УДК 519.21

К.Г. ДЗЮБЕНКО

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИОНАЛА ОТ ИСТОРИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА И НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Доказано, что измеримость случайного процесса относительно фильтрации, порождённой вторым случайным процессом, равносильна его представлению как семейства борелевских функционалов от истории второго процесса. Получены дифференциальное представление для аддитивного функционала без последействия от истории случайного процесса, необходимое условие экстремума для этого функционала.

Функционалы от совокупности значений случайного процесса на интервале времени рассматривались неоднократно. Упомянем условия существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения с коэффициентами, зависящими от прошлого ([1]), исследования в области управляемых случайных процессов ([2]). Зависимость функционалов от истории процесса рассматривалась с целью обобщения результатов, известных для функций момента времени, но не всегда использовалась как качественно новая возможность.

Главная цель работы – получение дифференциального представления для функционалов от истории случайного процесса, на основе свойств отсутствия последействия и аддитивности. Установлена связь между измеримостью процесса относительно порождённой фильтрации – и функционалами от истории. В заключение работы доказано необходимое условие экстремума для функционала от истории процесса.

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, на котором заданы все рассматриваемые случайные объекты. N и R обозначают множества всех натуральных и вещественных чисел соответственно. $I_A(x)$ – индикаторная функция множества A (равна 1 при $x \in A$, 0 – в противном случае).

В данной работе понятие «случайный процесс» без дополнительной информации означает случайный процесс с вещественными значениями. Сокращение «п.н.» означает «почти наверное».

Определение 1. Пусть $X(s)$, $s \in [0,+\infty)$, – случайный процесс. Для каждого $t \in [0,+\infty)$ *история процесса* $X(s)$ *к моменту* t – это случайная функция $X_0^t(\cdot):[0,+\infty) \to R$, определяемая соотношением:

$$X_0^t(s) = X(s)\, I_{[0,t]}(s) + X(t)\, I_{(t,+\infty)}(s),\ s \in [0,+\infty).$$

Пусть $\mathrm{B}(R)$ – σ-алгебра борелевских множеств в R, порожденных дополнениями и счетными объединениями открытых множеств из R; $R^{[0,+\infty)}$ – множество всех функций из $[0,+\infty)$ в R. Борелевская σ-алгебра $\mathrm{B}(R^{[0,+\infty)})$ определяется как минимальная σ-алгебра, порожденная системой цилиндрических множеств

$$CL = \left\{B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n} : B_{t_k} \in \mathrm{B}(R), t_k \in [0,+\infty), k = \overline{1,n}, n \in N\right\}.$$

Теорема 1. Пусть $X(s)$, $s \in [0,+\infty)$, – случайный процесс. Тогда история $X_0^t(\cdot)$, $t \in [0,+\infty)$, является $R^{[0,+\infty)}$ – значным случайным процессом.

Доказательство. Утверждение означает, что для любого $t \in [0,+\infty)$ и любого $D \in \mathrm{B}(R^{[0,+\infty)})$ выполнено $\{\omega : X_0^t(\cdot) \in D\} \in F$. Свойство имеет место для всех $D = B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n} \in CL$, где $B_{t_k} \in \mathrm{B}(R)$, $t_k \in [0,+\infty)$, $k = \overline{1,n}$, $n \in N$:

$$\{\omega : X_0^t(\cdot) \in B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{\omega : X(\min(t_k, t)) \in B_{t_k}\} \in F.$$

Ведь $\{\omega : X(s) \in B\} \in F$, $B \in \mathrm{B}(R)$, $s \in [0,+\infty)$, по определению случайного процесса. Свойство сохраняется при взятии дополнений множеств и их счетных объединений. Поскольку $\mathrm{B}(R^{[0,+\infty)})$ является σ-алгеброй, порожденной системой CL, то требуемое свойство выполнено и для всех множеств из $\mathrm{B}(R^{[0,+\infty)})$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $X(s)$, $s \in [0,+\infty)$, – случайный процесс, и функция $f(t,y):[0,+\infty) \times R^{[0,+\infty)} \to R$ $\mathrm{B}(R^{[0,+\infty)})$ – измерима при каждом $t \in [0,+\infty)$. Тогда $f(t, X_0^t(\cdot))$, $t \in [0,+\infty)$, является случайным процессом.

Пусть задана фильтрация $F_t = \sigma[X(s), s \in [0,t]]$, $t \in [0,+\infty)$. Следующая теорема устанавливает эквивалентность между F_t – согласованными случайными функциями и борелевскими функционалами от истории процесса $X(t)$.

Теорема 2. Пусть $X(s)$, $s \in [0,+\infty)$, – случайный процесс. Случайная функция $Y(t)$, $t \in [0,+\infty)$, измерима относительно $\sigma[X(s), s \in [0,t]]$ при каждом $t \in [0,+\infty)$ тогда и только тогда, когда существует функция $f(t,y):[0,+\infty) \times R^{[0,+\infty)} \to R$ такая, что:

1) $f(t,\cdot)$ является $\mathrm{B}(R^{[0,+\infty)})$ – измеримой при каждом $t\in[0,+\infty)$;

2) $Y(t)=f(t,X_0^t(\cdot))$ для всех $t\in[0,+\infty)$ и всех $\omega\in\Omega$.

Доказательство. Пусть $t\in[0,+\infty)$ – произвольно. Рассмотрим σ-алгебры $F_t=\sigma[X(s),s\in[0,t]]$ и $\sigma[X_0^t(\cdot)]=\{\{\omega: X_0^t(\cdot)\in D\}, D\in \mathrm{B}(R^{[0,+\infty)})\}$. Покажем, что $F_t=\sigma[X_0^t(\cdot)]$. Эти две σ-алгебры порождены соответственно совокупностями событий:

$$\left\{\left\{\omega: X(t_k)\in B_{t_k},\ k=\overline{1,n}\right\}, B_{t_k}\in \mathrm{B}(R),\ t_k\in[0,t],\ k=\overline{1,n},\ n\in N\right\},$$

$$\left\{\left\{\omega: X_0^t(t_k)\in B_{t_k},\ k=\overline{1,n}\right\}, B_{t_k}\in \mathrm{B}(R),\ t_k\in[0,+\infty),\ k=\overline{1,n},\ n\in N\right\}.$$

В силу того, что $X_0^t(s)=X(s)$, $s\in[0,t)$, и $X_0^t(s)=X(t)$, $s\in[t,+\infty)$, данные совокупности совпадают. Поэтому совпадают и порождённые ими σ-алгебры.

Теперь достаточность в утверждении теоремы следует из соотношений $\{\omega: Y(t)\in B\}=\{\omega: X_0^t(\cdot)\in f(t,\cdot)^{-1}(B)\}\in\sigma\{X_0^t(\cdot)\}=F_t$, $B\in \mathrm{B}(R)$. Необходимость может быть установлена аналогично соответствующему факту для двух вещественнозначных случайных величин ξ и η: ξ измерима относительно σ-алгебры, порождённой η, тогда и только тогда, когда существует неслучайная $\mathrm{B}(R)$ – измеримая функция $\varphi(\cdot)$ такая, что $\xi(\omega)=\varphi(\eta(\omega))$ для всех $\omega\in\Omega$ ([3], с. 219). Доказательство из [3] может быть повторено с заменой $\mathrm{B}(R)$ на $\mathrm{B}(R^{[0,+\infty)})$. Тогда измеримость случайной величины $Y(t)$ по отношению к $F_t=\sigma[X_0^t(\cdot)]$ влечет существование $\mathrm{B}(R^{[0,+\infty)})$ – измеримой функции $f(t,\cdot)$ с требуемыми свойствами. Теорема доказана.

В общем случае $f(t,X_0^t(\cdot))$ – это случайная функция, которая зависит от значений процесса $X(\cdot)$ в моменты вплоть до t, но она может не быть ни F_t - измеримой, ни F - измеримой при $t\in[0,+\infty)$.

Легко убедиться, что утверждения теорем 1, 2 и следствия выполнены при замене $[0,+\infty)$ на $[0,T]$, где $T\in(0,+\infty)$.

Определение 2. Пусть $t_0\in R$, $\varepsilon>0$. Вещественнозначная случайная функция $Y(t)$, $t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$, считается *бесконечно малой при* $t\to t_0$ *п.н.* по отношению к вещественнозначной случайной функции $Z(t)$,

$t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, (обозначается $Y(t) = o(Z(t))$, $t \to t_0$ п.н.), если существует случайная функция $V(t)$, $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, такая, что:

1) $Y(t) = V(t)Z(t)$, $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ п.н.;

2) $V(t) \to 0$, $t \to t_0$ п.н.

Если случайная функция $V(t)$ задана лишь п.н. при каждом $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ (для $\omega \in \Omega_t \in F$, $P(\Omega_t) = 1$), то $\lim\limits_{t \to t_0} V(t) = 0$ п.н. понимается в том смысле, что для любой последовательности t_n, $n \in N$, такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = t_0$, выполнено $\lim\limits_{n \to \infty} V(t_n) = 0$ п.н. Эта сходимость имеет место на подмножестве события $\bigcap\limits_{n \geq 1} \Omega_{t_n}$, имеющего вероятность 1.

Множество S будем называть **аддитивным пространством,** если оно является коммутативной группой по отношению к операции сложения. Функционал $h(\cdot): S \to R$ **аддитивен** если $h(y_1 + y_2) = h(y_1) + h(y_2)$ для всех $y_1, y_2 \in S$.

Определение 3. Пусть $T \in (0, +\infty)$, $S \subset R^{[0,T]}$. $f(t,x): [0,T] \times S \to R$ называется *функционалом без последействия*, если для любой функции $Y(\cdot) \in S$ и для любого момента $t \in [0,T]$:

1) $Y(\cdot) I_{[0,t]}(\cdot) \in S$;

2) $f(t, Y(\cdot) I_{[0,t]}(\cdot)) = f(t, Y(\cdot))$.

Следствием такого определения является тождество:

$f(t, Y(\cdot)) = f(t, Y_0^t(\cdot))$, $t \in [0,T]$, $Y(\cdot) \in S$.

Следующая теорема дает дифференциальное представление для функционала от истории случайного процесса. Отметим, что условия теоремы 3 не требуют, чтобы функционал $f(t,y)$ был линеен, непрерывен или измерим по y: свойства, повсеместно не выполненные или труднопроверяемые.

Теорема 3. Пусть $T \in (0, +\infty)$, $t_0 \in [0,T)$, и выполнены условия:

1) $f(t,y): [0,T] \times S \to R$ − функционал, аддитивный по y для каждого $t \in [0,T]$, где $S \subset R^{[0,T]}$ − аддитивное пространство;

2) $f(t,y)$ − функционал без последействия;

3) $X(s)$, $s \in [0,T]$, − случайный процесс, непрерывный в t_0 п.н.;

4) $X_0^t(\cdot) \in S$ п.н., $t \in [0,T]$;

5) $a I_{\{t\}}(\cdot) \in S$, $t \in [0,T]$, $a \in R$;

6) $\left.\dfrac{\partial f(t, aI_{\{t\}}(\cdot))}{\partial a}\right|_{a=0}$ существует в окрестности t_0 и непрерывна в t_0;

7) $f'_{t+}(t, X_0^t(\cdot)) = \lim\limits_{\Delta t \to 0+} \dfrac{f(t+\Delta t, X_0^t(\cdot)) - f(t, X_0^t(\cdot))}{\Delta t}$ п.н. существует в левой окрестности t_0 и п.н. непрерывна в t_0 слева;

8) $f(t_0+\Delta t, [X(\cdot) - X(t_0)]I_{(t_0, t_0+\Delta t)}(\cdot)) = o(\Delta t) + o(\Delta X(t_0))$, $\Delta t \to 0+$ п.н.;

9) $f(t_0, [X(t_0+\Delta t) - X(\cdot)]I_{(t_0+\Delta t, t_0)}(\cdot)) = o(\Delta t) + o(\Delta X(t_0))$, $\Delta t \to 0-$ п.н.

Тогда

$$f(t_0+\Delta t, X(\cdot)) - f(t_0, X(\cdot)) =$$
$$= f'_{t+}(t_0, X_0^{t_0}(\cdot))\Delta t + \left.\frac{\partial f(t_0, aI_{\{t_0\}}(\cdot))}{\partial a}\right|_{a=0} \Delta X(t_0) +$$
$$+ o(\Delta t) + o(\Delta X(t_0)), \Delta t \to 0 \text{ п.н.},$$

где $\Delta X(t_0) = X(t_0+\Delta t) - X(t_0)$.

Доказательство. Для заданного $\Delta t \in [-t_0, T - t_0]$ положим $\Delta X_0^{t_0}(\cdot) = X_0^{t_0+\Delta t}(\cdot) - X_0^{t_0}(\cdot)$. Тогда для любого $s \in [0, T]$:

$$\Delta X_0^{t_0}(s) = \begin{cases} [X(s) - X(t_0)]I_{(t_0, t_0+\Delta t]}(s) + \Delta X(t_0) I_{(t_0+\Delta t, T]}(s), \ \Delta t \ge 0; \\ [X(t_0+\Delta t) - X(s)]I_{(t_0+\Delta t, t_0]}(s) + \Delta X(t_0) I_{(t_0, T]}(s), \ \Delta t < 0. \end{cases}$$

Благодаря 1) и 4) $f(t, \Delta X_0^{t_0}(\cdot)) = f(t, X_0^{t_0+\Delta t}(\cdot)) - f(t, X_0^{t_0}(\cdot))$ задано п.н. для каждого $t \in [0, T]$. Обозначим $B(t) = \left.\dfrac{\partial f(t, aI_{\{t\}}(\cdot))}{\partial a}\right|_{a=0}$ (задана в той окрестности t_0, где данная производная существует).

При условиях 1) – 8) для любого $\Delta t \in (0, T - t_0]$:

$$f(t_0+\Delta t, X_0^{t_0+\Delta t}(\cdot)) - f(t_0, X_0^{t_0}(\cdot)) =$$
$$= f(t_0+\Delta t, X_0^{t_0}(\cdot) + \Delta X_0^{t_0}(\cdot)) - f(t_0+\Delta t, X_0^{t_0}(\cdot)) +$$
$$+ f(t_0+\Delta t, X_0^{t_0}(\cdot)) - f(t_0, X_0^{t_0}(\cdot)) = f(t_0+\Delta t, \Delta X_0^{t_0}(\cdot)) +$$
$$+ f'_{t+}(t_0, X_0^{t_0}(\cdot))\Delta t + o(\Delta t) = f(t_0+\Delta t, [X(\cdot) - X(t_0)]I_{(t_0, t_0+\Delta t)}(\cdot)) +$$
$$+ f(t_0+\Delta t, [X(t_0+\Delta t) - X(t_0)]I_{\{t_0+\Delta t_0\}}(\cdot)) + f'_{t+}(t_0, X_0^{t_0}(\cdot))\Delta t + o(\Delta t) =$$
$$= o(\Delta t) + o(\Delta X(t_0)) + B(t_0+\Delta t)\Delta X(t_0) + o(\Delta X(t_0)) +$$
$$+ f'_{t+}(t_0, X_0^{t_0}(\cdot))\Delta t + o(\Delta t) = f'_{t+}(t_0, X_0^{t_0}(\cdot))\Delta t + \big(B(t_0) + o(1)\big)\Delta X(t_0) +$$

$$+o(\Delta t)+o(\Delta X(t_0)) = f'_{t+}(t_0, X_0^{t_0}(\cdot))\Delta t + B(t_0)\ \Delta X(t_0) +$$
$$+ o(\Delta t) + o(\Delta X(t_0)),\ \Delta t \to 0+ \text{ п.н.}$$

При условиях 1) – 7), 9) для любого $\Delta t \in [-t_0, 0)$:

$$f(t_0+\Delta t, X_0^{t_0+\Delta t}(\cdot)) - f(t_0, X_0^{t_0}(\cdot)) = f(t_0+\Delta t, X_0^{t_0+\Delta t}(\cdot)) - f(t_0, X_0^{t_0+\Delta t}(\cdot)) +$$
$$+ f(t_0, X_0^{t_0+\Delta t}(\cdot)) - f(t_0, X_0^{t_0}(\cdot)) =$$
$$= -(f(t_0+\Delta t+(-\Delta t), X_0^{t_0+\Delta t}(\cdot)) - f(t_0+\Delta t, X_0^{t_0+\Delta t}(\cdot))) + f(t_0, \Delta X_0^{t_0}(\cdot)) =$$
$$= -(f'_{t+}(t_0, X_0^{t_0}(\cdot))(-\Delta t) + o(-\Delta t)) + f(t_0, [X(t_0+\Delta t) - X(\cdot)]I_{(t_0+\Delta t, t_0)}(\cdot)) +$$
$$+ f(t_0, [X(t_0+\Delta t) - X(t_0)]I_{\{t_0\}}(\cdot)) = f'_{t+}(t_0, X_0^{t_0}(\cdot))\Delta t + o(\Delta t) +$$
$$+ o(\Delta t) + o(\Delta X(t_0)) + B(t_0)\ \Delta X(t_0) + o(\Delta X(t_0)) =$$
$$= f'_{t+}(t_0, X_0^{t_0}(\cdot))\Delta t + B(t_0)\ \Delta X(t_0) + o(\Delta t) + o(\Delta X(t_0)),\ \Delta t \to 0- \text{ п.н.}$$

Поясним, что вследствие условия 7) выполнены равенства

$$\lim_{\Delta t \to 0-} \lim_{u \to 0+} \frac{f(t_0+\Delta t+u, X_0^{t_0+\Delta t}(\cdot)) - f(t_0+\Delta t, X_0^{t_0+\Delta t}(\cdot))}{u} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0-} f'_{t+}(t_0+\Delta t, X_0^{t_0+\Delta t}(\cdot)) = f'_{t+}(t_0, X_0^{t_0}(\cdot)) \text{ п.н.}$$

Полагая $u = -\Delta t$, получаем

$$\lim_{\Delta t \to 0-} \frac{f(t_0+\Delta t+(-\Delta t), X_0^{t_0+\Delta t}(\cdot)) - f(t_0+\Delta t, X_0^{t_0+\Delta t}(\cdot))}{-\Delta t} = f'_{t+}(t_0, X_0^{t_0}(\cdot)) \text{ п.н.}$$

Теорема доказана.

Замечание. Существование левой производной рассматриваемого функционала от истории процесса трудно гарантировать. Например, в случае функционала $f(t, w(\cdot)) = \int_0^t dw(s) = w(t)$, $t \in [0, T]$, где $w(t)$ – винеровский процесс, $f'_{t-}(t, w_0^t(\cdot)) = \lim_{\Delta t \to 0-} \dfrac{w(t+\Delta t) - w(t)}{\Delta t}$ не существует ни п.н., ни по вероятности. При этом п.н. выполнены равенства

$$f'_{t+}(t, w_0^t(\cdot)) = \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{f(t+\Delta t, w_0^t(\cdot)) - f(t, w_0^t(\cdot))}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{\int_0^{t+\Delta t} dw_0^t(s) - \int_0^t dw_0^t(s)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{w(t) - w(t)}{\Delta t} = 0.$$

Пример. $f(t,X(\cdot)) = \int_0^t g(t,s)dX(s)$, $t \in [0,T]$, где $T \in (0,+\infty)$, случайный процесс $X(s)$ монотонен п.н. на $[0,T]$ и непрерывен п.н. в $t_0 \in [0,T)$, а $g(t,s)$ и $g_t^{'}(t,s)$ непрерывны на $[0,T]^2$. Проверка выполнения условий теоремы 3 проводится без особых трудностей. В качестве аддитивного пространства S достаточно взять множество всех функций ограниченной вариации на $[0,T]$. Для всех $t \in [0,T)$ имеют место равенства:

$$f_{t+}^{'}(t,X_0^t(\cdot)) = \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_0^{t+\Delta t} g(t+\Delta t,s)dX_0^t(s) - \int_0^t g(t,s)dX_0^t(s)\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0+} \int_0^t \frac{g(t+\Delta t,s)-g(t,s)}{\Delta t}dX(s) = \int_0^t g_t^{'}(t,s)dX(s) \text{ п.н.}$$

(п.н. выполнена теорема об ограниченной сходимости под знаком интеграла Лебега – Стилтьеса). Также для всех $t \in [0,T]$:

$$\left.\frac{\partial f(t,aI_{\{t\}}(\cdot))}{\partial a}\right|_{a=0} = \left.\frac{\partial}{\partial a}\left[\int_0^t g(t,s)d(aI_{\{t\}}(\cdot))\right]\right|_{a=0} = \left.\frac{\partial}{\partial a}\left[ag(t,t)\right]\right|_{a=0} = g(t,t).$$

Дифференциальное представление принимает вид

$$\int_0^{t_0+\Delta t} g(t_0+\Delta t,s)dX(s) - \int_0^{t_0} g(t_0,s)dX(s) =$$

$$= \left(\int_0^{t_0} g_t^{'}(t_0,s)dX(s)\right)\Delta t + g(t_0,t_0)\ \Delta X(t_0) + o(\Delta t) + o(\Delta X(t_0)),\ \Delta t \to 0 \text{ п.н.}$$

Близкое утверждение для случая, когда $X(s)$ п.н. имеет ограниченную вариацию на $[0,T]$, может быть получено разложением процесса в разность п.н. неубывающих функций и вычитанием соответствующих дифференциалов для интегралов по этим функциям. Доказательство дифференциального представления в случае квадратично интегрируемого мартингала существенно более сложно, для него недостаточно пространства данной публикации. В заключение статьи приведём необходимое условие экстремума функционала, основанное на представлении теоремы 3.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3, производная $X^{'}(t_0)$ существует п.н., t_0 – локальный экстремум п.н. для $f(t,X(\cdot))$. Тогда

$$f_{t+}^{'}(t_0,X_0^{t_0}(\cdot)) + \left.\frac{\partial f(t_0,aI_{\{t_0\}}(\cdot))}{\partial a}\right|_{a=0} X^{'}(t_0) = 0 \text{ п.н.}$$

Доказательство. В условиях теоремы

$$\Delta f(t_0, X(\cdot)) = f(t_0 + \Delta t, X(\cdot)) - f(t_0, X(\cdot)) =$$

$$= \left[f'_{t+}(t_0, X_0^{t_0}(\cdot)) + \left.\frac{\partial f(t_0, aI_{\{t_0\}}(\cdot))}{\partial a}\right|_{a=0} X'(t_0) \right] \Delta t + o(\Delta t),\ \Delta t \to 0 \text{ п.н.}$$

Предположение о том, что выражение в скобках больше нуля (меньше нуля) с положительной вероятностью влечёт смену знаков $\Delta f(t_0, X(\cdot))$ в окрестности точки t_0 с положительной вероятностью. Это противоречит тому, что t_0 – локальный экстремум п.н. Следовательно, выражение в квадратных скобках равно нулю п.н. Теорема доказана.

Утверждения теорем 3 и 4 являются качественно новыми даже в случае детерминированного базового процесса. Полученные результаты важны для изучения систем без последействия и при решении задач оптимизации. Они показывают, что дифференциал функционала, в предположениях отсутствия последействия и аддитивности, имеет специальную форму, которая может быть использована при моделировании.

К.Г. Дзюбенко

ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІОНАЛУ ВІД ІСТОРІЇ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ТА НЕОБХІДНА УМОВА ЕКСТРЕМУМУ

Доведено, що вимірність випадкового процесу щодо фільтрації, породженої другим процесом, рівносильна його представленню як сімейства борелевських функціоналів від історії другого процесу. Отримані диференційне представлення для адитивного функціоналу без післядії від історії випадкового процесу, необхідна умова екстремуму для цього функціоналу.

K.G. Dziubenko

DIFFERENTIAL FOR A FUNCTIONAL OF A RANDOM PROCESS HISTORY AND A NECESSARY CONDITION OF EXTREMUM

It is proved that measurability of random process relatively to filtration, generated by another random process, is equivalent to its representation as a family of Borel functionals of the other process history. Differential representation is obtained for an additive functional without after-action of random process history, as well as necessary condition for extremum of such a functional.

1. *Fleming W.H., Nisio M.* On the existence of optimal stochastic controls // J. of Mathematics and Mechanics, 1966. – **15.** – N 5. – P. 777 – 794.
2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Управляемые случайные процессы. – Киев: Наук. думка, 1977. – 252 с.
3. *Ширяев А.Н.* Вероятность. – М.: МЦНМО, 2004. – 928 с.

Получено 27.03.2008