doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.06.009
УДК 512.544

Л.А. Курдаченко[1], М.М. Семко[2] , І.Я. Субботін[3]

[1] Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара
[2] Університет державної фіскальної служби України, Ірпінь
[3] Національний університет, Лос-Анджелес, США
E-mail: lkurdachenko@i.ua, dr.mykola.semko@gmail.com, isubboti@nu.edu

Алгебри Лейбніца, усі підалгебри яких є ідеалами

Представлено академіком НАН України А.М. Самойленком

Алгебра L над полем F називається алгеброю Лейбніца (точніше лівою алгеброю Лейбніца), якщо вона задовольняє таку тотожність Лейбніца: [[a, b], c] = [a, [b, c]] — [b, [a, c]] для всіх a, b, c ∈ L. Алгебри Лейбніца являють собою узагальнення алгебр Лі. Отримано опис алгебр Лейбніца, кожна підалгебра яких є ідеалом.

Ключові слова: *алгебра Лейбніца, алгебра Лі, циклічна підалгебра, центр алгебри Лейбніца, нільпотентна підалгебра, абелева підалгебра, екстраспеціальна підалгебра, білінійна форма.*

Алгебра L над полем F називається *алгеброю Лейбніца* (точніше, *лівою алгеброю Лейбніця*), якщо вона задовольняє таку тотожність Лейбніца:

$[[a,b],c]=[a,[b,c]]-[b,[a,c]]$ для всіх $a,b,c\in L$.

Алгебри Лейбніца являють собою узагальнення алгебр Лі. Дійсно, алгебра Лейбніца L буде алгеброю Лі тоді і тільки тоді, коли $[a,a]=0$ для кожного елемента $a\in L$. З цієї причини ми можемо розглядати алгебри Лейбніца як "неантикомутативний аналог" алгебр Лі.

Алгебри Лейбніца вперше виникають у роботах А.М. Блоха [1—3], у яких вони були названі D-алгебрами. Однак у той час реальне вивчення цих алгебр не було розпочате. Тільки через два десятиріччя потому виник реальний інтерес до цих алгебр. Стимулом для цього була робота Ж. Лодея [4], який ввів і термін *алгебра Лейбніца*. Алгебри Лейбніца природно виникають у різних математичних дисциплінах таких, наприклад, як диференціальна геометрія, гомологічна алгебра, класична алгебраїчна топологія, алгебраїчна K-теорія, некомутативна геометрія тощо. Вони знаходять застосування у фізиці (див., наприклад, [5—7]). Деякі статті стосовно алгебр Лейбніца присвячені вивченню важливих гомологічних проблем [8—11]. Теорія алгебр Лейбніца розвивається досить інтенсивно, але нерівномірно. З одного боку, отримані глибокі структурні теореми, які є аналогами відповідних результатів з теорії алгебр Лі. А з іншого боку, вивчення алгебр Лейбніца не виглядає послідовним і систематичним. Є природні для кожної алгебраїчної структури питання, які зовсім не були розглянуті для алгебр Лейбніца. Наприклад, таке природне питання, як будова циклічних підалгебр в алгебрах Лейбніца, у повному обсязі було розглянуте тільки недавно в роботі [12]. Інше природне питання — це питання про будову алгебр Лейбніца, всі підалгебри яких є ідеалами. Зазначимо, що неважко довести, що алгебра Лі, всі підалгебри якої є ідеалами, буде абелевою. Проте для алгебр Лейбніца це вже не так. Простий приклад це показує.

Нехай L — векторний простір над полем F, який має вимірність 2, і $\{a, b\}$ — базис простору L. Визначимо операцію [,] за таким правилом: $[a, a] = b$, $[b, b] = [b, a] = [a, b] = 0$. Беспосередньою перевіркою можна упевнитись у тому, що таким чином L стає алгеброю Лейбніца. Якщо $\lambda a+\mu b$ — довільний елемент L і $\lambda\neq 0$, то маємо $[\lambda a+\mu b, \lambda a+\mu b]=\lambda^2 b$. Оскільки $\lambda^2\neq 0$, то отримаємо, що підалгебра, породжена елементом $\lambda a+\mu b$, містить у собі Fb. З того факту, що L/Fb є абелевою, випливає, що підалгебра $\langle\lambda a+\mu b\rangle$ є ідеалом. Отже, кожна циклічна підалгебра L є ідеалом. Звідси випливає, що і кожна підалгебра L є ідеалом. Як ми побачимо далі, з таких алгебр, як із цеглинок, будується кожна неабелева алгебра Лейбніца, кожна підалгебра якої є ідеалом. Зупинимося на цьому більш детально.

Якщо L — алгебра Лейбніца і M — підмножина L, то через $\langle M\rangle$ будемо позначати підалгебру, породжену M.

Як завжди, алгебра Лейбніца L називається *абелевою*, якщо $[x, y]=0$ для всіх елементів $x,\ y\in L$. В абелевій алгебрі Лейбніца кожний підпростір є підалгеброю та ідеалом.

Центр $\zeta(L)$ алгебри Лейбніца L визначається за таким правилом:

$$\zeta(L)=\{x\in L\,|\,[x, y]=0=[y, x] \textit{ для кожного елемента } y\in L\}.$$

Центр буде ідеалом в L. Зокрема, ми можемо говорити про фактор-алгебру $L/\zeta(L)$.

Алгебра Лейбніца L називається *екстраспеціальною*, якщо вона задовольняє такі умови:

центр $\zeta(G)$ є ненульовим і має вимірність 1;

фактор-алгебра $L/\zeta(L)$ є абелевою.

Як виявилося, не у кожної екстраспеціальної алгебри Лейбніца кожна підалгебра буде ідеалом. Наведемо приклад екстраспеціальної алгебри Лейбніца, який це показує. Більше того, наявність підалгебр, що не є ідеалами, залежить від вибору поля F.

Нехай F — поле, покладемо $L=Fa\oplus Fb\oplus Fc$. Визначимо на L операцію [,] за таким правилом:

$$c=[a, a]=[b, b]=[a,b],\quad [c, c]=[c, a]=[c, b]=[a, c]=[b, c]=[b, a]=0.$$

З такого означення випливає, що $[L, L]\leqslant Fc,\quad c\in\zeta(L),\quad \langle c\rangle=Fc$. Рівність

$$[[x, y], z]=[x,[y, z]]-[y,[x, z]]$$

виконується автоматично, оскільки $[x, y]$, $[y, z]$, $[x, z]\in\zeta(L)$. Таким чином, L стає алгеброю Лейбніца. Нехай x — довільний елемент L, тоді $x=\lambda a+\mu b+\nu c$ для деяких $\lambda,\mu,\nu\in F$. Маємо тепер

$$[x, x]=[\lambda a+\mu b+\nu c, \lambda a+\mu b+\nu c]=$$
$$=\lambda^2[a, a]+\lambda\mu[a, b]+\lambda\nu[a, c]+\lambda\mu[b, a]+\mu^2[b, b]+\mu\nu[b, c]+\lambda\nu[c, a]+\mu\nu[c, b]+\nu^2[c, c]=$$
$$=\lambda^2 c+\lambda\mu c+\mu^2 c=(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2)c.$$

Нехай $F=\boldsymbol{F}_2$. Якщо $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$, то $\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2=1$, так що $[x, x]=c$, як тільки $x\notin Fc$. Звідси випливає, що $\zeta(L)=Fc$ і $\langle x\rangle=Fx\oplus Fc$. Оскільки Fc є ідеалом, то $\langle x\rangle$ буде ідеалом, а отже, і кожна підалгебра L буде ідеалом.

Нехай $F = \boldsymbol{F}_5$. Припустимо, що $\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 0$. У цьому випадку маємо $(\lambda + 1/2\,\mu)^2 = \mu^2(1/4 - 1)$. У полі $\boldsymbol{F}_5$ розв'язком рівняння $4x = 1$ буде 4, так що $1/4 - 1 = 3$. Але рівняння $x^2 = 3$ не має розв'язків у полі $\boldsymbol{F}_5$. Це показує, що рівність $\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 0$ можлива лише у випадку, коли $\lambda = \mu = 0$. Таким чином, якщо $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, то $[x, x] \neq 0$ і $[x, x] \in Fc$. Отже, і в цьому випадку кожна підалгебра L буде її ідеалом.

Якщо $F = \boldsymbol{Q}$, то, користуючись подібними аргументами, можемо знову довести, що кожна підалгебра L буде її ідеалом, а центр L збігається з Fc.

Розглянемо випадок, коли $F = \boldsymbol{F}_3$. Для елемента $x = a + b$ маємо $[a+b, a+b] = 3c = 0$. Звідси випливає, що $\langle x \rangle = Fx$. Однак $[x, a] = [a+b, a] = c \notin Fx$, і це показує, що циклічна підалгебра $\langle x \rangle$ не є ідеалом.

Будову алгебр Лейбніца, кожна підалгебра яких є ідеалом, описує така теорема.

Теорема А. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, кожна підалгебра якої є ідеалом. Якщо L є неабелевою, то $L = E \oplus Z$, де $Z \leqslant \zeta(L)$, а E є такою екстраспеціальною алгеброю, що $[a, a] \neq 0$ для кожного елемента $a \notin C$.*

Отже, ми можемо бачити, що основним є випадок, коли L — така екстраспеціальна алгебра, що $[a, a] \neq 0$ для кожного елемента $a \neq \zeta(L)$.

З кожною такою екстраспеціальною алгеброю L можна зв'язати білінійну форму, як описано нижче.

Нехай $Z = \zeta(L)$, $V = L/Z$ і c — деякий фіксований елемент Z. Визначимо відображення $\Phi: V \times V \to F$ за таким правилом: якщо $x, y \in L$, то $[x, y] \in Z$, а отже, $[x, y] = \alpha c$ для деякого елемента $\alpha \in F$. Покладемо $\Phi(x + Z, y + Z) = \alpha$. Це відображення визначено коректно. Дійсно, нехай x_1, y_1 — такі елементи L, що $x_1 + Z = x + Z, y_1 + Z = y + Z$. Тоді $x_1 = x + c_1, y_1 = y + c_2$ для деяких елементів $c_1, c_2 \notin Z$. Маємо

$$[x_1, y_1] = [x + c_1, y + c_2] = [x, y] + [x, c_2] + [c_1, y] + [c_1, c_2] = [x, y].$$

Відображення Φ є білінійним. Дійсно, нехай $x, y, u \notin L$, $[x, u] = \lambda c, [y, u] = \mu c$. Тоді $[x + y, u] = [x, u] + [y, u] = \lambda c + \mu c = (\lambda + \mu)c$, так що

$$\Phi(x + Z + y + Z, u + Z) = \Phi(x + y + Z, u + Z) = (\lambda + \mu)c = \lambda c + \mu c =$$
$$= \Phi(x + Z, u + Z) + \Phi(y + Z, u + Z).$$

Аналогічно можна показати, що

$$\Phi(x + Z, y + Z + u + Z) = \Phi(x + Z, u + Z) + \Phi(x + Z, y + Z).$$

Нехай $\beta \in F$, тоді $[\beta x, y] = \beta[x, y] = \beta(\alpha c) = (\beta\alpha)c$. Звідси випливає, що

$$\Phi((\beta(x + Z), y + Z)) = \Phi(\beta x + Z, y + Z) = (\beta\alpha)c = \beta(\alpha c) = \beta\Phi(x + Z, y + Z).$$

Аналогічно можна показати, що

$$\Phi((x + Z), \beta(y + Z)) = \beta\Phi(x + Z, y + Z).$$

З визначення екстраспеціальної алгебри випливає, що білінійна форма Φ є невиродженою. Більш того, для нашого випадку $\Phi(x, x) \neq 0$ для кожного ненульового елемента x.

Навпаки, нехай V — векторний простір над полем F і Φ — така білінійна форма на V, що $\Phi(x, x) \neq 0$ для кожного ненульового елемента x. Покладемо $L = V \oplus F$ та визначимо операцію [,] на L за таким правилом:

якщо $a, b \in V, \alpha, \beta \in F$, то $[(a, \alpha)(b, \beta)] = (0, \Phi(a, b))$.

Покладемо $C=\{(0,\alpha)\,|\,\alpha\in F\}$. Тоді $\dim_F(C)=1$. Із самого означення отримаємо $[L,L]=$ $=[L,C]=[C,L]=[C,C]=\langle 0\rangle$. Звідси випливає, що побудована алгебра буде алгеброю Лейбніца. Більш того, неважко довести, що $C=\zeta(L)$, так що L — екстраспеціальна алгебра, у якої $[a,a]\neq 0$ для кожного елемента $a\neq\zeta(L)$.

Нехай V — векторний простір над полем F, вимірність якого є зчисленною, Φ — білінійна форма на V. Базис $\{a_j/j\in\mathbf{N}\}$ називається *лівим ортогональним*, якщо $\Phi(a_j,a_k)=0$ як тільки $j>k$.

Теорема B. *Нехай V — векторний простір над полем F, вимірність якого є зчисленною, і Φ — білінійна форма на V. Якщо $\Phi(a,a)\neq 0$ для кожного елемента $0\neq a\in V$, то V має лівий ортогональний базис.*

Треба відзначити, що для просторів, вимірність яких не є зчисленною, структура білінійних форм може бути значно складнішою. Це вже має місце навіть для знакозмінних форм, як показують досить екзотичні приклади (див., наприклад [13, розділ 3]).

Наслідок. *Нехай L — екстраспеціальна алгебра Лейбніца над полем F, вимірність якої є зчисленною. Якщо $[a,a]\neq 0$ для кожного елемента $a\notin\xi(L)$, то L має такий базис $\{e_n/n\in\mathbf{N}\}$, що $[e_1,e_n]=[e_n,e_1]=0$, $[e_j,e_n]\in Fe_1$ для всіх $j,n\in\mathbf{N}$, і $[e_j,e_n]=0$, як тільки $j>n$.*

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Блох А.М. Об одном обобщении понятия алгебры Ли. *Докл. АН СССР*. 1965. **165**. С. 471—473.
2. Блох А.М. Теория гомологий Картана—Эйленберга для одного обобщения класса алгебр Ли. *Докл. АН СССР*. 1967. **175**. С. 266—268.
3. Блох А.М. О некотором обобщении понятия алгебры Ли. *Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та*. 1971. **375**. С. 9—20.
4. Loday J.L. Une version non commutative des algebres de Lie; les algebras de Leibniz. *Enseign. Math*. 1993. **39**. P. 269—293.
5. Lie Theory and its applications in physics: IX International workshop. Dobrev V. (Ed.). Tokyo: Springer, 2013. 562 p.
6. Noncommutative Structures in Mathematics and Physics. Duplij S., Wess J. (Eds). Dordrecht: Springer, 2001. 482 p.
7. Butterfield J., Pagonis C. From Physics to Philosophy. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 235 p.
8. Loday J.L., Pirashvili T. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology. *Math. Ann*. 1993. **296**. P. 139—158.
9. Pirashvili T**.** On Leibniz homology. *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble). 1994. **44**, № 2. P. 401—411.
10. Frabetti A. Leibniz homology of dialgebras of matrices. *J. Pure Appl. Algebra*. 1998. **129**. P. 123—141.
11. Casas J.M., Pirashvili T. Ten-term exact sequence of Leibniz homology. *J. Algebra*. 2000. **231**. P. 258—264.
12. Chupordya V.A., Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya. On some “minimal” Leibniz algebras. *J. Algebra Appl*. 2016. **15**, № 9. P. 527—551.
13. Tomkinson M.J. FC-groups. Boston: Pitman, 1984. 171 p.

Надійшло до редакції 21.10.2016

REFERENCES

1. Bloh, A.M. (1965). On a generalization of the concept of Lie algebra. Dokl. AN USSR, 165, pp. 471-473 (in Russian).
2. Bloh, A.M. (1967). Cartan-Eilenberg homology theory for a generalized class of Lie algebras. Dokl. AN USSR, 175, pp. 266-268 (in Russian).
3. Bloh, A.M. (1971). A certain generalization of the concept of Lie algebra. Uch. Zap. Moskov. Gos. Ped. Inst., 375, pp. 9-20 (in Russian).

4. Loday, J.L. (1993). Une version non commutative des algebres de Lie; les algebras de Leibniz. Enseign. Math., 39, pp. 269-293.
5. Dobrev, V. (Ed.). (2013). Lie Theory and its applications in physics; IX International workshop. Tokyo: Springer.
6. Duplij, S. & Wess, J. (Eds.) (2001). Noncommutative Structures in Mathematics and Physics Proceedings of the NATO advanced research workshop. Dordrecht: Springer.
7. Butterfield, J. & Pagonis, C. (1999). From Physics to Philosophy. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
8. Loday, J.L. & Pirashvili, T. (1993). Universal enveloping algebras ofLeibniz algebras and (co)homology. Math. Ann., 296, pp. 139-158.
9. Pirashvili, T. (1994). On Leibniz homology. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 44, No. 2, pp. 401-411.
10. Frabetti, A. (1998). Leibniz homology of dialgebras of matrices. J. Pure Appl. Algebra, 129, pp. 123-141.
11. Casas, J.M. & Pirashvili, T. (2000). Ten-term exact sequence of Leibniz homology. J. Algebra, 231, pp. 258-264.
12. Chupordya, V.A., Kurdachenko, L.A. & Subbotin, I.Ya. (2016). On some "minimal" Leibniz algebras. J. Algebra Appl., 15, No. 9, pp. 527-551.
13. Tomkinson, M.J. (1984). FC-groups. Boston: Pitman.

Received 21.10.2016

Л.А. Курдаченко[1], *Н.Н. Семко*[2], *И.Я. Субботин*[3]

[1] Днепровский национальный университет им. Олеся Гончара
[2] Университет государственной фискальной службы Украины, Ирпень
[3] Национальный университет, Лос-Анджелес, США
E-mail: lkurdachenko@i.ua , dr.mykola.semko@gmail.com, isubboti@nu.edu

АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА, ВСЕ ПОДАЛГЕБРЫ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ИДЕАЛАМИ

Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница* (точнее *левой алгеброй Лейбница*), если она удовлетворяет следующему тождеству Лейбница: $[[a, b], c] = [a, [b, c]] - [b, [a, c]]$ для всех $a, b, c \in L$. Алгебры Лейбница представляют собой обобщение алгебр Ли. Получено описание алгебр Лейбница, каждая подалгебра которых является идеалом.

***Ключевые слова**: алгебра Лейбница, алгебра Ли, циклическая подалгебра, центр алгебры Лейбница, нильпотентная подалгебра, абелева подалгебра, экстраспециальная подалгебра, билинейная форма.*

L.A. Kurdachenko[1], *N.N. Semko*[2], *I.Ya. Subbotin*[3]

[1] Oles Gonchar Dnipro National University
[2] University of State Fiscal Service of Ukraine, Irpin
[3] National University, Los-Angeles, USA
E-mail: lkurdachenko@i.ua , dr.mykola.semko@gmail.com, isubboti@nu.edu

LEIBNIZ ALGEBRAS, WHOSE ALL SUBALGEBRAS ARE IDEALS

An algebra L over a field F is said to be a *Leibniz algebra* (more precisely, a *left Leibniz algebra*), if it satisfies the Leibniz identity: $[[a, b], c] = [a, [b, c]] - [b, [a, c]]$ *for all* $a, b, c \in L$. Leibniz algebras are generalizations of Lie algebras. A description of Leibniz algebras, whose subalgebras are ideals, is given.

***Keywords**: Leibniz algebra, Lie algebra, cyclic subalgebra, center of a Leibniz algebra, nilpotent subalgebras, Abelian subalgebras, extraspecial subalgebra, bilinear form.*