doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.055
УДК 539.3

В.Ф. Мейш, А.В. Павлюк

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: vfmeish@gmail.com

Чисельний розв’язок динамічних задач теорії тришарових циліндричних оболонок еліптичного перерізу з поперечним ребристим наповнювачем

Представлено членом-кореспондентом НАН України І.С. Чернишенком

Розглянуто тришарові циліндричні оболонки еліптичного поперечного перерізу з врахуванням поперечного дискретного ребристого наповнювача. Згідно з гіпотезами Тимошенка для оболонок і стержнів отримані відповідні рівняння коливань. При розв’язанні представлених крайових задач використана явна скінченно-різницева схема інтегрування рівнянь. В якості чисельного прикладу представлено розв’язок задачі про вимушені неосесиметричні коливання неоднорідної оболонкової структури при дії розподіленого нестаціонарного навантаження.

Ключові слова: *тришарова циліндрична оболонка, еліптичний переріз, теорія оболонок та ребер Тимошенка, вимушені коливання, чисельний розв’язок.*

Розглядаються тришарові циліндричні оболонки еліптичного поперечного перерізу з врахуванням поперечного дискретного ребристого наповнювача. Рівняння коливань наведені згідно з геометричною лінійною теорією оболонок та стержнів Тимошенка. Для розв’язку поставленої задачі використовується явна скінчено-різницева схема інтегрування вихідних диференціальних рівнянь. Представлено числовий приклад розв’язку задачі про вимушені коливання зазначеної неоднорідної оболонкової структури при дії розподіленого нестаціонарного навантаження.

Постановка задачі. Розглядається тришарова циліндрична оболонка еліптичного перерізу з дискретним поперечним заповнювачем при дії внутрішнього розподіленого нестаціонарного навантаження. Неоднорідна тришарова пружна структура представляє собою дві циліндричні оболонки еліптичного перерізу (внутрішня і зовнішня обшивки), які жорстко з’єднані між собою системою поперечних дискретних ребер. Схематичне уявлення вихідної конструкції представлено на рис. 1.

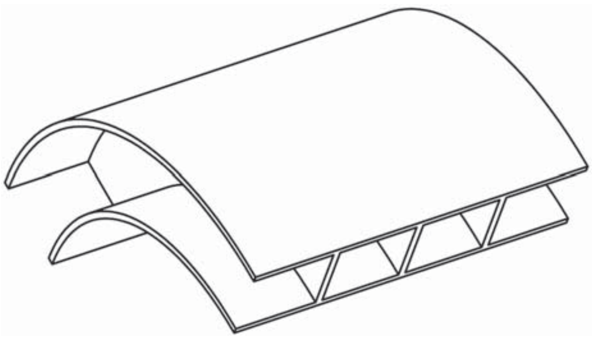

Рис. 1.

Коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни координатної поверхні вихідних оболонок приймаємо такими

$$A_1 = 1\,,\ k_2 = 0\,,$$

$$A_2 = (a_k^2 \cos^2 \alpha_2 + b_k^2 \sin^2 \alpha_2)^{1/2}\,,$$

$$k_2 = a_k b_k (a_k^2 \cos^2 \alpha_2 + b_k^2 \sin^2 \alpha_2)^{-3/2}\,, \tag{1}$$

$$k\!=\!1{,}2;$$

де a_k и b_k — півосі еліпса, який характеризує поперечний переріз відповідної циліндричної оболонки.

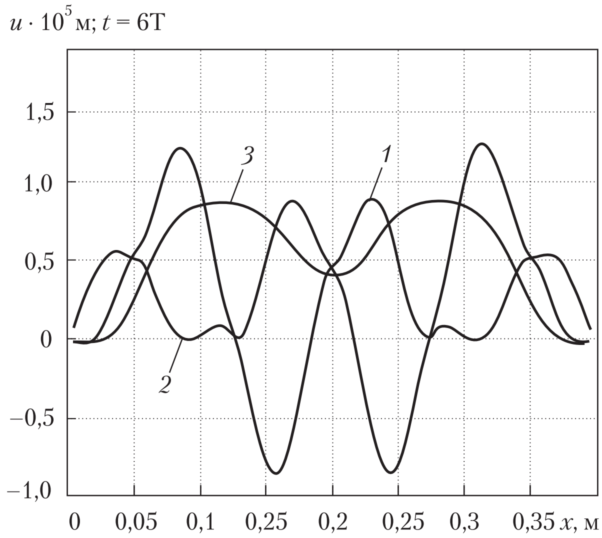

Рис. 2.

Прийнято, що деформований стан внутрішньої і зовнішньої обшивок (відповідно індекси 1 і 2) може бути визначено узагальненими векторами переміщень відповідних серединних поверхонь $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1)^T$ і $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_2^2, u_3^2, \varphi_1^2, \varphi_2^2)^T$. При розгляді елементів дискретного наповнювача покладається, що деформований стан поперечного j-го ребра може бути визначено узагальненим вектором переміщень $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$ [2, 3].

Для виведення рівнянь коливань тришарової пружною структури з дискретним наповнювачем використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона—Остроградського [2]. Після стандартних перетворень в варіаційному рівнянні, з врахуванням виразів для потенціальної і кінетичної енергій для обшивок і ребер згідно з [2, 3] отримуємо дві групи рівнянь. Рівняння коливань тришарової циліндричної оболонки еліптичного перерізу з врахуванням дискретності поперечного заповнювача записуються у вигляді:

для внутрішньої і зовнішньої обшивок

$$\frac{\partial T_{11}^k}{\partial s_1} + \frac{\partial S^k}{\partial s_2} = \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial t^2}\,; \frac{\partial S_k}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}^k}{\partial s_2} + k_2 T_{23}^k = \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial t^2}\,;$$

$$\frac{\partial T_{13}^k}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}^k}{\partial s_2} - k_2 T_{22}^k + P_3^k(s_1, s_2, t) = \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_3^k}{\partial t^2}\,; \quad \frac{\partial M_{11}^k}{\partial s_1} + \frac{\partial H^k}{\partial s_2} - T_{13}^k = \rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^k}{\partial t^2}\,; \tag{2}$$

$$\frac{\partial H^k}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}^k}{\partial s_2} - T_{23}^k = \rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2^k}{\partial t^2}; \quad k = 1, 2\,;$$

для j-го поперечного ребра

$$\frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2}+[T_{11}]j=\rho_j F_j\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\pm h_{cj}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2}+k_{2j}T_{23j}+[S]_j=\rho_j F_j\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\pm h_{cj}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{\partial T_{23j}}{\partial s_2}-k_{2j}T_{22j}+[T_{13}]_j=\rho_j F_j\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{21j}}{\partial s_2}\pm h_{cj}\frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2}+[M_{11}]_j=\rho_j F_j\left(\pm h_{cj}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\left(h_{cj}^2+\frac{I_{crj}}{F_j}\right)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{\partial M_{22j}}{\partial s_2}-T_{23j}\pm h_{cj}\left(\frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2}+k_{2j}T_{23j}\right)+[H]_j=$$

$$=\rho_j F_j\left(\pm h_{cj}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\left(h_{cj}^2+\frac{I_{2j}}{F_j}\right)\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}\right).$$

В рівняннях коливань дискретно підкріплюючих ребер (3) позначення типу $[S]_j$ відповідають сумарній дії величин зусиль — моментів гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу на j-е підкріплююче ребро.

Чисельний алгоритм. Побудова чисельного алгоритму базується на спільному використанні інтегро-інтерполяційного методу побудови різницевих схем по просторових координатах і явній скінченно-різницевій схемі інтегрування по часовій координаті t [2, 3]. Однією з особливостей задач коливань неоднорідних оболонок з врахуванням дискретного розташування ребер є наявність розривних коефіцієнтів у вихідних рівняннях. Чисельний розв'язок задач теорії тришарових циліндричних оболонок еліптичного перетину з врахуванням поперечного ребристого наповнювача зводиться до розгляду наступних етапів:

1) знаходження розв'язку в гладкій області для оболонок — рівняння (2);

2) знаходження розв'язку на лінії розриву вздовж осі Оy для j-го ребра — рівняння (3).

Числові результати. Як частковий випадок тришарової циліндричної оболонки еліптичного перерізу розглядається задача про вимушені коливання тришарових циліндричних оболонок поперечного кругового перерізу з поперечним дискретним наповнювачем при внутрішньо розподіленому імпульсному навантаженні. Покладаються умови жорсткого защемлення країв вихідної конструкції.

Задача коливань тришарової циліндричної оболонки згідно з вказаними теоріями розглядалася при наступних геометричних та фізико–механічних параметрах: $L/h_1=40$; $h_1=h_2$; $R_1/h_1=10$; $H_j/h_1=2$; $F_j=H_j h_1$; $E_1^1=E_1^2=E_j=7\cdot10^{10}$ Па; $\nu_1^1=\nu_1^2=0{,}3$; $\rho_1=\rho_2=\rho_j=$ $=2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3.

Нормальне імпульсне навантаження задавали у вигляді

$$P_3=A\sin\frac{\pi t}{T}[\eta(t)-\eta(t-T)],$$

де A — амплітуда навантаження; T — тривалість навантаження.

В розрахунках покладалося $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с. Підкріплюючі елементи розташовані в точках $x_j = [11 + (k-1) \cdot 15]\Delta x$, $k = 1 \div 5$, $\Delta x = L / 80$.

Отримані чисельні результати дозволяють характеризувати напружено-деформований стан тришарової пружної структури циліндричного типу в будь-який момент часу на досліджуваному часовому інтервалі згідно з вищевказаними постановками. Розрахунки проводили в інтервалі часу $0 \leqslant t \leqslant 40T$. Зокрема, на рис.2 наведена залежність величини прогину u_3 від просторової координати x в моменти часу $t = 6T$ (в цей момент величина u_3 досягає максимального значення в інтервалі розрахунку за часом t).

Криві *1* та *2* відповідають теорії з дискретним розміщенням ребер, відповідно внутрішній та зовнішній шар, крива *3* – конструктивно–ортотропній теорії тришарових оболонок з наповнювачем. Згідно приведених чисельних даних спостерігається якісна і кількісна різниця в отриманих результатах. Врахування дискретності розміщення ребер (на рисунках це точки з'єднання кривих з індексом 1 і 2) приводить до більш густого хвилеутворення величини u_3 по довжині конструкції. Розрахунки згідно конструктивно – ортотропної моделі дають деякі інтегральні криві, які знаходяться в межах зміни величини u_3 внутрішнього і зовнішнього шарів згідно теорії з врахуванням дискретності ребер.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. Москва: Машиностроение, 1980. 376 с.
2. Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. Под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. Киев: Изд.-полиграф. центр "Киевский ун-т", 2012. 541 с.
3. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель С.Э. Вынужденные нестационарные колебания трехслойной цилиндрической оболочки с продольно поперечным дискретным ребристым наполнителем. *Прикл. механика*. 2005. **41**, № 2. С. 60—67.

Надійшло до редакції 21.03.2017

REFERENCES

1. Bolotin, V. V. & Novichkov, Yu. N. (1980). The mechanics of multilayered structures, Moscow: Engineering (in Russian).
2. Golovko, K. G., Lugovoi, P. Z. & Meish, V. F. (2012). Dynamics of inhomogeneous shells under nonstationary loads. (Ed. Guz A.N.). Kyiv: Publ. Centre "Kyiv University" (in Russian).
3. Lugovoi, P. Z, Meish, V. F. & Shtantsel, S. E. (2005). Forced Non-Stationary Vibrations of Three-Layered Cylindrical Shell with Longitudinal-Transverse Discrete Ribbed Filler. Int. Appl. Mechanics. 41, No. 2, pp. 161-168.

Received 21.03.2017

В.Ф. Мейш, А.В. Павлюк

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: vfmeish@gmail.com

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ РЕБРИСТЫМ НАПОЛНИТЕЛЕМ

Рассмотрены трехслойные цилиндрические оболочки эллиптического сечения с учетом поперечного дискретного ребристого наполнителя. Согласно гипотезам Тимошенко для оболочек и стержней получены соответствующие уравнения колебаний. При решении конкретных краевых задач использована явная конечноразностная схема интегрирования уравнений. В качестве численного примера представлено решение задачи о вынужденных неосесимметричных колебаниях неоднородной оболочечной структуры при действии распределенной нестационарного нагрузки.

Ключевые слова: *трехслойная цилиндрическая оболочка, эллиптическое сечение, теория оболочек и стержней Тимошенко, вынужденные колебания, численное решение.*

V.F. Meish, A.V. Pavlyuk

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: vfmeish@gmail.com

NUMERICAL SOLUTION OF DYNAMIC PROBLEMS OF THE THEORY OF THREE-LAYER CYLINDRICAL SHELLS OF ELLIPTIC CROSS-SECTION WITH TRANSVERSE RIBBED FILLER

The three-layer cylindrical shells with elliptic cross-section with regard for a cross-ribbed discrete filler are studied. According to the Timoshenko hypothesis for shells and ribs, the corresponding wave equation is deduced. In the solution of the specific boundary-value problems, an explicit finite-difference scheme of integration of the equations is used. As a numerical example, a solution of the problem of forced oscillations of a not axisymmetric heterogeneous shell structure under the action of a distributed unsteady load is given.

Keywords: *three-layer cylindrical shell, elliptical cross-section, Timoshenko theory of shells and rods, forced vibrations, numerical solution.*