборами ортопроекторів, для яких образ проектора P чи образи проекторів $P_1, \ldots, P_m$ є одновимірними просторами. Саме такі набори виникають у конкретних реалізаціях локальних алгебр, пов’язаних з операторами Тепліца з кусково-неперервними символами. Зокрема, показано, що відповідна C^*-алгебра вкладається в алгебру неперервних матричнозначних функцій на певній множині параметрів. У випадку $m = 1$ множина параметрів $c_1, \ldots, c_n$, що індексують незвідні зображення, є симплексом

$$c_1 + \cdots + c_n = 1, \quad c_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

і розклад довільного зображення на незвідні задається спектральним розкладом відповідного комутативного набору самоспряжених операторів $C_1, \ldots, C_n$.

Проте у разі $m \geqslant 2$ подібного опису множини, що параметризує незвідні зображення, наведено не було. Питання про параметризацію незвідних зображень таких алгебр у випадку $m \geqslant 2$ досліджується в даній роботі.

Зручним інструментом дослідження наборів ортопроекторів у гільбертовому просторі є операторна матриця Грама (див. [3]). У першому пункті викладено конструкцію операторної матриці Грама та її основні властивості, що використовуються у подальшому.

У другому пункті розглядаються загальні властивості наборів ортопроекторів з умовами (1) при $m \geqslant 2$. Зокрема, показано, що за умови, коли кожна пара проекторів (P_j, Q_k), (P_j, Q_k), $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, знаходиться у загальному положенні, задача опису з точністю до унітарної еквівалентності наборів еквівалентна задачі опису блочних $m \times m$ додатних самоспряжених матриць $A_1, \ldots, A_n$ з умовою $A_1 + \cdots + A_n = I$. Ця умова є природним аналогом умови (2) у випадку $m = 1$.

Відомо [4], що навіть у випадку $m = 1$, $n \geqslant 3$, задача опису наборів ортопроекторів з умовами (1) з точністю до унітарної еквівалентності є надзвичайно складною ($*$-дикою). У третьому пункті досліджуються набори з додатковими комутаційними співвідношеннями, які еквівалентні умові, що у незвідному зображенні образи ортопроекторів $P_1, \ldots, P_m$ одновимірні. У цьому випадку задача опису незвідних наборів є ручною. Основним результатом є теорема 4, яка описує комутативний набір нормальних операторів, спектральний розклад яких дає розклад набору на незвідні набори.

Дана робота є узагальненням попередньої роботи [5], де аналогічні питання досліджувались у випадку $m = 2$.

1. Операторна матриця Грама. Нехай $P_1, \ldots, P_n$ — набір проекторів у H і нехай $H_j = \operatorname{Im} P_j$, $j = 1, \ldots, n$. Позначимо $S_j : H_j \to H$ ізометричні вкладення, так що $S_j S_j^* = P_j$, $S_j^* S_j = I_{H_j}$. Розглянемо простір $\tilde{H} = H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$ та оператор $J = (S_1, \ldots, S_n) : \tilde{H} \to H$.

Означення 1 [3, 6]. Оператор $G = J^* J : \tilde{H} \to \tilde{H}$ називається операторною матрицею Грама системи підпросторів $(H; H_1, \ldots, H_n)$.

Блочні елементи операторної матриці Грама мають вигляд $(S_j^* S_k)_{j,k=1}^n$, отже, у випадку одновимірних проекторів P_j маємо $H_j = \mathbb{C}\langle e_j \rangle$, $\|e_j\| = 1$ та G є матрицею Грама системи векторів $(e_1, \ldots, e_n)$.

Теорема 1 [3]. *Операторна матриця Грама має такі властивості:*

1. $G = G^*$, $G \geqslant 0$.

2. *Діагональні блоки* G *є одиничними операторами,* $G_{jj} = I_{H_j}$, $j = 1, \ldots, n$.

3. $G_{jk} = 0 \Leftrightarrow H_j \perp H_k$.

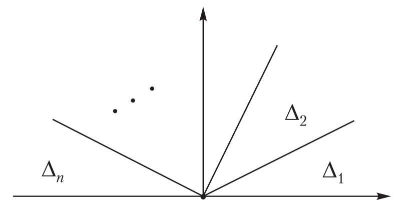
Нехай $Q_1, \ldots, Q_n$ — проектори на H_j в $\tilde{H}$.

Теорема 2 [3]. *Набір* $(P_1, \ldots, P_n)$ *в* H *незвідний тоді і лише тоді, коли набір* $(G, Q_1, \ldots, Q_n)$ *незвідний в* $\tilde{H}$.

1. *Набори* $(P_1, \ldots, P_n)$ *та* $(P_1', \ldots, P_n')$ *унітарно еквівалентні тоді і лише тоді, коли відповідні набори* $(G, Q_1, \ldots, Q_n)$ *та* $(G', Q_1', \ldots, Q_n')$ *унітарно еквівалентні.*

Таким чином, маючи набір проекторів $P_1,\ldots,P_n$ в H, можна побудувати відповідний оператор $G\geqslant 0$ та набір ортопроекторів $Q_1,\ldots,Q_n$, для яких

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j = I, \quad Q_j G Q_j = Q_j .$$



Навпаки, маючи набір проекторів $Q_1,\ldots,Q_n$ у гільбертовому просторі $\tilde{H}$, для яких $\sum_{k=1}^{n} Q_k = I$, та обмежений оператор $B\geqslant 0$ в $\tilde{H}$, для якого $Q_j B Q_j = Q_j$, $j=1,\ldots,n$, можна однозначно з точністю до унітарної еквівалентності відновити набір $P_1,\ldots,P_n$, для якого B буде операторною матрицею Грама.

2. Алгебри "all but one". Розглянемо $*$-алгебру $\mathcal{P}_{abo,n}$ (див. [1]), породжену твірними $p, q_1,\ldots,q_n$ та співвідношеннями

$$p^2 = p^* = p, \quad q_j^2 = q_j^* = q_j, \quad j=1,\ldots,n,$$

$$q_1+\cdots+q_n = e.$$

Зображення цієї алгебри – набір проекторів $P, Q_1,\ldots,Q_n$ з умовою $Q_1+\cdots+Q_n = I$. При $n\geqslant 2$ задача унітарної класифікації усіх зображень є дуже складною ($*$-дикою). Водночас, за додаткової умови dim P = 1 опис усіх незвідних зображень є $*$-ручною задачею. Множина незвідних зображень загального положення параметризується n-ками додатних чисел $c_1,\ldots,c_n$, для яких $c_1+\cdots+c_n = 1$. При цьому усі незвідні зображення мають розмірність $\leqslant n$.

Приклад (простір Бергмана). Нехай Π позначає верхню комплексну півплощину. Функції з $L_2(\Pi)$, що є аналітичними всередині Π, утворюють підпростір $\mathcal{A}^2(\Pi)$ (підпростір Бергмана). Позначимо P проектор на $\mathcal{A}^2(\Pi)$ в $L_2(\Pi)$ (проектор Бергмана). Поділимо Π на сектори $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ з вершинами у точці 0 (рисунок), $\bigcup_1^n \Delta_k = \Pi$, і покладемо $Q_j = M_{\chi_j}$, $j=1,\ldots,m$, — оператори множення на індикатори множин $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$. Тоді $Q_1+\cdots+Q_n = I$ і набір $P, Q_1,\ldots,Q_n$ розкладається на незвідні набори з dim $P\leqslant 1$. Такі набори виникають при вивченні фредгольмовості певних класів тепліцевих операторів (див. [1]).

3. Набори "All but *m*" проекторів.

Приклад (простори типу Бергмана). Для кожного $k=1,2,\ldots$, розглянемо підпростір бергманівського типу $\mathcal{A}_k^2, \mathcal{A}_{-k}^2 \subset L_2(\Pi)$, породжений функціями f, для яких відповідно $\frac{\partial^k}{\partial \bar{z}^k} f = 0$ чи $\frac{\partial^k}{\partial z^k} f = 0$. Означимо

$$A_1^2 = \mathcal{A}_1^2 = \mathcal{A}^2, \quad A_k^2 = \mathcal{A}_k^2 \ominus \mathcal{A}_{k-1}^2, \quad k>1,$$

$$A_{-1}^2 = \mathcal{A}_{-1}^2, \quad A_{-k}^2 = \mathcal{A}_{-k}^2 \ominus \mathcal{A}_{-k+1}^2, \quad k<-1,$$

і розглянемо проектор $\mathcal{P}_k$ на підпростір A_k в $L_2(\Pi)$. Тоді $\sum_1^{\infty}(\mathcal{P}_k+\mathcal{P}_{-k}) = I$ [7].

Нехай $P_1,\ldots,P_m$ — скінченний піднабір проекторів з набору $(\mathcal{P}_k)$. Тоді проектори $Q_1,\ldots,Q_n$, $P_1,\ldots,P_m$ задовольняють умови

$$Q_1+\cdots+Q_n = I, \quad P_j P_k = 0, \quad j\neq k.$$

Більш того, такий набір розкладається на незвідні набори, для яких $\dim P_j \leqslant 1$, $j=1,\ldots,m$ (див. [2]).

Нижче ми вивчатимемо структуру з точністю до унітарної еквівалентності наборів проекторів $Q_1,\ldots,Q_n,\quad P_1,\ldots,P_m$, для яких

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = I, \quad P_j \perp P_k, \quad 1 \leqslant j \neq k \leqslant m. \tag{3}$$

Такі набори є зображеннями відповідної $*$-алгебри “all but m”. Як і у випадку $m=1$, унітарний опис *усіх* зображень цієї алгебри є $*$-дикою задачею. Нижче ми вивчимо деякі загальні властивості таких наборів та вкажемо природну додаткову умову, за якої задача класифікації стає ручною.

Розглянемо ізометричні вкладення $S_j : \operatorname{Im} Q_j \to H$, $j=1,\ldots,n$ та ізометричні вкладення $T_i : \operatorname{Im} P_i \to H$, $i=1,\ldots,m$, так що

$$S_j^* S_j = I_{\operatorname{Im} Q_j}, \quad S_j S_j^* = Q_j, \quad T_i^* T_i = I_{\operatorname{Im} T_i}, \quad T_i T_i^* = P_i.$$

Операторна матриця Грама G набору проекторів $P_1,\ldots,P_m,\quad Q_1,\ldots,Q_n$ має вигляд

$$G = \begin{pmatrix} I & \ldots & 0 & T_1^* S_1 & \ldots & T_1^* S_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & I & T_m^* S_1 & \ldots & T_m^* S_n \\ S_1^* T_1 & \ldots & S_1^* T_m & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_n^* T_1 & \ldots & S_n^* T_m & 0 & \ldots & I \end{pmatrix}.$$

Позначимо $H_j = \operatorname{Im} P_j$, $j=1,\ldots,m$, $H_0 = \bigoplus_{j=1}^m H_j$ та розглянемо проектори P_j' в H_0 на підпростори H_j, $j=1,\ldots,m$. Розглянемо оператори

$$B_j = \begin{pmatrix} T_1^* S_j \\ \vdots \\ T_m^* S_j \end{pmatrix} : \operatorname{Im} Q_j \to H_0,$$

$$A_j = B_j B_j^* : H_0 \to H_0, \quad j=1,\ldots,n. \tag{4}$$

Твердження 1. *Набір операторів* $(P_1',\ldots,P_m', A_1,\ldots,A_n)$ *в* H_0 *має такі властивості:*

1) $P_1' + \cdots + P_{m'}' = I_{H_0}$, $A_1 + \cdots + A_n = I_{H_0}$;

2) *якщо набори проекторів* $(P_1,\ldots,P_m,\quad Q_1,\ldots,Q_n)$ *та* $(\tilde{P}_1,\ldots,\tilde{P}_m,\quad \tilde{Q}_1,\ldots,\tilde{Q}_n)$ *унітарно еквівалентні, то відповідні набори операторів* $(P_1',\ldots,P_m', A_1,\ldots,A_n)$ *та* $(\tilde{P}_1',\ldots,\tilde{P}_m', \tilde{A}_1,\ldots,\tilde{A}_n)$ *унітарно еквівалентні.*

***Зауваження* 1.** Обернене твердження до п. 2 невірне: легко вказати приклади унітарно нееквівалентних наборів $(P_1,\ldots,P_m,\quad Q_1,\ldots,Q_n)$ та $(\tilde{P}_1,\ldots,\tilde{P}_m,\quad \tilde{Q}_1,\ldots,\tilde{Q}_n)$, які породжують той самий набір $(P_1',\ldots,P_m', A_1,\ldots,A_n)$.

Будемо казати, що підпростори $E \subset H$ та $K \subset H$ знаходяться в загальному положенні, якщо $E \cap K = 0$, $E \cap K^{\perp} = 0$, $E^{\perp} \cap K = 0$.

Позначимо $P_0 = P_1 + \cdots + P_m$.

Теорема 3. *Нехай* $P_1, \ldots, P_m$, $Q_1, \ldots, Q_n$ *у просторі* H *задовольняють умови (3) і нехай* $A_1, \ldots, A_n$ *— відповідні невід'ємні оператори в* H_0, *побудовані вище, та нехай також кожна з пар* P_0, Q_j, $j = 1, \ldots, n$, *знаходиться у загальному положенні. Тоді*

$\dim P_0 = \dim Q_j, \quad \ker A_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n$.

Навпаки, якщо задано проектори $P_1', \ldots, P_m'$ *та невід'ємні оператори* $A_1, \ldots, A_n$ *в* H_0, *для яких*

$$P_1' + \cdots + P_m' = I, \quad A_1 + \cdots + A_n = I, \quad \ker A_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

то існує єдиний з точністю до унітарної еквівалентності набір проекторів $P_1, \ldots, P_m$, $Q_1, \ldots, Q_n$ *з умовою (3), для яких* P_0, Q_j, $j = 1, \ldots, n$, *знаходяться у загальному положенні, і який породжує за наведеною вище конструкцією набір проекторів* $P_1', \ldots, P_n'$ *та операторів* $A_1, \ldots, A_n$.

4. Незвідні зображення. Позначимо Λ множину всіх мультиіндексів вигляду

$$\alpha = (j_1, k_1, j_2, \ldots, k_{l-1}, j_l, k_l, j_1),$$

$$j_s = 1, \ldots, m; \quad k_s = 1, \ldots, n; \quad s = 1, \ldots, l; \quad l = 0, 1, \ldots.$$

Розглянемо таку множину операторів C_α, $\alpha \in \Lambda$:

$$C_\alpha = P_{j_1} Q_{k_1} P_{j_2} \cdots Q_{k_{l-1}} P_{j_l} Q_{k_l} P_{j_1}. \tag{5}$$

Твердження 2. *Нехай* $Q_1, \ldots, Q_n$, $P_1, \ldots, P_m$ *— незвідний набір проекторів з умовами (3), для яких* $P_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, m$. *Тоді* $\dim P_j = 1$, $j = 1, \ldots, m$ *тоді і лише тоді, коли оператори* C_α, $\alpha \in \Lambda$, *утворюють комутативний набір.*

Нехай $\Lambda_i \subset \Lambda$ — підмножина індексів, що починаються та закінчуються на i, $i = 1, \ldots, m$, так що $\Lambda = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_m$.

Теорема 4. *Нехай набір проекторів* $P_1, \ldots, P_2$, $Q_1, \ldots, Q_n$ *породжує незвідне зображення (3), причому:*

i) $P_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$;

ii) для кожного $j = 1, \ldots, n$ *пара проекторів* $P_0 = P_1 + \cdots + P_m$ *та* Q_j *знаходяться у загальному положенні;*

iii) оператори C_α, $\alpha \in \Lambda$, *утворюють комутативний набір.*

Тоді $C_\alpha = c_\alpha P_j$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \Lambda_j$, *та скінченний набір чисел*

$$c_\alpha, \quad |\alpha| \in \{3, 5, 7\},$$

визначає проектори $P_1, \ldots, P_m$, $Q_1, \ldots, Q_n$ *однозначно з точністю до унітарної еквівалентності.*

Зауваження. *1.* У загальному (звідному) випадку спектральний розклад комутативного набору нормальних операторів C_α, $\alpha \in \Lambda$ дає розклад набору $P_1, \ldots, P_m$, $Q_1, \ldots, Q_n$ на незвідні набори.

2. Скінченний набір параметрів, описаний у попередній теоремі, є надлишковим. Для різних конкретних зображень можна вказати різні підмножини цього набору, яких достатньо для відновлення зображення.

3. Наведена теорема не дає опису множини всіх можливих наборів параметрів. Ця множина визначається умовами $A_1 + \cdots + A_n = I$, $A_j > 0$ *в* $\mathbb{C}^m$.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Vasilevski N.L. C*-algebras generated by orthogonal projections and their applications. *Integr. Equ. Oper. Theory*. 1998. **31**. P. 113—132.
2. Karlovich Yu.I., Pessoa L.V. C*-algebras of Bergmann type operators with piecewise continuous coefficients. *Integr. Equ. Oper. Theory*. 2007. **57.** P. 521—565.
3. Стрелец А.В., Фещенко И.С. О системах подпространств гильбертова пространства, удовлетворяющих условиям на углы между каждой парой подпространств. *Алгебра и анализ*. 2012. **24**, № 5. С. 181—214.
4. Кругляк С.А., Самойленко Ю.С. Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов. *Функц. анализ из его прил*. 1980. **14,** вып. 1. С. 60—62.
5. Ашурова Е.Н., Островський В.Л. Про зображення “all but two” алгебр. *Зб. праць Інституту математики НАН України*. 2015. **12**, № 1. С. 8—21.
6. Самойленко Ю.С., Стрелец А.В. О простых *n*-ках подпространств гильбертова пространства. *Укр. мат. журн*. 2009. **61**, № 12. С. 1668—1703.
7. Vasilevski N.L. On the structure of Bergmann and poly-Bergmann spaces. *Integr. Equ. Oper. Theory*. 1999. **33**. P. 471—488.

Надійшло до редакції 27.06.2017

REFERENCES

1. Vasilevski, N. L. (1998). C*-algebras generated by orthogonal projections and their applications. Integr. Equ. Oper. Theory, 31, pp. 113-132.
2. Karlovich, Yu. I. & Pessoa, L. V. (2007). C*-algebras of Bergmann type operators with piecewise continuous coefficients. Integr. Equ. Oper. Theory, 57, pp. 521-565.
3. Strelets, A. V. & Feshchenko, I. S. (2012). On systems of subspaces of a Hilbert space that satisfy conditions on the angles between every pair of subspaces. St. Petersburg Math. J., 24, No. 5, pp. 823–846.
4. Kruglyak, S. A. & Samoĭlenko, Ju. S. (1980). Unitary equivalence of sets of self-adjoint operators. Funct. Anal. Appl., 14, No. 1, pp. 48-50.
5. Ashurova, E.N. & Ostrovskyi, V.L. (2015). On representations of “all but two” algebras. Zbirnyk Prats Instytutu Matematyky NAN Ukrainy, 12, No. 1. pp. 8-21 (in Ukrainian).
6. Samoilenko, Yu. S. & Strelets, A. V. (2009). On simple *n*-tuples of subspaces of a Hilbert space. Ukr. Math. J., 61, No. 12, pp. 1956-1994.
7. Vasilevski, N.L. (1999). On the structure of Bergmann and poly-Bergmann spaces. Integr. Equ. Oper. Theory, 33, pp. 471-488.

Received 27.06.2017

Е.Н. Ашурова[1], *В.Л. Островский*[2], *Ю.С. Самойленко*[2]

[1] Украинский центр клинических исследований компании “Chiltern”, Киев
[2] Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: work1991@ukr.net, vo@imath.kiev.ua, yurii_sam@imath.kiev.ua

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННЫХ КОНЕЧНЫМ РАЗЛОЖЕНИЕМ ЕДИНИЦЫ И НАБОРОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКТОРОВ

Исследованы свойства представлений инволютивной алгебры, порожденной самосопряженными идемпотентами $q_1, \ldots, q_n$ и $p_1, \ldots, p_m$, удовлетворяющими соотношениям $q_1 + \ldots + q_n = e$, $p_j p_k = 0$, $j \neq k$. Соответствующие наборы проекторов в гильбертовом пространстве возникают при исследовании фредгольмовости тёплицевых операторов. В частности, для неприводимых представлений общего положения с $\dim P_j = 1$, $j = 1 \ldots, m$, найден набор коммутирующих нормальних операторов, совместный спектр которых определяет соотношение с точностью до унитарной эквивалентности.

Ключевые слова: *наборы ортопроекторов, тёплицевы операторы.*

E.N. Ashurova [1], *V.L. Ostrovskyi* [2], *Yu.S. Samoilenko* [2]

[1] Chiltern Clinical Research in Ukraine, Kiev
[2] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: work1991@ukr.net, vo@imath.kiev.ua, yurii_sam@imath.kiev.ua

ON REPRESENTATIONS OF THE ALGEBRAS GENERATED
BY A FINITE RESOLUTION OF THE IDENTITY
AND A COLLECTION OF JOINTLY ORTHOGONAL PROJECTIONS

We study properties of representations of the involutive algebra generated by self-adjoint idempotents, $q_1, \ldots, q_n$ and $p_1, \ldots, p_m$, which satisfy the conditions $q_1 + \ldots + q_n = e$, $p_j p_k = 0$, $j \neq k$. The corresponding collections of projections in a Hilbert space arise in the study of the Fredholm properties of Toeplitz operators. In particular, for generic irreducible representations with $\dim P_j = 1$, $j = 1 \ldots, m$, we have constructed a commuting family of normal operators, whose joint spectrum determines the representation up to unitary equivalence.

Keywords: *families of orthoprojections, Toeplitz operators.*