

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.07.018>

УДК 512.542

О.О. Пипка, Д.Ю. Стороженко

Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара

E-mail: pyrka@ua.fm

Про деякі типи пропереставних підгруп та їх узагальнень в скінченних групах

Представлено членом-кореспондентом НАН України В.П. Моторним

Знайдено деякі специфічні приклади пропереставних та S -пропереставних підгруп в скінченних групах. Зокрема, дано твердну відповідь на питання 18.91 (а) з Коурівського зошита.

Ключові слова: *скінченна група, пропереставна підгрупа, S -пропереставна підгрупа.*

Одним з найбільш розвинених розділів в теорії груп (як скінченних, так і нескінченних) є дослідження впливу тих чи інших систем підгруп на структуру всієї групи. На сьогоднішній день існує величезна кількість статей та монографій, присвячених цьому напряму досліджень. Першим кроком тут було дослідження скінченних груп, всі підгрупи яких нормальні. Опис таких груп отримав Р. Дедекінд ще у 1897 р. в своїй вже класичній статті [1]. Згодом почали з'являтися аналогічні результати, в яких умова нормальності всіх підгруп замінювалась на більш слабкі умови. Зокрема, розглядалися такі узагальнення нормальних підгруп, як субнормальні підгрупи, переставні підгрупи, пронормальні підгрупи та багато інших.

Нагадаємо, що підгрупи H та K групи G називаються переставними, якщо $HK = KH$. Підгрупу H групи G будемо називати переставною в G , якщо вона переставна з будь-якою підгрупою групи G . Очевидно, що переставні підгрупи є природним узагальненням нормальних підгруп. Переставні підгрупи мають досить цікаві властивості, серед яких можна виділити таку: будь-яка переставна підгрупа скінченної групи G субнормальна в G [2].

Нещодавно було введено до розгляду новий тип підгруп, який є узагальненням не лише нормальних підгруп, а й переставних.

Означення 1. Нехай G — група. Будемо говорити, що підгрупа H групи G пропереставна в G , якщо існує така підгрупа B групи G , що виконується рівність $G = N_G(H)B$, а підгрупа H переставна з будь-якою підгрупою з B [3].

Як зазначено вище, кожна переставна в G підгрупа є пропереставною в групі G . Дійсно, нехай G — група, H — переставна в G підгрупа. Тоді в означенні пропереставної підгрупи у якості підгрупи B можна взяти всю групу G , що тягне за собою очевидну рівність $G = N_G(H)G$. А оскільки за умовою підгрупа H переставна в G , то ми отримуємо, що H пропереставна в G .

© О.О. Пипка, Д.Ю. Стороженко, 2017

Ми не будемо детально зупинятись на результатах роботи [3], оскільки це потребує формулювання значної кількості додаткових специфічних означень, і не є основною метою даної статті. Відразу перейдемо до питання 18.91 (а) з Коурівського зошита [4], яке стосується пропереставних підгруп:

*чи існує скінченна група G з підгрупами $A \leq B \leq G$,
для якої A пропереставна в G , але A не пропереставна в B ?*

Авторами було отримано ствердну відповідь на це питання. За допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP було знайдено відповідний приклад, який наведений нижче.

Приклад 1. Нехай $G = ((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$ (в бібліотеці GAP – SmallGroup (32,6)). Тут C_p позначає циклічну групу порядку p . Група G містить такі підгрупи $A \leq B \leq G$, що $A \cong C_2$, $B \cong (C_4 \times C_2) \rtimes C_2$, і при цьому A пропереставна в G , але A не пропереставна в B .

Також у роботі [3] було введено до розгляду природне узагальнення пропереставних підгруп.

Означення 2. Нехай G – група. Будемо говорити, що підгрупа H групи G S -пропереставна в G , якщо існує така підгрупа B групи G , що виконується рівність $G = N_G(H)B$, а підгрупа H переставна з будь-якою силовською підгрупою з B .

Зазначимо, що це узагальнення пропереставних підгруп не є тривіальним. Відповідний приклад S -пропереставної підгрупи, яка не є пропереставною, можна знайти в роботі [5].

Для S -пропереставних підгруп можна також сформулювати аналогічну до питання 18.91 (а) з Коурівського зошита задачу:

*чи існує скінченна група G з підгрупами $A \leq B \leq G$,
для якої A S -пропереставна в G , але A не S -пропереставна в B ?*

Для цього питання також було отримано ствердну відповідь.

Приклад 2. Нехай $G = ((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2$ (в бібліотеці GAP – SmallGroup (54,5)). Ця група містить такі підгрупи $A \leq B \leq G$, що $A \cong C_3$, $B \cong C_3 \times S_3$, і при цьому A S -пропереставна в G , але A не S -пропереставна в B . Тут S_3 позначає симетричну групу 3-го ступеня.

Також було розглянуто ще одне питання, що пов'язане з пропереставними та S -пропереставними підгрупами. Воно базується на понятті транзитивності. Досить часто в групах транзитивність деяких теоретико-групових властивостей не виконується. Тому, зважаючи до того ж на позитивну відповідь на питання 18.91 (а) з Коурівського зошита, досить природно розглянути таку задачу:

*чи існує скінченна група G з підгрупами $A \leq B \leq G$, для якої A пропереставна в B ,
 B пропереставна в G , але A не пропереставна в G ?*

Також ми можемо сформулювати аналогічне питання і для S -пропереставних підгруп:

*чи існує скінченна група G з підгрупами $A \leq B \leq G$, для якої A S -пропереставна в B ,
 B S -пропереставна в G , але A не S -пропереставна в G ?*

На обидва ці питання було також отримано ствердні відповіді, що ілюструє такий приклад.

Приклад 3. Нехай $G = A_4$ – знакозмінна група порядку 12. Ця група містить такі підгрупи $A \leq B \leq G$, що $A \cong C_2$, $B \cong C_2 \times C_2$, і при цьому A пропереставна в B , B пропереставна в G , але A не пропереставна в G . Більше того, ці підгрупи є одночасно і прикладом відповіді на останнє питання. Тобто підгрупа A S -пропереставна в B , B S -пропереставна в G , але A не S -пропереставна в G .

Наостанок зазначимо, що всі наведені приклади далеко не єдині і є мінімальним за порядком прикладами для задач, що були розглянуті.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Dedekind R. Ueber Gruppen, deren sämtliche Theiler Normaltheiler sind. *Math. Ann.* 1897. **48**, № 4. P. 548–561. doi:10.1007/BF01447922.
2. Ore O. Contributions in the theory of groups of finite order. *Duke Math. J.* 1939. **5**, № 2. P. 431–460. doi:10.1215/S0012-7094-39-00537-5.
3. Yi X., Skiba A.N. On S -propermutable subgroups of finite groups. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 2015. **38**, № 2. P. 605–616. doi:10.1007/s40840-014-0038-4.
4. Mazurov V.D., Khukhro E.I. (Eds.) *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory* (18th ed.). Novosibirsk: Sobolev Inst. Math., 2014. 227 p.
5. Yi X., Skiba A.N. Some new characterizations of PST -groups. *J. Algebra.* 2014. **399**. P. 39–54. doi:10.1016/j.jalgebra.2013.10.001.

Надійшло до редакції 28.03.2017

REFERENCES

1. Dedekind, R. (1897). Ueber Gruppen, deren sämtliche Theiler Normaltheiler sind. *Math. Ann.*, 48, № 4, pp. 548-561. doi:10.1007/BF01447922
2. Ore, O. (1939). Contributions in the theory of groups of finite order. *Duke Math. J.*, 5, No. 2, pp. 431-460. doi:10.1215/S0012-7094-39-00537-5
3. Yi, X., Skiba, A. N. (2015). On S -propermutable subgroups of finite groups. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 38, No. 2, pp. 605–616. doi:10.1007/s40840-014-0038-4
4. Mazurov, V. D., Khukhro, E. I. (Eds.) (2014). *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory* (18th ed.). Novosibirsk: Sobolev Inst. Math.
5. Yi, X., Skiba, A. N. (2014). Some new characterizations of PST -groups. *J. Algebra*, 399, pp. 39–54. doi:10.1016/j.jalgebra.2013.10.001

Received 28.03.2017

А.А. Пупка, Д.Ю. Стороженко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара
E-mail: pypka@ua.fm

О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ ПРОПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУПП И ИХ ОБОБЩЕНИЙ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Найдены некоторые специфические примеры проперестановочных и S -проперестановочных подгрупп в конечных группах. В частности, получен положительный ответ на вопрос 18.91 (а) из Коуровской тетради.

Ключевые слова: конечная группа, проперестановочная подгруппа, S -проперестановочная подгруппа.

А.А. Пупка, Д.Ю. Стороженко

Oles Honchar Dnipro National University
E-mail: pypka@ua.fm

ON SOME TYPES OF PROPERMUTABLE SUBGROUPS AND THEIR GENERALIZATIONS IN FINITE GROUPS

We found some specific examples of propermutable and S -propermutable subgroups in finite groups. In particular, we have given the positive answer to the question 18.91 (a) from the Kourovka Notebook.

Keywords: finite group, propermutable subgroup, S -propermutable subgroup.