ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.06.003
УДК 517.983.5

С.Л. Гефтер, А.Л. Пивень

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
E-mail: gefter@karazin.ua, aleksei.piven@karazin.ua

Неявное линейное разностное уравнение в пространствах Фреше

Представлено академиком НАН Украины Е.Я. Хрусловым

Доказан критерий существования и единственности решения неявного линейного разностного уравнения $Ax_{n+1} + Bx_n = g_n$ с непрерывными операторными коэффициентами A, B, действующими в пространствах Фреше. Указаны явные формулы для решения этого уравнения. Полученные результаты уточняются для случая банаховых пространств.

Ключевые слова: *неявное разностное уравнение, пространство Фреше.*

1. Пусть X и Y — комплексные пространства Фреше, т.е. полные метризуемые локально выпуклые пространства, X^* — сопряженное к X пространство, $L(X,Y)$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y, и $S(Y)$ — пространство последовательностей элементов из Y . Рассмотрим неявное разностное уравнение

$$Ax_{n+1} + Bx_n = g_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $A, B \in L(X,Y)$ и $\{g_n\}_{n=0}^{\infty} \in S(Y)$.

Многочисленные результаты о существовании, единственности и представлении решений уравнения (1) в случае банаховых пространств X, Y и различных ограничениях на последовательность $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ описаны в [1—11] и в других работах. В настоящем сообщении получен критерий существования и единственности решения уравнения (1) в пространстве всех последовательностей $S(Y)$ (см. следствие 1) и явная формула для решения (формула (9)). В случае банаховых пространств X и Y этот результат уточняется в следствии 2.

2. Предположим сначала, что $X = Y$ и рассмотрим частный случай уравнения (1):

$$Ax_{n+1} = x_n - f_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in S(X)$. Через A^* будем обозначать оператор, сопряженный к оператору A. В следующей теореме устанавливается необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости уравнения (2) при любой заданной последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Теорема 1. *Для того чтобы разностное уравнение* (2) *имело единственное решение* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *при любой последовательности* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, *необходимо, а в случае слабой секвенци-*

альной полноты пространства X и достаточно, чтобы для любого линейного непрерывного функционала $\phi\in X^*$ *существовало такое число* $k=k(\phi)\in\mathbf{N}$, *что*

$$(A^*)^k\phi=0. \tag{3}$$

При этом решение уравнения (2) *дается формулой*

$$x_n=\sum_{k=0}^{\infty}A^k f_{n+k},\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{4}$$

где сходимость ряда в правой части равенства (4) *понимается в топологии пространства Фреше* X .

Доказательство. *Необходимость.* Пространство $S(X)$ является пространством Фреше с метрикой

$$d(\{x_n\}_{n=0}^{\infty},\{y_n\}_{n=0}^{\infty})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_X(x_n,y_n)}{1+d_X(x_n,y_n)},$$

где $d_X(\cdot,\cdot)$ — метрика в X . Так как $A\in L(X,X)$, то линейный оператор

$$F:S(X)\to S(X),\quad (Fx)_n=x_n-Ax_{n+1},\quad x\in S(X)$$

является непрерывным в пространстве $S(X)$. В силу предположения теоремы существует обратный оператор F^{-1}, определенный на всем пространстве Фреше $S(X)$. Поэтому по теореме Банаха об обратном операторе оператор F^{-1} также является непрерывным.

Для любых $m\in\mathbf{N}$ и $f=\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\in S(X)$ рассмотрим последовательность $f^m=\{f_n^m\}_{n=0}^{\infty}\in$ $\in S(X)$, где

$$f_n^m=\begin{cases}f_n, & n\leqslant m,\\ 0, & n>m.\end{cases}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при любом $m\in\mathbf{N}$ решением разностного уравнения

$$Ax_{n+1}^m=x_n^m-f_n^m,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

является последовательность $x^m=\{x_n^m\}_{n=0}^{\infty}$, где

$$x_n^m=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{m-n}A^k f_{n+k}, & n\leqslant m,\\ 0, & n>m.\end{cases} \tag{5}$$

Это означает, что $F^{-1}f^m=x^m$. Так как оператор F^{-1} непрерывен и $\lim\limits_{m\to\infty}f^m=f$ в $S(X)$, то в пространстве $S(X)$ существует $\lim\limits_{m\to\infty}x^m$. В частности, отсюда получаем, что существует $\lim\limits_{m\to\infty}x_0^m$. С учетом представления (5) для x_0^m получаем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k f_k$ сходится при любых $f_k\in X\,(k=0,1,2,\ldots)$. Положим $f_k=\alpha_k f$, где f — произвольный элемент из X, а $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел. Тогда для любого линейного непрерывного функционала $\phi\in X^*$ сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k\phi(A^k f)$. Следовательно,

$\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k\phi(A^k f)=0$. В силу произвольности числовой последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ получаем, что для любых $f\in X$, $\phi\in X^*$ найдется такое $k=k(f,\phi)\in\mathbf{N}$, что $\phi(A^k f)=0$. Зафиксируем функционал $\phi\in X^*$. Для любого $k\in\mathbf{N}$ рассмотрим замкнутое множество $X_k=\{f\in X:\phi(A^k f)=0\}$. Тогда $X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}X_k$. Поскольку X — полное метрическое пространство, то по теореме Бэра оно является множеством второй категории. Следовательно, при некотором $k=k(\phi)\in\mathbf{N}$ множество X_k содержит шар

$$B_r(x_0)=\{x\in X:d_X(x,x_0)\leqslant r\}.$$

Поэтому $\phi(A^k x)=0$ при всех $x\in B_r(x_0)$. Учитывая непрерывность операции умножения вектора на скаляр в пространстве Фреше, заключаем, что $\phi(A^k x)=0$ при всех $x\in X$, поэтому $(A^*)^k\phi=0$.

Достаточность. Рассмотрим последовательность векторов

$$y_m=\sum_{k=0}^{m}A^k f_k\in X.$$

В силу условия (3) для любого функционала $\phi\in X^*$ числовая последовательность

$$\phi(y_m)=\sum_{k=0}^{m}\phi(A^k f_k)=\sum_{k=0}^{m}(A^*)^k\phi(f_k)$$

стабилизируется: $\phi(y_m)=\phi(y_{k(\phi)}),m\geqslant k(\phi)$. Поэтому последовательность y_m фундаментальна относительно слабой сходимости в X. Так как пространство X является слабо секвенциально полным, то существует элемент $x_0\in X$, к которому последовательность y_m слабо сходится. Это означает, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k f_k$ слабо сходится к элементу x_0. Аналогично по формуле (4) определяются элементы x_n, где $n=1,2,\ldots$. Непосредственной подстановкой (4) в уравнение (2) с учетом непрерывности оператора A проверяется, что последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ есть решение разностного уравнения (2).

Докажем единственность решения уравнения (2). Для этого рассмотрим однородное уравнение

$$Ax_{n+1}=x_n,\quad n=0,1,2,\ldots. \tag{6}$$

Тогда $x_n=A^k x_{n+k}$, $n,k=0,1,2,\ldots$. Отсюда с учетом (3) получаем, что $\phi(x_n)=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$ для любого функционала $\phi\in X^*$. В силу теоремы Хана—Банаха $x_n=0$, $n=0,1,2,\ldots$, т.е. однородное уравнение (6) имеет только тривиальное решение. Поэтому разностное уравнение (2) имеет единственное решение при любой последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. Отсюда из уже доказанной необходимости утверждения теоремы получаем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k f_k$ сходится в топологии пространства X при любых $f_k\in X\,(k=0,1,2,\ldots)$. Следовательно, при любом $n\in\mathbf{N}$ ряд в правой части равенства (4) также сходится в топологии пространства X. Теорема полностью доказана.

Следующий пример показывает, что уравнение (2) может иметь единственное решение при любой последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, но оператор A может не быть нильпотентным.

Пример 1. Пусть $X = s = S(\mathbf{C})$ — пространство всех числовых последовательностей, A — оператор сдвига: если $u = (u_0, u_1, u_2, \ldots) \in s$, то $Au = (0, u_0, u_1, u_2, \ldots)$. Оператор всюду определен и непрерывен в пространстве s, а само пространство s является пространством Фреше. С помощью представлений $x_n = \{x_{n,m}\}_{m=0}^{\infty}$, $f_n = \{f_{n,m}\}_{m=0}^{\infty}$ элементов из s уравнение (2) переписывается в виде

$$x_{n,0} = f_{n,0}, \quad x_{n+1,m-1} = x_{n,m} - f_{n,m}, \quad m \in \mathbf{N}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Тогда при любых $f_n = \{f_{n,m}\}_{m=0}^{\infty} \in s$ (n = 0, 1, 2, ...) существует единственное решение $x_n = \{x_{n,m}\}_{m=0}^{\infty} \in s \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ уравнения (2), которое определяется из соотношений (7):

$$x_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} f_{n+k,m-k}, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Однако оператор A не является нильпотентным и, более того, $A^n x \neq 0$ при всех $n \in \mathbf{N}$ и $0 \neq x \in s$.

Следующая теорема показывает, что в частном случае, когда X — банахово пространство, существование и единственность решения уравнения (2) при любой заданной последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ влечет за собой нильпотентность оператора A.

Теорема 2. *Пусть X — банахово пространство и $A \in L(X, X)$. Для того чтобы разностное уравнение* (2) *имело единственное решение $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ при любой последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был нильпотентным. При этом если $r+1$ — индекс нильпотентности оператора A, то решение разностного уравнения* (2) *определяется формулой*

$$x_n = \sum_{k=0}^{r} A^k f_{n+k}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

3. Из теорем 1 и 2 вытекают следствия, устанавливающие соответствующие критерии существования и единственности решения уравнения (1).

Следствие 1. *Для того чтобы разностное уравнение* (1) *имело единственное решение $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ при любой последовательности $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$, необходимо, а в случае слабой секвенциальной полноты пространства X и достаточно, чтобы существовал обратный оператор $B^{-1} \in L(Y, X)$ и для любого линейного непрерывного функционала $\phi \in X^*$ существовало такое $k = k(\phi) \in \mathbf{N}$, что $((B^{-1}A)^*)^k \phi = 0$. При этом решение уравнения* (1) *дается формулой*

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-B^{-1}A)^k B^{-1} g_{n+k}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

где сходимость ряда в правой части равенства (9) понимается в топологии пространства Фреше X.

Следствие 2. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $A, B \in L(X, Y)$. Для того чтобы разностное уравнение* (1) *имело единственное решение $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ при любой последовательности $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал обратный оператор $B^{-1} \in L(Y, X)$ и оператор $B^{-1}A$ был нильпотентным. При этом если $r+1$ — индекс нильпотентности оператора $B^{-1}A$, то решение разностного уравнения* (1) *определяется формулой*

$$x_n = \sum_{k=0}^{r} (-B^{-1}A)^k B^{-1} g_{n+k}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Замечание 1. В условиях следствия 1 начальная задача $x_0 = a \in X$ для уравнения (1) разрешима в том и только в том случае, когда

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} (-B^{-1}A)^k B^{-1} g_k.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков А.Г. Об обратимости линейных разностных операторов с постоянными коэффициентами. *Изв. вузов. Матем.* 2001. № 5. С. 3—11.
2. Бенабдаллах М., Руткас А.Г., Соловьев А.А. Применение асимптотических разложений к исследованию бесконечной системы уравнений $Ax_{n+1} + Bx_n = f_n$ в банаховом пространстве. *Теория функций, функц. анализ и их прил.* 1985. Вып. 43. С. 9—17.
3. Власенко Л.А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск: Системные технологии, 2006. 272 с.
4. Городний М.Ф. Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве. *Укр. мат. журн.* 1991. **43**, № 1. С. 41—46.
5. Городній М.Ф., Вятчанінов О.В. Про обмеженість однієї рекурентної послідовності у банаховому просторі. *Укр. мат. журн.* 2009. **61**, № 9. С. 1293—1296.
6. Слюсарчук В.Ю. Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі. Рівне: Вид-во УДУВГП, 2003. 366 с.
7. Bernhard P. On singular implicit linear dynamical systems. *SIAM J. Control Optim.* 1982. **20**, № 5. P. 612—633.
8. Bondarenko M., Rutkas A. On a class of implicit difference equations. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 1998. № 7. С. 11—15.
9. Campbell S.L. Singular systems of differential equations I. San Francisco, London, Melbourne: Pitman Advanced Publ. Program, 1980. 176 p. (Research Notes in Mathematics; Vol. 40).
10. Campbell S.L. Singular systems of differential equations II. — San Francisco, London, Melbourne: Pitman Advanced Publ. Program, 1982. 234 p. (Research Notes in Mathematics; Vol. 61).
11. Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M.A. Classes of linear operators. Vol. 1. Basel: Birkhäuser, 1990. 469 p. (Operator Theory: Advances and Applications; Vol. 49).

Поступило в редакцию 13.02.2017

REFERENCES

1. Baskakov, A.G. (2001). On the invertibility of linear difference operators with constant coefficients. Russ. Math., No. 5, pp. 1-9.
2. Benabdallakh, M., Rutkas, A.G. & Solov'ev, A.A. (1990). Application of asymptotic expansions to the investigation of an infinite system of equations $Ax_{n+1} + Bx_n = f_n$ in a Banach space. J. Soviet Math., 48, Iss. 2, pp. 124-130.
3. Vlasenko, L.A. (2006). Evolutionary models with implicit and degenerate differential equations. Dnepropetrovsk: Sistemnyie Technologii (in Russian).
4. Gorodnii, M.F. (1991). Bounded and periodic solutions of a difference equation and its stochastic analogue in Banach space. Ukr. Math. J., 43, Iss. 1, pp. 32-37.
5. Horodnii, M.F. & Vyatchaninov, O.V. (2009). On the boundedness of one recurrent sequence in a banach space. Ukr. Math. J., 61, Iss. 9, pp. 1529-1532.
6. Slusarchuk, V.E. (2003). Stability of Solutions of Difference Equations in a Banach Space. Rivne: Vyd-vo UDUVHP (in Ukrainian).
7. Bernhard, P. (1982). On singular implicit linear dynamical systems. SIAM J. Control Optim., 20, No. 5, pp. 612-633.
8. Bondarenko, M. & Rutkas, A. (1998). On a class of implicit difference equations. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 7, pp. 11-15.

9. Campbell, S.L. (1980). Singular systems of differential equations I, Research Notes in Mathematics, Vol. 40. San Francisco, London, Melbourne: Pitman Advanced Publ. Program.
10. Campbell, S.L. (1982). Singular systems of differential equations II, Research Notes in Mathematics, Vol. 61. San Francisco, London, Melbourne: Pitman Advanced Publ. Program.
11. Gohberg, I., Goldberg, S. & Kaashoek, M.A. (1990). Classes of linear operators, Vol. 1, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 49. Basel: Birkhäuser.

Received 13.02.2017

С.Л. Гефтер, О.Л. Півень

Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна
E-mail: gefter@karazin.ua, aleksei.piven@karazin.ua

НЕЯВНЕ ЛІНІЙНЕ РІЗНИЦЕВЕ РІВНЯННЯ
У ПРОСТОРАХ ФРЕШЕ

Доведено критерій існування та єдиності розв'язку неявного лінійного різницевого рівняння $Ax_{n+1} + Bx_n = g_n$ з неперервними операторними коефіцієнтами A, B, що діють у просторах Фреше. Вказано явні формули для розв'язку цього рівняння. Отримані результати уточнюються для випадку банахових просторів.

Ключові слова: *неявне різницеве рівняння, простір Фреше.*

S.L. Gefter, A.L.Piven

V.N. Karazin Kharkiv National University
E-mail: gefter@karazin.ua, aleksei.piven@karazin.ua

IMPLICIT LINEAR DIFFERENCE EQUATION
IN FRECHET SPACES

An criterion of the existence and the uniqueness for a solution of the implicit linear difference equation $Ax_{n+1} + Bx_n = g_n$, where A and B are continuous operators, which act on Frechet spaces, is proved. Explicit formulas for the solution of this equation are found. For the case of Banach spaces, the results are specified.

Keywords: *implicit difference equation, Frechet space.*