Для числа устойчивости неориентированного графа предложена верхняя оценка, которая базируется на аппроксимации многогранника устойчивых множеств с помощью линейных неравенств для p-колес в графе. Описан алгоритм нахождения ослабленной верхней оценки на основе решения задачи линейного программирования с конечным числом ограничений-неравенств, связанных с нечетными циклами и p-колесами в графе. Даны результаты тестовых экспериментов для DIMACS-графов и графов, связаных с максимальным объемом помехоустойчивых кодов.

УДК 519.8

П.И. СТЕЦЮК, С.И. БУТЕНКО, А.П. ЛИХОВИД

ЛП-ОРИЕНТИРОВАННАЯ ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ЧИСЛА УСТОЙЧИВОСТИ ГРАФА НА ОСНОВЕ *P*-КОЛЕС*

Введение. Задача о максимальном независимом (устойчивом) множестве вершин графа является одной из центральных в теории графов. Она имеет много важных приложений, связанных с выбором в графе экстремальных множеств вершин с заданными свойствами. Так, например, непосредственное приложение данной задачи связано с нахождением максимального объема помехоустойчивых кодов (кодов корректирующих ошибки при передаче информации). К задаче о максимальном независимом множестве вершин графа сводятся задачи о максимальной клике графа и о максимальной k-клике графа. Последние могут быть использованы при нахождении взаимосвязанных подмножеств при информационном анализе социологических, биологических, телекоммуникационных и других массивов данных. Такие подмножества в социологических данных могут характеризовать родственные, криминальные или профессиональные связи; в телекоммуникациях – группы абонентов, которые часто общаются; в биологических данных нахождение таких подмножеств может означать наличие причинно-следственных связей при функционировании отдельных частей живого организма. С помощью задачи о максимально

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта UKM2-2812-KV-06 (CRDF Cooperative Grants Programm)

независимом множестве вершин графа можно представить и классическую задачу о раскраске вершин неориентированного графа k -красками.

1. Постановка задачи и оценка $\alpha_C^*(G)$. Пусть $G=(V,E)$ – неориентированный граф (не содержащий петель) с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Подмножество вершин $S\subseteq V(G)$ называется устойчивым (или независимым) множеством графа G, если для любых $i,j\in S$ ребро (i,j) не принадлежит $E(G)$. Мощность максимального по числу входящих в него вершин устойчивого множества в графе G называется числом устойчивости $\alpha(G)$. Подмножество S^*, на котором достигается $\alpha(G)$, называется максимальным устойчивым (или независимым) множеством графа G.

В общем случае задача нахождения $\alpha(G)$ является NP -трудной задачей [1]. Теоретический и практический интерес представляет нахождение верхних оценок, достаточно хорошо аппроксимирующих сверху $\alpha(G)$. Одна из таких верхних оценок – $\alpha_C^*(G)$, которая связана с решением следующей задачи линейного программирования (ЛП-задачи) :

$$\alpha_C^*(G)=\max\sum_{i\in V(G)}x_i \tag{1}$$

при ограничениях

$$0\le x_i\le 1\quad \forall i\in V(G), \tag{2}$$

$$x_i+x_j\le 1\quad \forall (i,j)\in E(G), \tag{3}$$

$$\sum_{i\in V(C_{2k+1})}x_i\le k\quad \forall C_{2k+1}\in G. \tag{4}$$

Здесь C_{2k+1}, $k=1,2,\ldots$ – нечетный цикл в графе G (содержит нечетное количество вершин).

При построении оценки $\alpha_C^*(G)$ используются следующие семейства линейных неравенств: (2) – вершинные ограничения (vertix constraints); (3) – реберные ограничения (edge constraints); (4) – нечетного цикла ограничения (odd-cycle constraints). Вместе три семейства неравенств определяют многогранник нечетных циклов (odd-cycle polytope)

$$CSTAB(G)=\left\{x\in R^{|V|}: x \text{ удовлетворяет (2), (3) и (4)}\right\},$$

который аппроксимирует (сверху) многогранник $STAB(G)$ – многогранник устойчивых множеств (stable set polytope). Последний является выпуклой оболочкой инцидентных векторов устойчивых множеств S в G и с помощью реберных неравенств (3) может быть представлен в следующем виде:

$$STAB(G)=\operatorname{conv}\{x\in\{0,1\}^{|V|}: x_i+x_j\le 1\ \forall\,(i,j)\in E(G)\}. \tag{5}$$

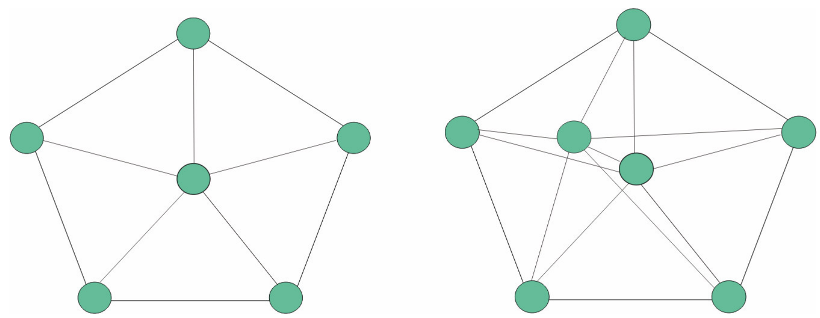
С помощью многогранника $CSTAB(G)$ ЛП-задача (1)–(4) для оценки $\alpha_C^*(G,w)$ может быть сформулирована в более простом виде:

$$\alpha_C^*(G,w) = \max \sum_{i\in V(G)} x_i, \quad x \in CSTAB(G).$$

Оценка $\alpha_C^*(G,w)$ с любой заданной точностью может быть найдена за полиномиальное время [2]. Полиномиальный алгоритм для ее нахождения [2] использует метод эллипсоидов и тот факт, что для точки $\bar{x} = \{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{|V|}\}$, которая удовлетворяет ограничениям (2)–(3), за полиномиальное время можно либо убедиться, что точка $\bar{x}$ удовлетворяет ограничениям (4) для каждого нечетного цикла, либо найти такой нечетный цикл, для которого ограничение вида (4) является максимально нарушенным.

Для произвольного графа G всегда имеет место неравенство $\alpha_C^*(G) \ge \alpha(G)$. Если граф G принадлежит семейству t-совершенных графов (для них $STAB(G) = CSTAB(G)$), то оценка $\alpha_C^*(G)$ является точной для числа устойчивости графа, т.е. $\alpha_C^*(G) = \alpha(G)$. В результате задача нахождения числа устойчивости t-совершенного графа разрешима за полиномиальное время. Однако, семейство t-совершенных графов является достаточно слабым и в него не попадают все те графы, для которых $\alpha(G) < |V|/3$ (предполагается, что граф не содержит изолированных вершин). Поэтому, если $\alpha(G) << |V|/3$, то оценка $\alpha_C^*(G)$ оказывается грубой для аппроксимации сверху $\alpha(G)$. Верхнюю оценку, которая будет более тесно аппроксимировать сверху $\alpha(G)$, чем оценка $\alpha_C^*(G)$, легко построить на основе такой подструктуры в графе G, как p-колесо.

2. Оценка $\alpha_{W_p}^*(G)$. Пусть имеется граф W_{2k+1+p}, у которого вершины состоят из вершин непересекающихся нечетного цикла C_{2k+1} и клики Q_p (полный подграф, содержащий p вершин). Если $p=1$, то клика состоит из одной вершины. Множество ребер в графе W_{2k+1+p} включает все ребра нечетного цикла C_{2k+1}, все ребра клики Q_p, а также ребра, связывающие каждую вершину C_{2k+1} со всеми вершинами клики Q_p. Граф W_{2k+1+p} принято называть p-колесом (англ. термин – p-wheel) [3]. Примеры 1-колеса и 2-колеса на базе нечетного цикла C_5 показаны на рисунке.



РИСУНОК

С p-колесом связано семейство линейных неравенств (p-wheel constraints)

$$\sum_{i \in V(C_{2k+1})} x_i + k \sum_{j \in V(Q_p)} x_j \le k, \quad \forall W_{2k+1+p} \in G, \tag{6}$$

которые справедливы (valid) для многогранника $STAB(G)$. Неравенства (6) означают, что для каждого p-колеса из графа G в устойчивое (независимое) множество может быть включена либо одна из вершин клики Q_p, либо k вершин из нечетного цикла C_{2k+1}. Если семейство неравенств (6) добавить к линейным неравенствам, которые определяют многогранник $CSTAB(G)$, то получаем многогранник

$$W_p STAB(G) = \left\{ x \in R^{|V|} : x \text{ удовлетворяет (2), (3), (4) и (6)} \right\},$$

который аппроксимирует (сверху) многогранник устойчивых множеств $STAB(G)$.

Оценка $\alpha^*_{W_p}(G)$ связана с решением следующей ЛП-задачи:

$$\alpha^*_{W_p}(G) = \max \sum_{i \in V(G)} x_i, \quad x \in W_p STAB(G). \tag{7}$$

Для произвольного графа G всегда имеет место неравенство

$$\alpha^*_C(G) \ge \alpha^*_{W_p}(G) \ge \alpha(G), \tag{8}$$

т.е. оценка $\alpha^*_{W_p}(G)$ является верхней оценкой (оценкой сверху) для $\alpha(G)$ и она всегда не хуже, чем оценка $\alpha^*_C(G)$. В общем случае нахождение оценки $\alpha^*_{W_p}(G)$ – NP-трудная задача. Более того, в общем случае NP-трудной является задача нахождения на основе уже имеющегося нечетного цикла такого p-колеса, для которого в точке $x^* = \{x_1^*, \ldots, x_{|V|}^*\}$ максимально нарушается линейное неравенство в форме (6). Эта задача равносильна нахождению максимальной взвешенной клики для индуцированного подграфа из G с подмножеством вершин из $V(G)$, где каждая вершина связана со всеми вершинами нечетного цикла. Веса вершин в индуцированном подграфе равны соответствующим компонентам вектора x^*.

Поэтому, взамен оценки $\alpha^*_{W_p}(G)$ рассмотрим ослабленную верхнюю оценку для $\alpha(G)$ на основе линейных неравенств для таких p-колес в графе G, которые легко построить на основе имеющихся нечетных циклов. Условимся эту оценку называть ЛП-ориентированной оценкой $\alpha_{W_p}(G)$ и алгоритм для ее нахождения будем строить на основе решения ЛП-задачи с конечным количеством линейных неравенств.

3. ЛП-ориентированная оценка $\alpha_{W_p}(G)$. Алгоритм для нахождения оценки $\alpha_{W_p}(G)$ условимся называть алгоритмом LPWSTAB (p, ε). В его основу положим ЛП-задачу в следующем виде:

$$f^*_{W_p} = \max \sum_{i \in V(G)} x_i \tag{9}$$

при ограничениях

$$0 \le x_i \le 1 \quad \forall i \in V(G), \tag{10}$$

$$x_i + x_j \le 1 \quad \forall (i,j) \in E(G), \tag{11}$$

$$\sum_{i \in V(C_{2k+1})} x_i \le k \quad \forall\, C_{2k+1} \in C_{odd} \in G, \tag{12}$$

$$\sum_{i \in V(C_{2k+1})} x_i + k \sum_{j \in V(Q_{p'})} x_j \le k, \quad \forall\, W_{2k+1+p'} \in W_{odd} \in G, p' \le p, \tag{13}$$

где C_{odd} и W_{odd} – конечные множества нечетных циклов и p'-колес, возможно пустые.

Пусть на k-ой итерации алгоритма получен вектор $x^* = \{x_1^*, \ldots, x_{|V|}^*\}$ – оптимальная точка ЛП-задачи (9)–(13). Ее будем использовать для дополнения множеств нечетных циклов и p'-колес ($p' \le p$) для очередной $(k+1)$-ой итерации. На основе вектора x^* найдем множество нечетных циклов с помощью алгоритма нахождения нечетных циклов из [2], который использован в полиномиальном алгоритме для оценки $\alpha_C^*(G)$. На основе найденных нечетных циклов сформируем множество p'-колес ($p' \le p$) следующим образом. Дополним нечетные циклы до p'-колес с помощью простейшего по количеству вычислений алгоритма (по типу алгоритма "жадного"), который последовательно включает наилучшие вершины, с помощью их можно расширить либо нечетный цикл, либо уже существующее p'-колесо. Наилучшей из списка вершин (кандидатов на расширение p'-колеса) считается та вершина, которой соответствует максимальная компонента в векторе x^*. Такой алгоритм построения p'-колеса условимся называть алгоритмом "последовательного включения наилучших вершин".

Для включения в ЛП-задачу новых ограничений будем использовать параметр ε (точность для проверки нарушенных ограничений). Он означает, что линейные неравенства, связанные с нечетным циклом C_{2k+1} и p'-колесом $W_{2k+1+p'}$, считаются нарушенными (в точке x^*) и включаются в ЛП-задачу, если для них выполняются условия:

$$\sum_{i\in V(C_{2k+1})} x_i^* \ge k+\varepsilon \quad \text{и} \quad \sum_{i\in V(C_{2k+1})} x_i^* + k\sum_{j\in V(Q_{p'})} x_j^* \ge k+\varepsilon.$$

Итеративный алгоритм LPWSTAB(p,ε) для нахождения оценки $\alpha_{W_p}(G)$ можно описать следующим образом.

Положим $itn=0$ и $C_0=\varnothing$, $W_0=\varnothing$ (множества нечетных циклов и p'-колес являютя пустыми). Перейдем к шагу 1.

Шаг 1. Имеем множество нечетных циклов C_{itn} и множество p'-колес W_{itn}. Положим $C_{odd}=C_{itn}$, $W_{odd}=W_{itn}$ и, решив ЛП-задачу (9)–(13), находим $f^*_{W_p}$ и $x^*=(x_1^*,\ldots,x_{|V|}^*)$.

Шаг 2. Построим взвешенный неориентированный граф $G'=(V',E')$. Множество вершин $V'(G')$ включает вершину i и ее копию i' для всех $i\in V(G)$. Множество ребер $E'(G')$ состоит из ребер, которые соединяют все те пары вершин (i,j') и (i',j), для которых пара вершин i и j соединена ребром (i,j) в графе G. Присвоим ребрам (i,j') и (i',j) один и тот же положительный вес (длина ребра) $l(i',j)=l(i,j')=1-x_i^*-x_j^*$.

Шаг 3. В графе G', рассматривая его как ориентированный (ребру (i,j') соответствуют дуги (i,j') и (j',i) с длинами, равными длине ребра (i,j'), т.е. $l(i,j')$), для каждой вершины $i\in V$ найдем кратчайший путь, который начинается в вершине i и заканчивается в вершине i' (копии вершины i). Число таких кратчайших путей равно $|V|$. Из них оставляем только те, которые определяют нечетный цикл. Пусть число таких кратчайших путей равно n ($n\le|V|$). Найдем нечетные циклы $C_{2k_1+1},\ldots,C_{2k_n+1}$ (они соответствуют n найденным кратчайшим путям).

Шаг 4. Установим множества C' и W' – пустыми и будем их заполнять следующим образом. Каждый из нечетных циклов C_{2k_i+1} для $i=1,\ldots,n$ с помощью алгоритма "последовательного включения наилучших вершин" дополняем до p'-колеса в графе G, где $p' \le p$. Пусть такое p'-колесо получено и если линейное неравенство (6) для него нарушенно, то найденное p'-колесо включаем в множество W'. Если построить p'-колесо на базе нечетного цикла не удалось, но линейное неравенство в виде (4) для этого нечетного цикла является нарушенным, то такой нечетный цикл включаем в множество C'. Если после завершения данной процедуры для всех $i=1,\ldots,n$ оба множества C' и W' являются пустыми, то установить $\alpha_{W_p}(G) = f^*_{W_p}$ и останов. В противном случае переходим к шагу 5.

Шаг 5. Положим $C_{itn+1} = C_{itn} \cup C'$ и $W_{itn+1} = W_{itn} \cup W'$ и $itn = itn+1$. Перейдем к шагу 1.

О свойствах оценки $\alpha_{W_p}(G,w)$ можно сказать, что в "идеализированом" случае, т. е. когда $\varepsilon = 0$, для нее справедливо неравенство

$$\alpha^*_C(G) \ge \alpha_{W_p}(G) \ge \alpha(G),$$

которое вытекает из следующего. ЛП-задача (9)–(13) построена таким образом, что если из нее убрать p-колесные ограничения (13), то получим оценку $\alpha^*_C(G,w)$, если окажется, что отсутствуют нечетные циклы, для которых ограничения есть нарушенными. За счет добавления к ЛП-задаче (9)–(12) конечного набора линейных неравенств для p-колес в виде (13) оценку $\alpha^*_C(G)$ мы не сможем ухудшить, а сможем ли улучшить – зависит от того, насколько активными в ЛП-задаче окажутся включенные ограничения. Поэтому, оценку $\alpha_{W_p}(G)$ можно рассматривать как улучшение оценки $\alpha^*_C(G)$ с помощью использования линейных неравенств для p-колес в графе G. В результате, если p-колес не удалось построить, то оценка $\alpha_{W_p}(G,w)$ будет сохранять свойства оценки $\alpha^*_C(G)$ и будет точной оценкой для числа устойчивости t-совершенных графов. В случае обнаружения p-колес, для которых линейные неравенства в виде (6) являются нарушенными, оценка $\alpha_{W_p}(G)$ может оказаться более точной оценкой сверху для $\alpha(G)$, чем оценка $\alpha^*_C(G)$.

4. Тестовые эксперименты. С целью проверки свойств оценки $\alpha_{W_p}(G)$ алгоритм LPWSTAB(p,ε) реализован на языке C++ программой LPWSTAB, для которой p и ε – входные параметры. Для решения ЛП-задачи использована программа SOPLEX [4], а для нахождения кратчайшего пути в ориентированном графе – программа *dikh* [5]. В табл. 1 приведены результаты экспериментов, которые получены с помощью программы LPWSTAB при $\varepsilon = 0.01$, для 16-ти графов из *DIMACS* -библиотеки [6].

ТАБЛИЦА 1. Эксперименты для оценки $\alpha_{W_p}(G)$ в DIMACS-графах

DIMACS-графы	$\lvert V \rvert$	$\lvert E \rvert$	$\alpha(G)$	$\alpha^*_C(G)$	$\alpha_{W_p}(G)/p_1$	$\alpha_{W_p}(G)/p_2$	$\alpha_{W_p}(G)/p^*$
c-fat200-1	200	18366	12	66,667	28,571/4	16,667/9	12,000/14
c-fat200-2	200	16665	24	66,667	40,000/2	28,571/4	24,000/6
johnson 16-2-4	120	1680	8	40,000	17,142/4	10,909/8	8,000/12
johnson8-2-4	28	210	4	9,333	7,000/1	4,667/3	4,000/4
johnson8-4-4	70	560	14	23,333	17,500/1	–	14,000/2
hamming8-4	256	11776	16	85,333	32,000/5	21,333/9	16,000/13
san200.0.9-1	200	1990	70	70,000	–	–	–
san200-0.9-2	200	1990	60	66,667	–	–	60,000/1
san200.0.9-3	200	1990	44	66,667	50,000/1	–	44,000/2
keller4	171	5100	11	57,000	21,375/5	15,103/9	14,825/13
hamming6-4	64	1312	4	21,333	10,667/3	7,111/6	5,333/9
san200-0.7-2	200	5970	18	66,667	25,000/5	20,266/7	18,890/8
brock200-1	200	5066	21	66,667	50,000/1	40,000/2	38,581/3
c-fat200-5	200	11427	58	66,667	–	–	–
mann-a27	378	702	126	135,000	–	–	–
mann-a9	45	72	16	18,000	–	–	–

Здесь оценка $\alpha^*_C(G)$ найдена программой LPWSTAB при $p = 0$. Первыми в табл. 1 размещены 9 графов из 16, для которых оценка $\alpha_{W_p}(G)$ оказалась точной для $\alpha(G)$. Для них в последнем столбце приведена оценка $\alpha_{W_p}(G)$ и значение $p = p^*$, при котором она достигнута. В двух предпоследних столбцах для этих 9 графов приведены найденные значения оценки α_{W_p} при некоторых значениях p, которые меньше p^*. Они иллюстрируют динамику уточнения оценок для первых 9 графов с ростом p. Оценка $\alpha^*_C(G)$ в графе san200.0.9–1 является точной для $\alpha(G)$, поэтому ее уточнение с помощью p-колес не потребовалось. Вторыми в табл. 1 размещены 4 графа, для которых найденная наилучшая оценка $\alpha_{W_p}(G)$ не является точной. Здесь p^* – те значения p, при которых найдены наилучшие оценки, и точно также отражена динамика улучшения оценок по мере увеличения p. Из табл. 1 видно, что для всех графов оценка $\alpha_{W_p}(G)$ даже при сравнительно небольших значениях p намного точнее аппроксимирует сверху $\alpha(G)$, чем оценка $\alpha_C^*(G)$. Исключение составляют лишь 3 графа, которые размещены в табл. 1 последними. Для них оценка $\alpha_C^*(G)$ не является точной и не улучшена с помощью использования p-колес, но разрыв здесь между оценкой $\alpha_C^*(G)$ и $\alpha(G)$ сравнительно небольшой.

Ряд экспериментов с программой LPWSTAB связан с задачами нахождения оценок максимального объема помехоустойчивых кодов из [7]. Рассматривались все семейства графов для кодов, корректирующих ошибки из [7]: **1dc** – Graphs From Single-Deletion-Correcting Codes; **2dc** – Graphs From Two-Deletion-Correcting Codes; **1tc** – Graphs From Codes For Correcting a Single Transposition (Excluding the End-Around Transposition); **1et** – Graphs From Codes For Correcting a Single Transposition (Including the End-Around Transposition) и **1zc** – Graphs From Codes For Correcting One Error on the Z-Channel (Also Called Codes For Correcting One Unidirectional or Asymmetric Error). Для всех указанных семейств графов с числом вершин от 64 до 512 найденные оценки $\alpha_{W_p}(G)$ приведены в табл. 2. Здесь ограничений на построение p-колес не делалось, на основе найденных нечетных циклов строились максимально возможные p-колеса согласно алгоритму "последовательного включения наилучших вершин".

ТАБЛИЦА 2. Сравнение $\vartheta(G)$ и $\alpha_{W_p}(G)$ для графов Н. Слоана

Граф G	$\alpha(G)$	$\vartheta(G)$	$\alpha_{W_p}(G)$	Граф G	$\alpha(G)$	$\vartheta(G)$	$\alpha_{W_p}(G)$
1dc.64	10	10,0000	10,0000	1tc.256	63	63,3999	63,6538
1dc.128	16	16,4188	16,9743	1tc.512	110	113,4002	114,6800
1dc.256	30	30,0000	30,2265	1et.64	18	18,8000	19,0000
1dc.512	52	53,0307	53,3163	1et.128	28	29,2309	30,0000
2dc.128	5	5,2424	5,6000	1et.256	50	55,1148	57,0060
2dc.256	7	7,4618	7,8188	1et.512	100	104,4204	106,4000
2dc.512	11	11,7678	12,5479	1zc.128	18	20,6667	20,6667
1tc.64	20	20,0000	20,0000	1zc.256	36	38,0000	38,0000
1tc.128	38	38,0000	38,0000	1zc.512	62	68,7500	68,7500

Для сравнения в табл. 2 приведены числа Ловаса $\vartheta(G)$, которые для этих графов вычислены Брайаном Борчерсом (Brian Borchers) и в марте 2005 года размещены на сайте Н. Слоана. Из табл. 2 видно, что самый большой разрыв между оценкой $\alpha_{W_p}(G)$ и числом Ловаса $\vartheta(G)$ (чуть меньше двух единиц) оказался для графов 1et.256 и 1et.512. Для всех остальных графов этот разрыв меньше. А для всех графов серии 1zc, связанных с корректированием единичной ошибки в Z-канале, програма LPWSTAB нашла верхние оценки $\alpha_{W_p}(G)$ для максимального объема кода, которые в точности совпали с числами Ловаса. На нахождение оценки $\alpha_{W_p}(G)$ для графа 1zc.512 (включает 512 вершин и 13824 ребер) програма LPWSTAB затратила $t = 177,78$ сек на процессоре AMD Athlon 1,81GHz. При этом пришлось решать ЛП-задачу 10 раз и находить кратчайшие пути в ориентированном графе (содержит 1024 вершин и 54296 дуг) 10×512 раз. Количество накопленных неравенств в ЛП-задаче, исключая реберные неравенства, составило 1364 – из них 140 нечетных циклов, 1196 клик (получены как p-колеса на базе нечетных циклов C_3) и 28 p-колес.

Заключение. Вычислительные эксперименты с программой LPWSTAB для указанных графов показали, что алгоритм LPWSTAB(p,ε) характеризует сравнительно небольшое количество итераций (порядка нескольких десятков). Этому способствует групповое включение в ЛП-задачу нарушенных неравенств для нечетных циклов и p-колес в графе, что и гарантирует сравнительно небольшие затраты по времени при работе с графами, содержащими порядка нескольких сотен вершин. Однако, это порождает и некоторые проблемы, связанные с увеличением количества ограничений в ЛП-задаче. Поэтому, отсев лишних линейных ограничений в ЛП-задаче на каждой итерации алгоритма LPWSTAB(p,ε) только ускорит время нахождения оценки $\alpha_{W_p}(G)$, и является одним из резервов для разработки более быстрых реализаций LPWSTAB-программы. Вторым резервом улучшения программы является замена простейшего учета p-колес в графе G на более усовершенствованные схемы построения p-колес. Это может увеличить точность ЛП-ориентированных верхних оценок, но здесь сложно ожидать того эффекта, который наблюдается в случае перехода от нечетных циклов к p-колесам.

П.І. Стецюк, С.І. Бутенко, О.П. Лиховид

ЛП-ОРІЄНТОВАНА ВЕРХНЯ ОЦІНКА ДЛЯ ЧИСЛА СТІЙКОСТІ ГРАФА НА ОСНОВІ *P*-КОЛІС

Для числа стійкості неорієнтованого графа запропонована верхня оцінка, що базується на апроксимації багатогранника стійких множин за допомогою лінійних нерівностей для *p*-коліс у графі. Описано алгоритм знаходження ослабленої верхньої оцінки на основі розв’язку задачі лінійного програмування з скінченим числом обмежень-нерівностей, зв'язаних з непарними циклами і *p*-колесами в графі. Дано результати тестових експериментів для DIMACS-графів і графів, зв’язаних з максимальним об’ємом перешкодозахисних кодів.

P.I. Stetsyuk, S.I. Butenko, O.P. Lykhovyd

AN LP-ORIENTED UPPER BOUND FOR THE STABILITY NUMBER OF A GRAPH BASED ON *P*-WHEELS

An upper bound for the stability number of an undirected graph based on approximation of the polytope of stability sets by linear inequalities for *p*-wheels is proposed. An algorithm for finding a reduced upper bound on the base of solution of a linear programming problem with finite number of inequality constraints connected with odd cycles and *p*-wheels in a graph is described. The results of test experiments for DIMACS graphs and graphs connected with maximal volume of correcting codes are given.

1. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
2. *Grotschel M., Lovasz L., Schrijver A*. Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization. – Springer-Verlag, Berlin. – 1988. – 362 p.
3. *Cheng E. and Cunningham W.H.* Wheel inequalities for stable set polytopes // Math. Prog. – 1997. – Vol. 77 , N 3. – P. 389–421.
4. *Wunderling R.* Paralleler und objektorientierter Simplex-Algorithmus, Technische Universität Berlin, 1996. http://www.zib.de/Publications/abstracts/TR-96-09/
5. *Cherkassky B.V., Goldberg A.V., and Radzik T.* Shortest Paths Algorithms: Theory and Experimental Evaluation // Math. Prog. – 1996. – Vol. 73, N 3. – P. 129–174. http://www.avglab.com/andrew/soft.html
6. DIMACS. Cliques, coloring, and satisfiability: second DIMACS implementation challange. – 1995. http://dimacs.rutgers.edu/Challenges/
7. *Sloane N.* Challenge problems: Independent sets in graphs. – 2005. http://www.reseach.att.com/~njas/doc/graphs.html

Получено 11.03.2008