

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.05.034>

УДК 539.3

**А.Н. Гузь, А.М. Багно**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: alexbag2016@gmail.com

## **О волнах в системе: полупространство вязкой жидкости — сжимаемый упругий слой с начальными напряжениями**

*Представлено академиком НАН Украины А.Н. Гузем*

*На основании трехмерных линеаризованных уравнений теории упругости конечных деформаций для твердого тела и трехмерных линеаризованных уравнений Навье—Стокса для вязкой сжимаемой жидкости построены дисперсионные кривые квазилэмбовских волн в гидроупругой системе в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние начальных напряжений в предварительно деформированном сжимаемом упругом слое, а также полупространства вязкой сжимаемой жидкости на фазовые скорости и коэффициенты затухания квазилэмбовских мод в гидроупругом волноводе. Исследованы локализационные свойства низших квазилэмбовских мод в упруго-жидкостных волноводах. Развитый подход и полученные результаты позволяют для волновых процессов установить пределы применимости моделей, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций, классической теории упругости и модели идеальной жидкости. Числовые результаты приведены в виде графиков и дан их анализ.*

**Ключевые слова:** дисперсия волн, квазилэмбовские моды, сжимаемый упругий слой, полупространство вязкой сжимаемой жидкости, начальные напряжения.

В настоящей работе для исследования распространения квазилэмбовских волн в гидроупругой системе, состоящей из полупространства жидкости и упругого слоя, привлекаются модели предварительно напряженного сжимаемого тела и вязкой сжимаемой жидкости. При этом используются трехмерные линеаризованные уравнения теории упругости конечных деформаций для твердого тела и трехмерные линеаризованные уравнения Навье—Стокса для жидкости [1–7]. Предполагается, что жидкость является ньютоновской, находится в состоянии покоя и тепловые эффекты не учитываются. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений линеаризованных уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости и предварительно напряженного сжимаемого упругого тела, предложенные в работах [1–7].

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из полупространства вязкой сжимаемой жидкости и сжимаемого упругого слоя, подверженного большим (конечным) начальным деформациям. Решение получим с привлечением трехмерных линеаризованных уравнений теории упру-

гости при конечных деформациях для твердого тела и линеаризованных уравнений Навье–Стокса для жидкости, находящейся в состоянии покоя [1–7].

Далее предположим, что изотропное нелинейно-упругое тело, упругий потенциал которого является произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина, занимает объем:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 \leq h$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  и контактирует с полупространством вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей объем:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-\infty < z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Будем считать, что волна, бегущая в направлении оси  $oz_1$ , и возмущения, ее вызывающие, не зависят от переменной  $z_3$ . В этом случае задача будет плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $oz_1z_2$ . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений движения упругого тела и жидкости при следующих граничных условиях:

$$\tilde{P}_1 \Big|_{z_2=0} = \tilde{Q}_1 \Big|_{z_2=0}; \tilde{P}_2 \Big|_{z_2=0} = \tilde{Q}_2 \Big|_{z_2=0}; \tilde{Q}_1 \Big|_{z_2=h} = 0; \tilde{Q}_2 \Big|_{z_2=h} = 0; \quad (1)$$

$$v_1 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{z_2=0}; v_2 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z_2=0}. \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\tilde{Q}_i$  та  $\tilde{P}_i$  — составляющие напряжений, соответственно, в упругом теле и жидкости.

В дальнейшем для решения задачи гидроупругости воспользуемся представлениями общих решений для предварительно напряженных сжимаемых упругих тел и вязкой сжимаемой жидкости. Для случая однородного начального напряженного состояния и покоящейся жидкости общие решения, полученные в работах [1–7], имеют вид

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t}$$

где введенные функции  $\chi_i$  являются решениями следующих уравнений:

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[ \left( 1 + \frac{4v^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0; \left[ \frac{\partial}{\partial t} - v^* \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0.$$

Здесь  $u_i$  — компоненты вектора перемещений упругого тела  $\mathbf{u}$ ;  $\rho$  — плотность материала упругого слоя;  $v_i$  — составляющие вектора возмущений скорости жидкости  $\mathbf{v}$ ;  $\rho^*$  и  $p$  — возмущения плотности и давления в жидкости;  $\mathbf{v}^*$  и  $\boldsymbol{\mu}^*$  — кинематический и дина-

мический коэффициенты вязкости жидкости;  $\rho_0$  и  $a_0$  — плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $\lambda_i$  — удлинения упругого слоя в направлениях координатных осей;  $\bar{\sigma}_{ii}^0$  — начальные напряжения ( $s_{ii}^0 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{\sigma}_{ii}^0}{\lambda_i^2}$ ).

Далее параметры, характеризующие процесс распространения волн, разыскиваем в классе бегущих волн и выбираем в виде:

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp [i(kz_1 - \omega t)], \quad j = \overline{1,3},$$

где  $k$  ( $k = \beta + i\gamma$ ) — волновое число;  $\gamma$  — коэффициент затухания волны;  $\omega$  — круговая частота;  $i^2 = -1$ .

Отметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаем две задачи Штурма—Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также определяем соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (1) и (2) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения, приравнивая определитель системы к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| e_{mn}(c_s, \gamma, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \omega h/c_s) \right\| = 0, \quad m, n = \overline{1,6}, \quad (3)$$

где  $c$  — фазовая скорость мод в гидроупругой системе;  $h$  — толщина упругого слоя;  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu/\rho$ ) — скорость волны сдвига в материале упругого тела,  $\lambda$  и  $\mu$  — константы Ляме материала упругого тела.

Заметим, что особенность распространения возмущений в гидроупругом волноводе указанной структуры обусловлена наличием в упругом теле и жидкости граничных поверхностей. Это значительно усложняет картину волнового поля в нем. Причиной этого является то, что в формировании поля в гидроупругой системе существенную роль играют не только наличие жидкости, а также взаимодействие волн с поверхностью упругого тела, контактирующего с жидкой средой, но и наличие свободных границ и их взаимовлияние. Взаимодействие продольных и сдвиговых волн на граничных поверхностях приводит к возникновению в гидроупругом волноводе сложного спектра мод.

Отметим, что дисперсионное уравнение (3) не зависит от формы упругого потенциала и получено для сжимаемых упругих тел, подверженных большим (конечным) начальным деформациям. Оно является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев [8—11]. Если положить  $\bar{\sigma}_{ii}^0 = 0$  и  $\bar{\mu}^* = 0$ , то получим равенства для основательно исследованных в рамках классической теории упругости волн Рэлея, Стоунли—Шольте и Лэмба [13].

**Численные результаты.** В дальнейшем дисперсионное уравнение (3) решаем численно. При этом расчеты проводим для гидроупругой системы, состоящей из стали марки 09Г2С (жесткий материал) и воды. Параметры волновода выбираем такими: упругий

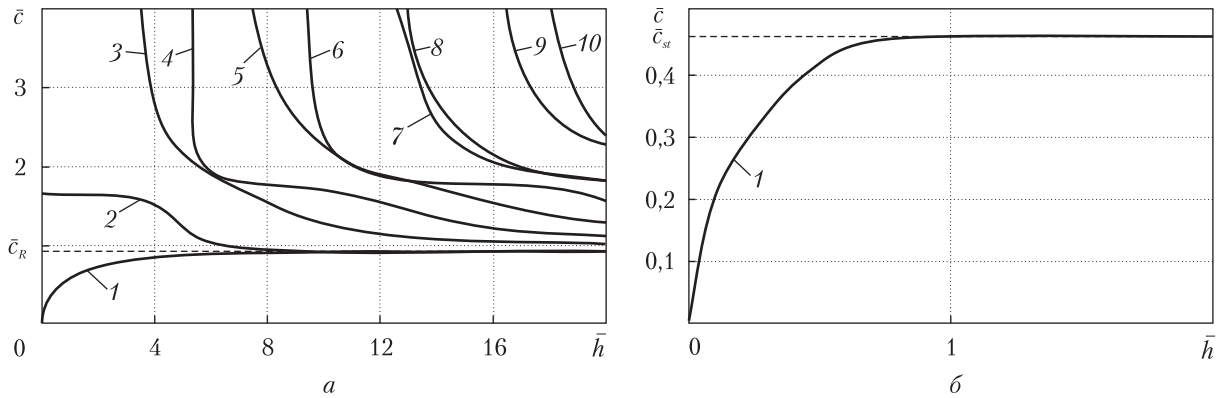


Рис. 1

слой —  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ; полупространство жидкости —  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{\mu}^* = 0,001$ ,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 0,463021$ . Этот волновод отличается тем, что материал упругого тела (сталь) относится к разряду жестких.

Заметим, что уравнение (3) выведено без введения каких-либо дополнительных ограничений к виду функции упругого потенциала, поэтому оно справедливо для упругих потенциалов произвольной формы. В данной работе для описания упругих свойств стали использовался трехинвариантный потенциал Мурнагана [12].

При рассмотрении конкретного примера и численного решения уравнения (3) учитывалось то, что сталь, не разрушаясь, не допускает больших деформаций и поэтому коэффициенты уравнений состояния  $a_{ij}$  и  $\mu_{ij}$  определялись в рамках линейного акустического приближения [12]. Результаты вычислений представлены на рис. 1–4.

На рис. 1, а для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = \omega h/c_s$ ) [2, 3, 9, 13] при отсутствии начальных напряжений. На этом рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремятся фазовые скорости первой (нулевой антисимметричной) и второй (нулевой симметричной) мод при возрастании толщины (частоты)  $\bar{h}$ .

На рис. 1, б для упругого слоя, взаимодействующего с полупространством идеальной жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0$ ), приведен график зависимости безразмерной величины фазовой скорости единственной низшей моды  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$ . На этом рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремится фазовая скорость этой моды при возрастании толщины.

Влияние вязкости жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ) на скорости квазилэмбовских мод в гидроупругой системе иллюстрирует график на рис. 2, а. На нем представлены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских волн  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$ . На этом рисунке для наглядности штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первой, второй и третьей мод при возрастании толщины.

На рис. 2, б и 3, а для гидроупругой системы, приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания  $\bar{\gamma}$  ( $\bar{\gamma} = \gamma/k_s$ ,  $k_s$  — волновое число волны сдвига в материа-

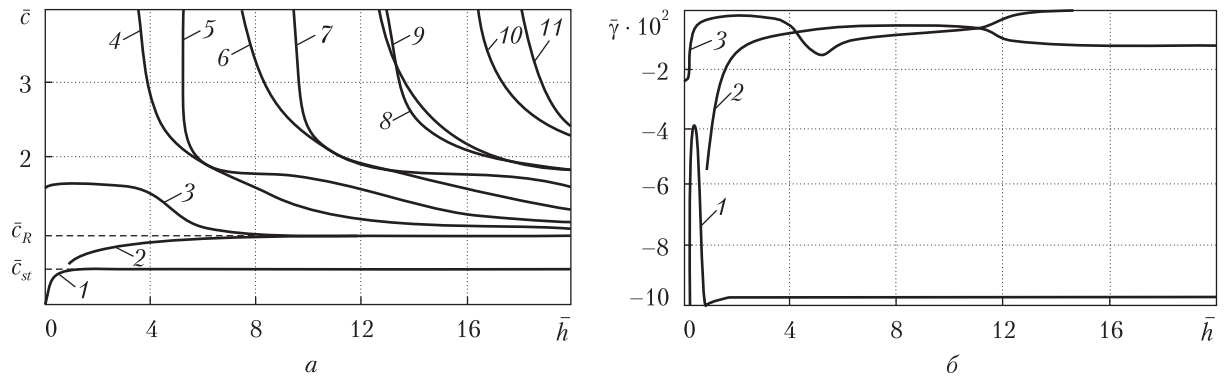


Рис. 2

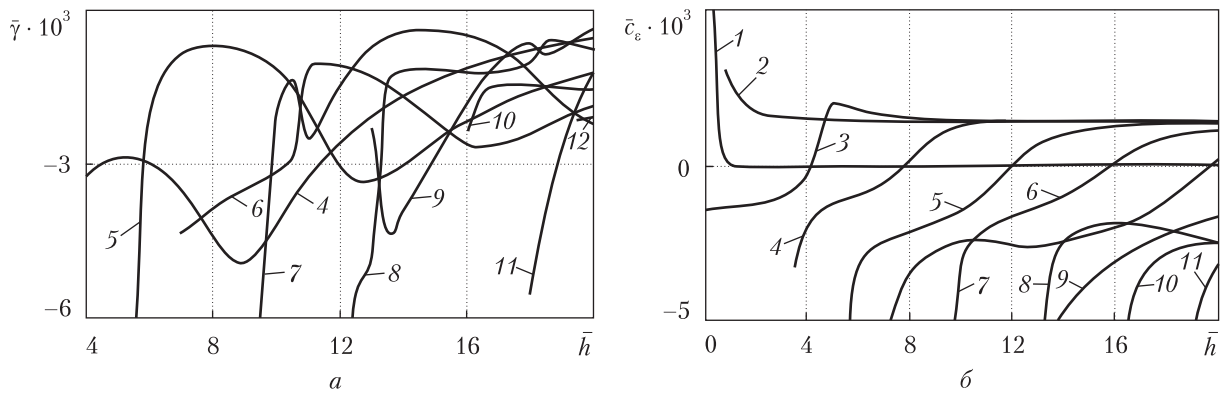


Рис. 3

ле упругого слоя) от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$  при  $\bar{\mu}^* = 0,001$  и отсутствии начальных напряжений.

Характер влияния предварительного растяжения ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) на скорости квази-лэмбовских волн в упруго-жидкостной системе иллюстрирует график на рис. 3, б. На нем приведены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей  $c_\epsilon$  ( $c_\epsilon = (c_\sigma - c)/c$ ,  $c_\sigma$  — фазовая скорость мод в предварительно напряженном слое,  $c$  — фазовая скорость нормальных волн в упругом слое при отсутствии начальных деформаций) от толщины упругого слоя  $\bar{h}$  при  $\bar{\mu}^* = 0,001$ .

Влияние предварительного растяжения ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) на коэффициенты затухания мод в упругом слое, взаимодействующем с полупространством вязкой жидкости, иллюстрируют графики на рис. 4.

На них представлены зависимости относительных изменений величин коэффициентов затухания мод  $\gamma_\epsilon$  ( $\gamma_\epsilon = (\gamma_\sigma - \gamma)/\gamma$ ,  $\gamma_\sigma$  — коэффициенты затухания мод в гидроупругой системе, упругий слой которой подвержен начальным деформациям;  $\gamma$  — коэффициенты затухания мод в гидроупругой системе при отсутствии начальных деформаций) от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$  при  $\bar{\mu}^* = 0,001$ .

**Анализ числовых результатов.** Из графиков, представленных на рис. 1, а [2, 3, 9, 13], следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте частоты

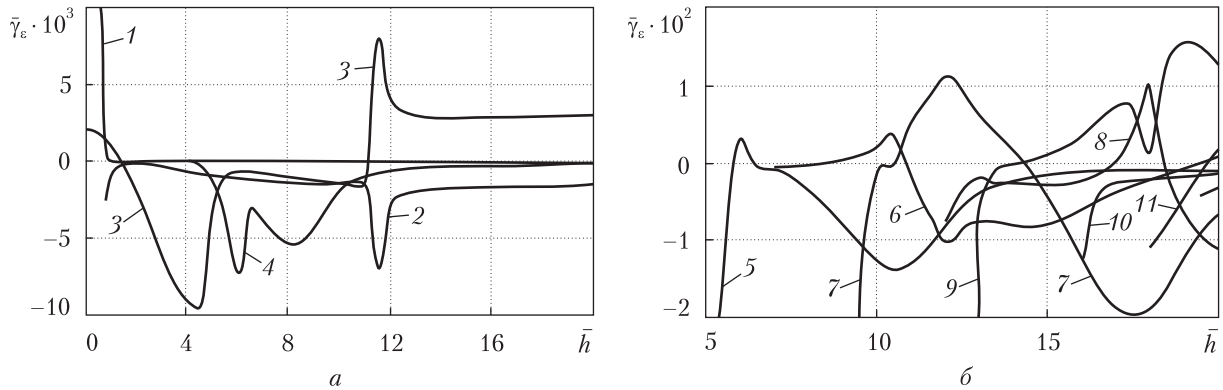


Рис. 4

или толщины упругого слоя  $\bar{h}$  стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,923008$ ) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении частоты или толщины упругого слоя стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ .

График на рис. 1, б получен для упруго-жидкостной системы, состоящей из стального (жесткий материал) упругого слоя и полупространства идеальной ( $\bar{\mu}^* = 0$ ) сжимаемой жидкости. Из него следует, что, если между механическими параметрами компонентов гидроупругой системы выполняется условие  $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$ , то в упругом слое (жесткий материал), взаимодействующем с идеальным жидким полупространством, без демпфирования распространяется лишь одна низшая мода. При этом она, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностной области жидкого полупространства [14]. Скорость этой волны с ростом толщины упругого слоя стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,462886$ ), которая несколько меньше скорости волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ).

Из рис. 2, а следует, что в случае взаимодействия упругого слоя из жесткого материала с вязким ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ) жидким полупространством в гидроупругой системе распространяются не только низшая первая мода, но и весь спектр квазилэмбовских мод высокого порядка. При этом с увеличением толщины упругого слоя  $\bar{h}$  скорость моды 1, распространяющейся вдоль границы контакта сред, стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,461819$ ) снизу. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы сталь (жесткий материал) – вода таковы, что скорость распространения волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ) меньше скорости квазиралеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,922506$ ). Согласно результатам, полученным в работе [14] для волн Стоунли, это приводит к тому, что в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 (волна типа Стоунли) в жидкость значительно больше глубины проникновения в упругое тело. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностной области жидкого полупространства. Вследствие того, что низшая мода не проникает в твердое тело в приповерхностной области упругого слоя, граничащей с жидкостью, распространяется мода 2. Скорость этой моды стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,922506$ ) снизу, как и в случае твердого слоя, невзаимодействующей

щего с жидкостью. Скорость моды 3, распространяющейся в упругом слое вдоль его свободной поверхности, стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,922506$ ) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела  $\bar{c}_s$ . При этом с увеличением толщины, как известно [13], в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, то есть движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толще. Характерной особенностью всех мод, возникающих при взаимодействии упругого слоя с полупространством вязкой жидкости, в отличие от системы с идеальной жидкостью, является то, что они распространяются с затуханием.

Графики, приведенные на рис. 2, а – 3, а, показывают, что в этой гидроупругой системе влияние вязкой жидкости на параметры волнового процесса наибольшее в окрестности частот зарождения квазилэмбовских мод. Для всех мод (кроме первой и второй) с увеличением толщины упругого слоя воздействие вязкости на величины их фазовых скоростей уменьшается, а также уменьшаются их величины коэффициентов затухания.

Из рис. 3, б–4, б, следует, что предварительные деформации вызывают изменение частот зарождения квазилэмбовских мод и смещение их дисперсионных кривых. При этом начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) приводит к сдвигу критических частот и дисперсионных кривых в низкочастотную часть спектра. Предварительное деформирование повышает фазовые скорости мод 1 и 2 во всем диапазоне изменения толщин упругого слоя.

**Свойства локализации низших мод в гидроупругих волноводах.** Проведенный выше анализ, показывает, что в случае гидроупругой системы: сталь (жесткий материал) – вода (см. рис. 1, б, 2, а) механические параметры таковы, что скорость распространения волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ) меньше скорости квазирэлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,922506$ ). В связи с этим, согласно результатам, полученным в работе [14], в этой упруго-жидкостной системе при  $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$  мода 1 не проникает в твердое тело и распространяется вдоль границы контакта сред в приповерхностной области жидкости. В этом случае волноводом для распространения квазиповерхностной волны (волны типа Стоунли) и переноса волновой энергии служит приповерхностная область жидкого полупространства. Моды 2 и 3 с возрастанием (частоты) толщины упругого слоя (рис. 2, б) локализуются в приповерхностных областях упругого слоя. Моды высокого порядка, как указывалось выше, смещаются вглубь упругого слоя и распространяются в его толще.

**Особенности влияния вязкости жидкости на дисперсию и фазовые скорости квазилэмбовских волн в гидроупругом волноводе.** Графики, приведенные на рис. 2, а и 3, а, отражают особенности взаимодействия волновых движений в упругом слое с вязким жидким полупространством. Как уже упоминалось, движения в модах, распространяющихся в упругом слое, начиная с четвертой, с возрастанием толщины удаляются от его поверхностей и локализуются в его толще. Это является основным фактором, приводящим к ослаблению влияния вязкости жидкости на фазовые скорости и к уменьшению значений коэффициентов затухания этих мод. В противоположность модам высокого порядка движения в моде 1 с возрастанием толщины устремляются к границе раздела сред. Эта низшая мода становится квазиповерхностной волной типа Стоунли. Этим объясняется характер влияния вязкости жидкости, проявляющийся в уменьшении фазовой скорости и увеличении ко-

эфициента затухания этой моды. Движения в квазиповерхностной моде 2 (волна типа Рэлея) (см. рис. 2, б) с ростом толщины, распространяясь в упругом слое, устремляются к поверхности раздела сред. Этим обусловлено влияние вязкости жидкости на кинематические характеристики этой моды во всем диапазоне частот. Кроме того, анализ также показывает, что в тех точках мод, где преобладающими являются движения (сдвиговые смещения) на границе раздела сред, влияние вязкости наибольшее и коэффициенты затухания, а также относительные изменения величин скоростей принимают максимальное значение. В точках волны с малыми поверхностными сдвиговыми смещениями соответственно и влияние вязкости наименьшее. Из графиков также следует, что вязкость жидкого полупространства, как отмечалось ранее, вызывает изменение критических частот мод и смещение их дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра. Это приводит к значительному изменению фазовых скоростей мод в окрестности толщин, при которых они зарождаются.

Проведенные отдельно расчеты и анализ графика, представленного на рис. 1, б, показывает, что в случае взаимодействия упругого слоя с полупространством идеальной жидкости соотношение между скоростью волны звука в жидкости и скоростью квази-рэлеевской волны является критерием, определяющим возможность существования квазилэмбовских волн в гидроупругой системе. Для системы с упругим слоем из жесткого материала имеет место соотношение  $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$ . В этом случае, как следует из рис. 1, б, идеальная жидкость препятствует энергетическому обмену между его поверхностями. Это приводит к тому, что в упругом слое не формируются нормальные волны высокого порядка и в гидроупругой системе не возникает полный спектр квазилэмбовских мод, распространяющихся без демпфирования. Как видим, при взаимодействии упругого слоя из жесткого материала с вязким жидким полупространством (см. рис. 2, а) в гидроупругой системе при любых соотношениях между указанными механическими параметрами всегда возникают квазилэмбовские моды высокого порядка, распространяющиеся с затуханием.

**Особенности влияния начальных напряжений на дисперсию квазилэмбовских волн в гидроупругом волноводе.** Как показано в работе [9], в упругом слое, невзаимодействующем с жидкостью, начальные растяжения вызывают изменение частот зарождения мод и смещение их дисперсионных кривых. Это приводит к тому, что в окрестности критических частот фазовые скорости мод Лэмба в предварительно деформированном слое могут быть как меньше, так и больше фазовых скоростей соответствующих мод в теле без начальных напряжений. Этим обусловлено появление в спектре упругого волновода частот (толщин), при которых начальные напряжения не оказывают влияния на значения фазовых скоростей ряда нормальных волн Лэмба. Отметим, что эта, качественно новая закономерность, отсутствующая в случае распространения волн в неограниченных и полуограниченных телах, впервые была обнаружена и описана в работе [9] для сжимаемого упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью.

Графики, представленные на рис. 3, б, позволяют заключить, что в случае взаимодействия упругого слоя из стали (жесткий материал) с вязким жидким полупространством начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) упругого слоя оказывает влияние на величину фазовой скорости моды 1, в основном, в окрестности частоты ее зарождения. В дальнейшем с ростом толщины упругого слоя влияние предварительных деформаций на скорость этой



квазиповерхностной волны (волны типа Стоунли) ослабевает. Связано это с тем, что в данной упруго-жидкостной системе низшая мода 1, возникающая в результате взаимодействия упругого слоя с жидким полупространством, не проникает в твердое тело и распространяется вдоль границы контакта сред, преимущественно, в приповерхностной области жидкости. Этим объясняется незначительное влияние упругого слоя и начальных напряжений на фазовую скорость, а также дисперсию этой моды. Из графиков, приведенных на рис. 3, б—4, б, также следует, что предварительные деформации вызывают изменение частот зарождения квазилэмбовских мод и смещение их дисперсионных кривых. При этом начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) приводит к сдвигу критических частот и дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра. Из рис. 3, б также видно, что дисперсионные кривые мод высокого порядка пересекают ось абсцисс. Это свидетельствует о том, что для всех квазилэмбовских мод (кроме первой и второй) существуют упругие слои определенных толщин  $\bar{h}$ , при которых фазовые скорости  $\bar{c}$  не зависят от начального растяжения ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ).

В заключение отметим, что при проведении расчетов для реальных жидких сред применение модели идеальной жидкости к гидроупругому волноводу с упругим слоем из стали (жесткий материал) может привести к получению весьма неточных как количественных, так и качественных результатов.

Предложенный подход и полученные данные позволяют для волновых процессов установить пределы применимости моделей, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций, классической теории упругости и модели идеальной жидкости.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Guz A.N. Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1980. **16**, № 3. P. 175–190.
2. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х томах. Киев: Наук. думка, 1986.
3. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.
4. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
5. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Sci. Publ. 2009. 428 p.
6. Guz A.N. Compressible, viscous fluid dynamics (review). Part 1. *Int. Appl. Mech.* 2000. **36**, № 1. P. 14–39.
7. Guz A.N. The Dynamics of a compressible viscous liquid (review). II. *Int. Appl. Mech.* 2000. **36**, № 3. P. 281–302.
8. Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno. A.M. Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.* 2016. **52**, № 5. P. 449–507.
9. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1976. 104 с.
10. Babich S.Y., Guz A.N., Zhuk A.P. Elastic waves in bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1979. **15**, № 4. P. 277–291.
11. Жук А.П. Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями. *Прикл. механика.* 1980. **16**, № 1. С. 113–116.
12. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустоупругость. Киев: Наук. думка, 1977. 152 с.
13. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 288 с.
14. Волькенштейн М.М., Левин В.М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела. *Акуст. журн.* 1988. **34**, № 4. С. 608–615.

Поступило в редакцию 05.07.2017

REFERENCES

1. Guz, A. N. (1980). Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 16, No. 3, pp. 175-190.
2. Guz, A. N. (1986). Elastic waves in bodies with initial stresses. In 2 vol. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
3. Guz, A. N. (2004). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Kiev: A.C.K. (in Russian).
4. Guz, A. N. (1998). Dynamics of compressible viscous fluid. Kiev: A.C.K. (in Russian).
5. Guz, A. N. (2009). Dynamics of compressible viscous fluid, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
6. Guz, A. N. (2000). Compressible, viscous fluid dynamics (review). Part 1. *Int. Appl. Mech.*, 36, No. 1, pp. 14-39.
7. Guz, A. N. (2000). The Dynamics of a compressible viscous liquid (review). II. *Int. Appl. Mech.*, 36, No. 3, pp. 281-302.
8. Guz, A. N., Zhuk, A. P. & Bagno, A. M. (2016). Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.*, 52, No. 5, pp. 449-507.
9. Guz, A. N., Zhuk, A. P. & Makhort, F. G. (1976). Waves in layer with initial stresses. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
10. Babich, S. Y., Guz, A. N. & Zhuk, A. P. (1979). Elastic waves in bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 15, No. 4, pp. 277-291.
11. Zhuk, A. P. (1980). Stoneley wave in a medium with initial stresses. *J. Appl. Mech.*, 16, No. 1, pp. 113-116 (in Russian).
12. Guz, A. N., Makhort, F. G. & Guscha, O. I. (1977). Introduction in acoustoelasticity. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
13. Viktorov, I. A. (1981). Sound surface waves in solids. Moscow: Nauka (in Russian).
14. Volkenstein, M. M. & Levin, V. M. (1988). Structure of Stounly wave on the boundary of a viscous liquid and a solid. *Acoustic J.*, 34, No. 4, pp. 608-615 (in Russian).

Received 05.07.2017

*О.М. Гузь, О.М. Багно*

Институт механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: alexbag2016@gmail.com

ПРО КВАЗІЛЕМБОВСЬКІ ХВИЛІ У СИСТЕМІ:  
ПІВПРОСТІР В'ЯЗКОЇ РІДИНИ – СТИСЛИВИЙ ПРУЖНИЙ ШАР  
З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінченних деформацій для твердого тіла та тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є—Стокса для в'язкої стисливої рідини побудовані дисперсійні криві квазілембовських хвиль у гідропружній системі в широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив початкових напружень у попередньо деформованому стисливому пружному шарі, а також півпростору в'язкої стисливої рідини на фазові швидкості та коефіцієнти загасання квазілембовських мод у гідропружному хвилеводі. Досліджено локалізаційні властивості нижчих квазілембовських мод у пружно-рідинних хвилеводах. Розвинутий підхід та отримані результати дозволяють для хвильових процесів встановити межі застосування моделей, заснованих на різних варіантах теорії малих початкових деформацій, класичної теорії пружності, а також моделі ідеальної рідини. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

**Ключові слова:** дисперсія хвиль, квазілембовські моди, стисливий пружний шар, півпростір в'язкої стисливої рідини, початкові напруження.

A.N. Guz, A.M. Bahno

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: alexbag2016@gmail.com

ON QUASI-LAMB WAVES IN THE SYSTEM  
“HALF-SPACE OF A VISCOUS FLUID – COMPRESSIBLE  
ELASTIC LAYER WITH INITIAL STRESSES”

The dispersion curves of quasi-Lamb waves in a hydroelastic system are constructed over a wide range of frequencies using the three-dimensional equations of the elasticity theory of finite deformations for a solid body and three-dimensional linearized Navier–Stokes equations for a viscous compressible fluid. The influence of initial stresses in the pre-deformed compressible elastic layer and of the half-space of the viscous compressible fluid on the phase velocities and attenuation coefficients of quasi-Lamb waves in a hydroelastic waveguide is analyzed. The localization properties of the lower quasi-Lamb modes in elastic-fluid waveguides are studied. For the wave processes, the approach developed and results obtained make it possible to establish the limits, within which the models based on the different variants of the theory of small initial deformations, classical elasticity theory, and the model of ideal fluid can be applied. The numerical results are presented in the form of graphs and their analysis is given.

**Keywords:** *dispersion of waves, quasi-Lamb modes, compressible elastic layer, half-space of viscous compressible fluid, initial stresses.*